



Chats de Schrödinger d'un atome de Rydberg pour la métrologie quantique

Adrien Facon

► To cite this version:

Adrien Facon. Chats de Schrödinger d'un atome de Rydberg pour la métrologie quantique. Physique Quantique [quant-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. <NNT : 2015PA066534>. <tel-01326581>

HAL Id: tel-01326581

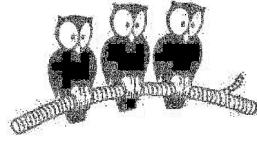
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01326581>

Submitted on 4 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

M. Adrien FACON

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Sujet :

*Chats de Schrödinger d'un atome de
Rydberg pour la métrologie quantique*

Soutenue le 02/12/2015 devant le jury composé de :

Pr.	CHARLES ADAMS	Examineur
Dr.	ANTOINE BROWAEYS	Rapporteur
Dr.	SÉBASTIEN GLEYZES	Membre invité
Pr.	SERGE HAROCHE	Directeur de thèse
Pr.	EMILY LAMOUR	Présidente du jury
Pr.	FRÉDÉRIC MERKT	Rapporteur
Dr.	PETER ROSENBUSCH	Examineur

À mes parents,

Cet élan absurde du corps et de l'âme, ce boulet de canon qui atteint sa cible en la faisant éclater, oui, c'est bien là la vie d'un homme ! On ne peut pas, au sortir de l'enfance, indéfiniment étrangler son prochain. Si les volcans changent peu de place, leur lave parcourt le grand vide du monde et lui apporte des vertus qui chantent dans ses plaies.

René Char, Fureur et mystère (1948)

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I. Éléments d'atomistique	17
I.1 Atome d'hydrogène	20
I.1.1 Modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène isolé	20
I.1.1.a Constantes du mouvement : E , \vec{L} et \vec{A}	20
I.1.1.b Éléments de symétrie	23
I.1.2 Modèle quantique de l'atome d'hydrogène isolé	28
I.1.2.a Base des états sphériques	29
I.1.2.b Base des états paraboliques	34
I.1.2.c Relation entre les bases sphériques et paraboliques	39
I.1.2.d Bases alternatives et interprétation géométrique de l'opérateur de Laplace-Runge-Lenz	41
I.1.3 Atome d'hydrogène en champ électrostatique	43
I.1.3.a Éléments de matrice : bases sphérique et parabolique	44
I.1.3.b Champ électrique statique : effet Stark linéaire	45
I.1.4 Atome d'hydrogène dans un champ électrostatique soumis à un rayonnement radiofréquence	48
I.1.4.a Hamiltonien de couplage	49
I.1.4.b Polarisation du rayonnement radiofréquence	55
I.1.4.c États de Dicke	58
I.1.4.d États cohérents d'un moment cinétique	59
I.2 Représentation d'un état de moment cinétique	61
I.2.1 Sphère de Bloch généralisée et fonctions caractéristiques	62
I.2.2 Fonction Q d'un moment cinétique	63
I.2.3 Distribution de Wigner d'un moment cinétique	67
I.3 Déviations au modèle de l'échelle harmonique de niveaux Stark	70
I.3.1 Effet Stark d'ordres supérieurs	71
I.3.1.a Effet Stark quadratique	71
I.3.1.b Effet Stark cubique	72
I.3.1.c Influence sur la dynamique du moment cinétique	73

I.3.2	Rubidium en champ nul : un atome hydrodrénoïde	77
I.3.2.a	Pénétrabilité et polarisabilité du cœur d'un état de Rydberg	77
I.3.2.b	Modèle du défaut quantique	78
I.3.2.c	Non-invariance du vecteur de Laplace-Runge-Lenz	80
I.3.3	Rubidium en champ électrostatique	81
I.3.3.a	Calcul numérique des niveaux d'énergie de l'atome de rubidium	82

Chapitre II. Génération d'états de Rydberg circulaires 87

II.1	Montage expérimental	89
II.1.1	Environnement cryogénique	89
II.1.1.a	Description du cryostat	89
II.1.1.b	Contraction et stabilité thermiques	90
II.1.2	Four à atomes de rubidium	92
II.1.3	Montage mécanique du cœur expérimental	94
II.1.3.a	Description du montage expérimental	96
II.1.3.b	Montage des électrodes « radiofréquences »	96
II.1.3.c	Montage des électrodes « miroirs »	99
II.1.4	Contrôle du champ électrique statique	100
II.1.4.a	Trois paires d'électrodes DC	101
II.1.4.b	Profil de champ électrique et gradients	101
II.1.4.c	Champ parasite et dérive à long terme	103
II.1.4.d	Annulation des champs parasites	105
II.1.5	Lasers d'excitation des niveaux de Rydberg	107
II.1.5.a	Excitation optique des états de Rydberg	107
II.1.5.b	Position de l'intersection des lasers	108
II.1.6	Champs radiofréquences	110
II.1.6.a	Montage électronique	111
II.1.6.b	Polarisation théorique du champ radiofréquence	114
II.2	Génération d'états de Rydberg circulaires	116
II.2.1	Excitation optique des états de Rydberg	116
II.2.2	Rotation de l'axe de quantification	119
II.2.3	Préparation d'atomes de Rydberg circulaires par passage adiabatique	121
II.2.4	Séquence expérimentale	125
II.3	Réglage de la polarisation des champs radiofréquences	127
II.3.1	Limites expérimentales d'un réglage purement électronique	127
II.3.2	Réglage de la polarisation du champ RF à 230 MHz	128
II.3.3	Réglage de la polarisation du champ RF à 530 MHz	131
II.3.4	Signaux d'ionisation	131
II.3.5	Polarisation du champ RF et optimisation du passage adiabatique .	133

Chapitre III. Dynamique Zénon quantique et métrologie 137

III.1 QZD : Principe théorique	139
III.1.1 Effet Zénon quantique	139
III.1.2 Dynamique Zénon quantique	141
III.1.3 Formulations alternatives	144
III.2 Dynamique Zénon quantique du moment cinétique \hat{J}_1	146
III.2.1 Espace des états	146
III.2.2 Mesure des populations	149
III.2.3 Représentation de la QZD par fonctions Q successives	154
III.3 Reconstruction complète d'un état du moment cinétique \hat{J}_1	158
III.3.1 Principe général	159
III.3.1.a Estimation par maximum de vraisemblance	159
III.3.1.b Système quantique : fonctionnelle vraisemblance $\mathcal{L}(\hat{\rho})$	160
III.3.1.c Reconstruction itérative par maximum de vraisemblance	160
III.3.2 Reconstruction d'un état <i>Chat de Schrödinger</i> du moment cinétique	161
III.3.2.a Identification des POVM	161
III.3.2.b Espace de Hilbert	162
III.3.2.c Base des états doublement habillés et hamiltoniens de cou- plage	162
III.3.2.d Expression des POVM	167
III.3.3 Résultat de la reconstruction - Fonction de Wigner	168
III.3.4 Paramètres de reconstruction par maximum de vraisemblance	170
III.3.4.a Sphère de Bloch des états habillés et troncature de l'espace de Hilbert	170
III.3.4.b Convergence de la méthode itérative	171
III.3.4.c Inhomogénéités de champ électrique	172
III.3.4.d Sensibilité aux paramètres de la mesure	173
III.4 Obtention directe d'une coupe de la fonction de Wigner	175
III.4.1 Analogie avec l'optique quantique	175
III.4.2 Approximation par une somme alternée tronquée	177
III.4.3 Mesure expérimentale de la fonction de Wigner	177

Chapitre IV. Moments cinétiques pour la métrologie 183

IV.1 Métrologie quantique : <i>Chat de Schrödinger</i> d'un atome de Rydberg	185
IV.1.1 Principe théorique	185
IV.1.1.a Dynamique d'un état cohérent du moment cinétique	185
IV.1.1.b Métrologie quantique et interférométrie	189
IV.1.2 Mise en œuvre de la méthode avec un atome de Rydberg	194

IV.1.2.a	Séquence expérimentale	194
IV.1.2.b	Sensibilité de la méthode	196
IV.1.2.c	Choix d'un état auxiliaire	197
IV.1.2.d	Synthèse de la mise en œuvre expérimentale	199
IV.1.3	Lien entre signal interférométrique et fonction de Wigner	201
IV.2	Choix d'un champ électrique de travail	207
IV.2.1	Position du problème	207
IV.2.2	Étude de la décohérence par interférométrie Ramsey	209
IV.2.2.a	Méthode d'interférométrie Ramsey	210
IV.2.2.b	Mesure du temps de cohérence à $F_{st} = 2,37$ V/cm	210
IV.2.2.c	Influence de la valeur du champ électrique statique directeur	213
IV.2.3	Polarisation du champ RF à 530 MHz	217
IV.3	Trajectoires des moments cinétiques $\hat{J}_1^{(50)}$ et $\hat{J}_1^{(51)}$	220
IV.3.1	Énergies des niveaux Stark	221
IV.3.2	Influence de l'effet Stark quadratique	222
IV.3.3	Métrologie quantique : durées des impulsions RF	224
Chapitre V.	Électrométrie quantique avec un atome de Ryd- berg	227
V.1	Séquences expérimentales et calibrations	229
V.1.1	Séquences expérimentales	229
V.1.2	Calibration des champs électriques	234
V.1.2.a	Mesure de F_{st} par spectroscopie micro-onde	235
V.1.2.b	Mesure de δF_{st} par interférométrie Ramsey	237
V.2	Métrologie quasi-classique	239
V.2.1	Séquence expérimentale	239
V.2.2	Signaux métrologiques quasi-classiques	240
V.2.3	Influence du temps d'attente t_0	243
V.2.4	Influence de la durée des impulsions radiofréquences τ_i	246
V.3	Métrologie quantique	248
V.3.1	Mesure de la phase χ en fonction de la trajectoire de $\hat{J}_1^{(50)}$	248
V.3.2	Analyse du signal d'interférence	250
V.3.3	Sensibilité de la méthode de métrologie quantique	255
V.3.4	Comparaison avec la SQL et la limite d'Heisenberg	260
V.3.5	Décohérence et réduction du contraste	263
V.4	Mesure résolue en temps	268
Conclusion et perspectives	275

Annexes

Annexe A.	Analogie avec l'oscillateur harmonique	279
Annexe B.	Montage laser et asservissement	285
Annexe C.	Génération de champs micro-ondes	295
Annexe D.	Montage électronique QZD	299
Annexe E.	Étude du champ RF généré par une électrode	301
Annexe F.	Réglage de la polarisation du champ RF à 530 MHz	313
Annexe G.	Calibration du générateur de fonctions arbitraires	319
Annexe H.	Phase relative absolue des impulsions RF	323
Annexe I.	Trajectoires des moments cinétiques $\hat{J}_1^{(50)}$ et $\hat{J}_1^{(51)}$	325
Annexe J.	Inhomogénéités et dérive du champ électrique	327
Bibliographie		336

Table des figures

1	Protocole général d'estimation de paramètre	3
2	Différentes stratégies d'estimation de paramètre à partir de N ressources	4
3	Expérience de pensée du <i>Chat de Schrödinger</i>	9
4	Structure d'une multiplicité de nombre quantique principale n en champ électrique statique : $ j, m_1, m_2\rangle$	10
5	Représentation des états cohérents de spin	11
6	Métrologie quantique : montage et implémentation	12
I.1	Vecteur de Laplace-Runge-Lenz sur l'ellipse képlérienne	22
I.2	Illustration de la dégénérescence en l de l'énergie d'un atome d'hydrogène	31
I.3	Fonction radiale du niveau $51f$ de l'atome d'hydrogène	33
I.4	Densité de probabilité quelques états sphériques de l'atome d'hydrogène .	34
I.5	Densité de probabilité de quelques états paraboliques de l'atome d'hydrogène	40
I.6	Illustration de l'action de l'opérateur \hat{A}_x sur la forme des orbites képlériennes	42
I.7	Précession des moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 en champ électrostatique faible	46
I.8	Structure d'une multiplicité n en champ électrique statique : $ n_1, n_2, m\rangle$.	47
I.9	Structure d'une multiplicité n en champ électrique statique : $ j, m_1, m_2\rangle$.	49
I.10	Action des opérateurs sur les transitions $\Delta m = \pm 1$	51
I.11	Densité de probabilité de quelques états paraboliques de « l'échelle de spin » $m_2 = +j$ de l'atome d'hydrogène	57
I.12	Projection d'un état cohérent de spin	60
I.13	Représentation de la fonction Q de trois états particuliers	65
I.14	Éléments de matrice des opérateurs rotation d'un moment cinétique sur la sphère de Bloch généralisée et translation dans le plan de phase d'un oscillateur harmonique	66
I.15	Coupes des fonctions de Wigner et Q de l'état $ j, +j\rangle$	68
I.16	Représentation de la fonction de Wigner de trois états atomiques particulièrement non classiques	69
I.17	Fonctions d'onde des états cohérents de spin	74
I.18	Rotation du moment cinétique en présence d'effet Stark quadratique . . .	76
I.19	Spectre du rubidium 85 en champ nul	80
I.20	Ouverture de la multiplicité Stark $n = 51$ pour les niveaux $m = 2$ (hydrogène et rubidium)	82
I.21	Représentation schématique des niveaux de la multiplicité $n = 51$ pour l'atome de rubidium	84

II.1	Principe de génération d'atomes de Rydberg circulaires	88
II.2	Structure du cryostat	91
II.3	Plan du cryostat	93
II.4	Plan de la source atomique	95
II.5	Montage expérimental	97
II.6	Plan du montage cavité	98
II.7	Électrodes sphériques / Électrodes planes	100
II.8	Profil de champ électrique	102
II.9	Gradient de champ électrique	103
II.10	Dérive du champ électrique	104
II.11	Annulation des champs parasites par spectroscopie de la transition $ 52f\rangle \rightarrow 51g\rangle$	106
II.12	Schéma d'excitation optique des états de Rydberg	109
II.13	Insertion des lasers au cœur du montage	110
II.14	Schéma du montage électronique radiofréquence	112
II.15	Simulation numérique de l'homogénéité de la radiofréquence	115
II.16	Spectres laser autour de la multiplicité $n = 52$	118
II.17	Spectre laser autour du niveau $ 52f, m = 2\rangle$ à $0,21 \text{ V/cm}$	119
II.18	Rotation de l'axe de quantification	121
II.19	Énergies propres de l'atome à n niveaux habillé par le champ radiofréquence	122
II.20	Passage adiabatique dans un atome à deux niveaux	123
II.21	Énergies des états habillés par la radiofréquence dans le rubidium	124
II.22	Séquences de circularisation par passage adiabatique	126
II.23	Mise en résonance de la radiofréquence avec un système à deux niveaux .	129
II.24	Mesure des fréquences de Rabi des composantes σ_+ et σ_- du champ ré- diofréquence	130
II.25	Signaux d'ionisation de la circularisation	132
II.26	Optimisation de la polarisation du champ RF par optimisation du passage adiabatique	134
III.1	Effet Zénon quantique sur les modes d'un oscillateur harmonique	141
III.2	Illustration du principe de la dynamique Zénon quantique	143
III.3	Couplage micro-onde continu et sous-espaces Zénon	147
III.4	QZD : principe de l'expérience	149
III.5	Multiplicités Stark mises en jeu dans l'expérience de QZD	150
III.6	Rotation du moment cinétique \mathbf{J}_1 : Évolution des probabilités d'occupation	152
III.7	QZD : Évolution des probabilités d'occupation	153
III.8	Séquence expérimentale de mesure de la fonction Q au cours de la QZD .	156
III.9	Évolution de la fonction Q lors de la dynamique Zénon quantique	157
III.10	Niveaux habillés par les champs radiofréquence et micro-onde	166
III.11	Fonction de Wigner d'un <i>Chat de Schrödinger</i> du moment cinétique . . .	169
III.12	Fonctions de Wigner - Habillage et troncature	171
III.13	Convergence de la méthode itérative de reconstruction	172
III.14	Fonctions de Wigner des états $\hat{\rho}_k^{(51)}$	173
III.15	Sensibilité aux paramètres de la mesure	174

III.16	Approximation de la fonction de Wigner d'un état <i>Chat de Schrödinger</i> du moment cinétique	176
III.17	Fonction de Wigner par somme alternée tronquée	178
III.18	Mesure des $P_k(\Theta, \Phi)$, $k = 0 \dots 5$	179
III.19	Mesure de la fonction de Wigner par parité tronquée	180
III.20	Préparation d'états sensibles aux champs électrique et magnétique statiques	181
IV.1	Mesure quasi-classique	187
IV.2	Représentation géométrique de la phase quantique χ	192
IV.3	Séquence expérimentale de métrologie quantique	194
IV.4	Évolution des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$	198
IV.5	Représentation graphique de la méthode de métrologie quantique	200
IV.6	Séquence alternative de métrologie quantique	202
IV.7	Fonction de Wigner d'un état <i>Chat de Schrödinger</i> de taille maximale	206
IV.8	Influence de l'effet Stark quadratique sur la dynamique du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$	208
IV.9	Mesure du temps de cohérence d'une superposition d'états par interférométrie Ramsey	211
IV.10	Franges de Ramsey	212
IV.11	Séquence expérimentale d'interférométrie Ramsey avec marche de champ	214
IV.12	Franges de Ramsey en présence d'une marche de champ électrique	216
IV.13	Injection du champ radiofréquence sur les sous-électrodes connectées deux à deux.	217
IV.14	Commensurabilité des désaccords dans les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$	219
IV.15	Énergies des niveaux Stark en fonction du champ électrique statique	221
IV.16	Évolution des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$	223
IV.17	Périodes entières de précession de $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$	224
V.1	Séquence expérimentale de métrologie quantique	230
V.2	Déroulement des séquences élémentaires	233
V.3	Spectres micro-ondes des transitions $ 49c\rangle \rightarrow 50c\rangle$ et $ 49c\rangle \rightarrow 50, k=1\rangle$	235
V.4	Mesure de δF_{st} par interférométrie Ramsey micro-onde	237
V.5	Séquence de métrologie quasi-classique	240
V.6	Électrométrie par méthode quasi-classique	241
V.7	Trajectoires comparées du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$	242
V.8	Influence du temps d'attente t_0 sur la mesure du déphasage $\Delta\phi_{RF}$	244
V.9	Évolution du déphasage $\Delta\phi_{RF}$ en fonction du temps d'attente t_0 pour différentes durées τ_i des impulsions RF	246
V.10	Positions comparées du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ à l'issue de la première impulsion radiofréquence	247
V.11	Métrologie quantique : Variation de la probabilité $P(\phi_{RF})$ avec la phase ϕ_{RF}	249
V.12	Analyse de l'amplitude et de la phase du signal d'interférence	251

V.13	Compression dynamique de l'état du moment cinétique	252
V.14	Évolution du recouvrement $\langle j, +j \psi_f \rangle$	253
V.15	Figure d'interférence et effet Stark quadratique	254
V.16	Métrologie quantique : Signal interférométrique Ramsey	256
V.17	Métrologie quantique : Influence du temps d'attente t_0 et de la durée d'injection radiofréquence τ_i	257
V.18	Évolution de la sensibilité de la phase χ en fonction de la taille de la superposition d'états du moment cinétique.	258
V.19	Franges de Ramsey sur la transition $ 50c\rangle \rightarrow 51c\rangle$	260
V.20	Métrologie quantique : SQL et HL	262
V.21	Contraste des franges d'interférence en fonction déphasage	265
V.22	Inhomogénéité du champ radiofréquence	268
V.23	Mesure résolue en temps d'une marche de champ électrique	269
V.24	Mesure résolue en temps d'une marche de champ électrique	271
V.25	Perspectives d'électrométrie non invasive	277
V.26	Superpositions d'états extrémaux au sein d'une multiplicité Stark d'un atome de Rydberg	278
B.1	Montage optique du laser à 780 nm (L_1)	286
B.2	Absorption simple et absorption saturée	287
B.3	Montage optique du laser à 776 nm (L_2)	289
B.4	Montage optique du laser à 1,3 1,3 μm (L_3)	292
B.5	Délai d'allumage du laser L_3 et fin de l'excitation Rydberg	293
D.1	Schéma du montage électronique radiofréquence QZD	299
E.1	Couplage d'un atome au champ radiofréquence créé par une électrode . .	302
E.2	Couplage d'un atome au champ radiofréquence créé par une électrode . .	304
E.3	Couplage non résonant d'un atome initialement dans l'état $ 51c\rangle$ au champ radiofréquence produit par une électrode seule à 550 MHz (élec- trode 4) avec $F_{st} = 5,712 \text{ V/cm}$	307
E.4	Couplage non résonant d'un atome initialement dans l'état $ 51c\rangle$ au champ radiofréquence produit par une électrode seule à 565 MHz (élec- trodes 3 et 4) à $5,867 \text{ V/cm}$	308
E.5	Composantes de la polarisation du champ radiofréquence produit par une électrode en fonction de la fréquence de ce champ	309
E.6	Injection du champ radiofréquence sur les électrodes connectées deux à deux.	310
F.1	Optimisation de la polarisation de la paire d'électrodes 3-4	315
F.2	Réglage en cours de la polarisation des électrodes 3-4 optimisé	317
G.1	Séquence Agilent	320
G.2	Calibration du générateur de fonction arbitraire Agilent	321
H.1	Calibration de la phase relative entre les deux impulsions radiofréquences	324

I.1	Trajectoires des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ lors de la seconde impulsion radiofréquence	326
J.1	Compensation des inhomogénéités de champ électrique	329
J.2	Effet de charge des électrodes « miroirs »	331
J.3	Suivi de la phase de la figure d'interférence au fur et à mesure des différences séries	332
J.4	Dérive du champ électrique à long terme	334
J.5	Traitement des données par la procédure de recentrage	335

Introduction

La physique étant une science quantitative, toute affirmation doit être soutenue par une mesure. Rien n'a de sens sans mesure, qui seule peut par exemple, par sa précision, affirmer ou infirmer l'existence d'une nouvelle entité physique. Qu'il s'agisse de la détection des ondes gravitationnelles, de la découverte récente du boson de Brout-Englert-Higgs, des horloges atomiques ou de la mesure des constantes fondamentales de la physique, force est de constater que la passion de la précision, soutenue par cinquante années de progrès technologiques, est une composante essentielle de la recherche actuelle. L'amélioration de la précision de ces mesures n'a pas simplement conduit à une connaissance plus précise du monde qui nous entoure, mais a aussi fait émerger de nouvelles questions fondamentales et d'audacieuses perspectives.

Les progrès de la physique atomique couplés à ceux de la spectroscopie de haute précision ont ainsi permis ces dernières années de mesurer expérimentalement les constantes fondamentales de la physique avec une précision renversante. L'atome d'hydrogène a en particulier constitué un véritable banc d'essai à cette spectroscopie de haute précision, initiée par T.W. Hänsch et A.L. Schawlow [1] il y a près d'une quarantaine d'années. L'avènement des lasers et l'invention des peignes de fréquence ont en particulier révolutionné la mesure du temps. Depuis les horloges mécaniques à foliot du XIV^e siècle jusqu'aux horloges optiques à ion unique [2–4] ou à atomes neutres [5–7] d'aujourd'hui, en passant par les horloges à quartz et les horloges à Césium (jet thermique et fontaine [8–10]), la précision de la mesure du temps a été améliorée de près de seize ordres de grandeur ! On pourrait donc désormais mesurer une déviation de moins d'une seconde sur l'âge de l'Univers.

La mesure ultra-précise du temps par les horloges à fontaine d'atomes de Césium, qui constituent aujourd'hui un étalon primaire de temps et de fréquence, fait que la seconde est l'unité du Système international qui est définie avec la plus faible incertitude. Cet étalon primaire sert ainsi d'étalon de longueur via la vitesse de la lumière. Mais la précision de la mesure du temps a par ailleurs des implications beaucoup plus fondamentales, puisqu'elle permet aujourd'hui d'éprouver la stabilité de nos constantes fondamentales à long terme [11]. Ces mesures ultra-précises des constantes fondamentales (constante de structure fine α , rapport des masses du proton et de l'électron $\mu = m_p/m_e$) constituent en soi

des tests de validité de l'électrodynamique quantique [12,13] ou de théories cosmologiques telle l'accélération de l'expansion de l'Univers [14,15].

Eu égard à la stabilité et à la forte reproductibilité des expériences qu'ils procurent, les atomes sont donc des instruments précieux permettant une précision de mesure en constante progression [16]. Parallèlement à ces mesures du temps et des fréquences, des progrès importants ont eu lieu ces dernières années dans la mesure des champs électromagnétiques. Dans le domaine de la magnétométrie, les atomes ont permis d'atteindre une précision et une résolution spatiale étonnantes. Il est maintenant possible d'atteindre une sensibilité de l'ordre du $\text{fT}/\sqrt{\text{Hz}}$ [17–22]. Cette magnétométrie de précision a permis par exemple d'améliorer la mesure du moment magnétique de l'électron et de la constante de structure fine [23,24]. Elle a aussi trouvé des applications naturelles dans la mesure d'anomalies géomagnétiques et des interactions dynamiques des plasmas magnétosphériques dans l'Espace [25], ainsi que dans la mesure des champs biomagnétiques, permettant par exemple la cartographie des champs magnétiques produits par le cerveau [26] ou le cœur [27].

Malgré toutes ces avancées, la mesure des champs électriques, assistée par ces systèmes quantiques que sont les atomes, est restée quelque peu en retrait. L'utilisation jusqu'au début des années 1990 d'antennes-étalons [28,29], dont le champ rayonné est mesuré électro-optiquement [30], n'est finalement pas une méthode si différente des travaux initiés par Hertz à la fin du XIX^e siècle. L'introduction des atomes de Rydberg aux propriétés hors-normes, présentant un dipôle électrique en n^2 , où n est le nombre quantique principal, et une polarisabilité en n^7 [31], permet de disposer d'une sonde atomique ultra-sensible de champ électrique [32–34]. Pour des atomes de Rydberg de grand nombre quantique n , une très faible variation du champ électrique modifie substantiellement leurs propriétés, ce qui complique certaines expériences où les atomes de Rydberg sont piégés proches d'un diélectrique (atomes de Rydberg excités dans un condensat de Bose-Einstein sur puce atomique [35] par exemple) mais en fait en contre-partie de formidables sondes [36,37]. Ainsi, la mesure de déplacements Stark dans le spectre de ces états de Rydberg a été utilisée pour déterminer la valeur de petits champs électriques d.c. avec une précision de $\pm 20 \mu\text{V}/\text{cm}$ [33,38]. Ces dernières années, l'utilisation de la technique de transparence électro-magnétiquement induite (EIT) au sein de cellules à vapeur d'atomes de rubidium ^{87}Rb a permis de disposer d'un dispositif compact permettant de mesurer des champs électriques dans le domaine micro-onde d'environ $8 \mu\text{V}/\text{cm}$ avec une sensibilité de $30 \mu\text{V}/\text{cm}/\sqrt{\text{Hz}}$ [39,40].

Au-delà de ces performances, la quête de mesures toujours plus précises pose la question de savoir si les lois de la physique imposent en la matière une limite fondamentale. Autrement dit, pour une quantité de ressources finie, l'estimation d'un certain paramètre physique rencontre-t-elle une limite en précision ? Cette limite ultime existe et fut baptisée « limite de Heisenberg » par Holland et Burnett [41] en référence à la relation d'incertitude nombre-phase du même nom. Cette définition princeps souffrait cependant d'un certain

nombre de limitations faisant que cette limite « fondamentale » pouvait être franchie par un grand nombre de protocoles [42–44]. Le débat fut clos par Kok *et al.* [45, 46] grâce à l'utilisation de la limite de Cramér-Rao quantique [47] associée à une redéfinition des ressources disponibles, compatible avec la théorie de l'information des réseaux quantiques. Cette limite fondamentale « reformulée » est infranchissable mais peut être atteinte par l'utilisation de systèmes quantiques, qui viennent améliorer la sensibilité métrologique des procédures classiques [48]. Cette amélioration dans la précision de l'estimation de paramètres physiques a donné naissance au domaine de la métrologie quantique, qui utilise les ressources de la mécanique quantique pour atteindre la limite de Heisenberg, que nous allons maintenant définir.

Comme le représente schématiquement la Figure 1, une méthode standard pour estimer un paramètre inconnu φ d'un système quantique consiste à préparer un système sonde (classique ou quantique), à le laisser interagir durant un certain temps d'interrogation avec le système d'intérêt, puis à effectuer une mesure (généralisée) $\hat{\Pi}$ sur ce système donnant le résultat y . Cette mesure donne accès à la distribution de probabilité conditionnelle $p(y|\varphi)$, qui constitue une fonction de vraisemblance. Si l'on connaît l'évolution $\hat{U}_\varphi = \exp(-i\varphi\mathcal{T})$ du système sonde, où \mathcal{T} est le générateur des translations en φ , la comparaison de l'état final de la sonde $\rho(\varphi)$ – déduit du résultat y de la mesure – avec l'état initial $\rho(0)$, permet d'évaluer la valeur du paramètre φ .

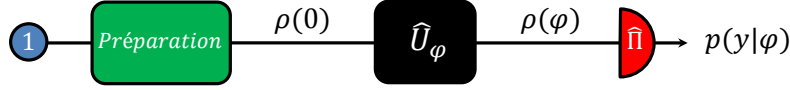


FIGURE 1 – Protocole général d'estimation de paramètre mettant en jeu une phase de préparation, une évolution \hat{U}_φ durant une phase d'interrogation et une mesure $\hat{\Pi}$ donnant accès à la distribution de probabilité conditionnelle $p(y|\varphi)$.

Lors d'une mesure de $p(y|\varphi) = \text{Tr}[\hat{\Pi}\rho(\varphi)]$, la quantité maximale d'information qui peut être extraite de cette mesure est donnée par l'information de Fisher :

$$\mathcal{I}(\varphi) = \int dy \frac{1}{p(y|\varphi)} \left(\frac{\partial p(y|\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 = \left\langle \left(\frac{\partial \text{Log } p(y|\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \right\rangle . \quad (1)$$

L'information de Fisher est donc égale à la valeur moyenne du carré de la dérivée logarithmique par rapport à φ de la fonction de vraisemblance. La limite de Cramér-Rao quantique [47] conduit alors à une incertitude $\Delta\varphi$ sur le paramètre φ :

$$\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{T\mathcal{I}(\varphi)}} , \quad (2)$$

où $(\Delta\varphi)^2$ est la variance de φ et T le nombre de fois où la procédure de mesure est répétée.

On peut alors relier l'information de Fisher à une distance statistique sur les probabilités $p(y|\varphi)$ [45, 46, 49] et écrire la limite de Heisenberg dans le cas le plus général :

$$\text{Limite de Heisenberg : } \Delta\varphi \geq \frac{1}{2\sqrt{T}|\langle\mathcal{T}\rangle|}, \quad (3)$$

où $|\langle\mathcal{T}\rangle| \equiv \langle\mathcal{T} - t_{\min}\mathbf{1}\rangle$ correspond à la valeur moyenne du générateur des translations en φ par rapport au fondamental (t_{\min} étant la plus petite valeur propre de \mathcal{T}). Cette équation (3) définit la limite de Heisenberg, qui peut être égalée, mais jamais dépassée.

Afin d'effectuer une mesure de précision du paramètre φ , plusieurs stratégies sont envisageables et sont résumées schématiquement à la Figure 2. La stratégie classique (Figure 2 (a)) consiste à effectuer N mesures indépendantes en parallèle, à l'aide de N systèmes sondes identiques. L'application du théorème de la limite centrale permet de conclure que l'écart-type obtenu par moyennage des N mesures est donné par $\Delta_N = \Delta_1/\sqrt{N}$, où Δ_1 correspond à l'écart-type d'une mesure unique. La mesure numéro 1 ne fournit pas plus d'information que la mesure numéro k ou la mesure numéro N : l'information de Fisher, qui mesure la quantité d'information sur le paramètre y révélée par la mesure, est donc constante avec le nombre de ressources N . Ce régime est appelé *limite quantique standard* (*standard quantum limit*) ou *limite de bruit quantique* (*shot noise limit*). La métrologie quantique utilise ces mêmes ressources mises en forme collectivement lors de la phase de préparation par des procédés non classiques et permet d'atteindre une erreur bornée par l'inverse du nombre de ressources *ie* en $1/N$ (Figure 2 (b)). Ce régime correspond à la limite d'Heisenberg. De nombreuses stratégies ont été proposées pour atteindre cette limite [50, 51], la plupart mettant en jeu compression d'états et intrication.

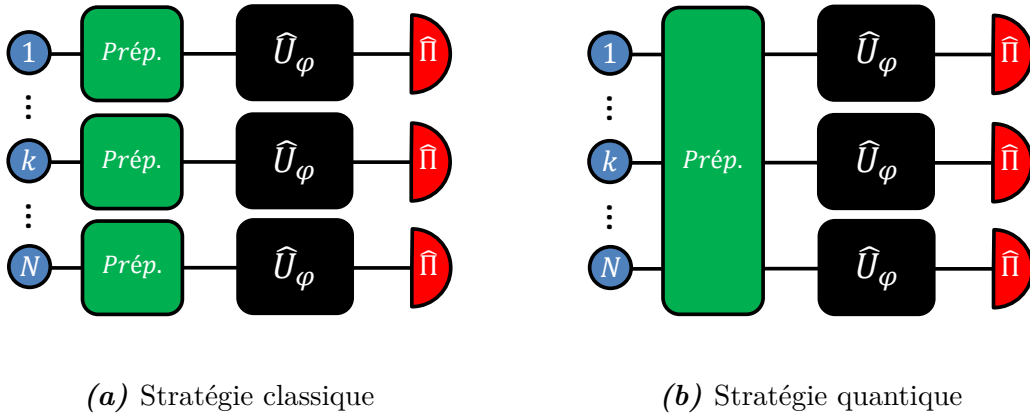


FIGURE 2 – Différentes stratégies d'estimation de paramètre à partir de N ressources. (a) Stratégie classique impliquant N exemplaires différents et indépendants soumis à des mesures séparées par des opérations et des mesures locales et communiquées classiquement *ie* Local Operations and Classical Communications (LOCC). Ces différentes mesures en parallèle peuvent aussi s'effectuer séquentiellement à partir d'une unique sonde au prix d'une conversion des ressources physiques en ressources temporelles. (b) Stratégie quantique impliquant une préparation globale des N exemplaires soumis à des mesures séparées.

Donnons ici un exemple simple d'interférométrie atomique [52] où émergent naturellement ces deux régimes. Considérons un *qubit*, c'est-à-dire un système quantique à deux niveaux pouvant être décrit par les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, ainsi que toute superposition de ces deux états. Dans le cas d'une horloge atomique, le paramètre à déterminer est ici une fréquence atomique $\omega_{at}/2\pi$, qui correspond à la fréquence de la transition entre les deux niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Partant du niveau de plus basse énergie $|0\rangle$, le système est préparé par une première impulsion $\pi/2$ dans une superposition à poids égaux des deux niveaux : $|\psi_i\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Le système est ensuite soumis à une phase d'interrogation de durée t_0 , durant laquelle une phase relative $\varphi = (\omega_{LO} - \omega_{at}) t_0$, entre un oscillateur de référence et l'oscillateur atomique, est accumulée par le niveau $|1\rangle$. A l'issue de cette phase d'interrogation, le système se trouve dans l'état $|\psi_{int}\rangle = (|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)/\sqrt{2}$, puis est soumis à une seconde impulsion $\pi/2$ identique à la première. La probabilité $P(\varphi)$ de retrouver l'état final $|\psi_f\rangle$ dans l'état initial $|\psi_i\rangle$, s'écrit :

$$P(\varphi) = |\langle\psi_i|\psi_f\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad (4)$$

La mesure de la probabilité $P(\varphi)$ s'effectue avec une erreur statistique $\Delta^2 P(\varphi) = \langle\psi_f|(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)^2|\psi_f\rangle - P^2(\varphi) = P(\varphi) - P^2(\varphi)$. Si l'on veut estimer le paramètre φ , la propagation de l'erreur fait que la sensibilité d'une telle mesure dépend de la pente $|\partial P/\partial\varphi|$ du signal interférométrique (4). Ainsi l'écart type sur la phase φ s'écrit :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta P(\varphi)}{|\partial P/\partial\varphi|} \quad , \quad (5)$$

qui, dans le cas considéré, vaut $\Delta\varphi = 1$ quel que soit φ , car $\Delta P(\varphi) = \sqrt{P(\varphi)(1 - P(\varphi))} = |\cos(\varphi/2)\sin(\varphi/2)| = |\partial P/\partial\varphi|$. Nous pouvons améliorer cette sensibilité en répétant N fois l'expérience ce qui formellement consiste à travailler avec les N *qubits* dans l'état $|\psi_i\rangle^{\otimes N} = [(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}]^{\otimes N}$. La pente du signal $|\partial P/\partial\varphi|$ ne va pas changer, mais l'écart-type $\Delta_N P(\varphi)$ sur N répétitions va diminuer. En effet, les variables $P_i(\varphi)$, $i = 1, \dots, N$ étant N variables stochastiques indépendantes, la variance associée à leur moyenne est égale à la moyenne de leur variance. Ainsi, l'erreur globale associée à la mesure de $P(\varphi)$ s'écrit alors :

$$\Delta_N P(\varphi) = \Delta\left(\sum_{i=1}^N \frac{P_i(\varphi)}{N}\right) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \Delta^2 P_i(\varphi)}{N}} = \frac{\Delta P(\varphi)}{\sqrt{N}} \quad . \quad (6)$$

On obtient finalement :

Limite quantique standard : $\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$

(7)

Ce comportement en $1/\sqrt{N}$ correspond à la limite quantique standard, qui peut être dépassée par des procédures quantiques bien précises, comme nous allons l'illustrer tout

de suite avec l'utilisation d'états du type NOON. A partir des mêmes ressources, au lieu d'utiliser N fois l'état $|\psi_i\rangle$, nous pouvons utiliser l'état (maximalement) intriqué suivant, qui utilise aussi N *qubits* :

$$|\psi_q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{|0\rangle \cdots |0\rangle}_{N \text{ fois}} + \underbrace{|1\rangle \cdots |1\rangle}_{N \text{ fois}} \right) \quad . \quad (8)$$

L'évolution de l'état non classique $|\psi_q\rangle$ lors de la phase d'interrogation conduit à l'état $|\psi_q\rangle = \left(|0\rangle \cdots |0\rangle + e^{iN\varphi} |1\rangle \cdots |1\rangle \right) / \sqrt{2}$ et la probabilité de retrouver l'état final $|\psi_f\rangle$ dans l'état initial $|\psi_q\rangle$, s'écrit alors :

$$Q(\varphi) = |\langle \psi_q | \psi_f \rangle|^2 = \cos^2 \left(\frac{N\varphi}{2} \right) \quad . \quad (9)$$

On calcule alors que d'une part $\Delta Q(\varphi) = |\cos(N\varphi/2) \sin(N\varphi/2)|$ et d'autre part, $|\partial P / \partial \varphi| = N |\cos(N\varphi/2) \sin(N\varphi/2)|$, ce qui conduit à une erreur $\Delta\varphi = 1/N$. Cette incertitude égale la limite d'Heisenberg, définie plus haut à l'équation (3). En effet, le générateur des translations du paramètre φ correspond à l'opérateur moment cinétique \hat{J}_z , qui génère une rotation du spin collectif, formé par les N spins $1/2$, autour de l'axe (Oz) de la sphère de Bloch. Les valeurs propres de \hat{J}_z correspondent aux nombres quantiques magnétiques m , tels que $m = -j, -j+1, \dots, +j$ où $j = N/2$. Ainsi pour cet opérateur de spin $|\langle \hat{J}_z \rangle| = N/2$ et l'équation (3) s'écrit alors :

Limite de Heisenberg : $\Delta\varphi \geq \frac{1}{N}$

(10)

L'état maximalement intriqué à N *qubits* atteint donc la limite ultime d'Heisenberg.

Cette amélioration de \sqrt{N} de la sensibilité de la mesure a ici été obtenue grâce à l'intrication des N *qubits*. Cette méthode a été mise en œuvre par Wineland pour un système de deux ions béryllium $^9\text{Be}^+$ piégés [53] et dans le cas de trois ions béryllium $^9\text{Be}^+$ dans un état de Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) [54]. Plus récemment, des états NOON de 10 spins réalisés dans une molécule de triméthylphosphite (TMP) ont été utilisés comme sondes magnétométriques [55]. Ces états de type NOON, dont la sensibilité optimale atteint la limite de Heisenberg, constituent une ressource formidable pour la métrologie quantique et certaines de ses applications, tels des tests des inégalités de Bell ou des protocoles d'information quantique [56]. Il est cependant extrêmement difficile d'intriquer un grand nombre de *qubits* et ces états NOON sont par ailleurs extrêmement sensibles aux pertes de particules qui engendrent une perte rapide de la cohérence de phase. C'est pourquoi la métrologie quantique utilise aujourd'hui des ressources modestement intriquées préservant une certaine robustesse et que d'autres familles d'états quantiques sont étudiées afin de trouver des états non classiques moins fragiles et de préparation plus aisée.

On compte, parmi ces autres familles d'états, les états dit « comprimés » pour lesquels les fluctuations quantiques entre deux observables qui ne commutent pas sont redistribuées, tout en atteignant la limite fixée par la relation d'incertitude de Heisenberg associée à ces observables. Nous allons ici décrire en détail les états cohérents de spin et les états comprimés d'un ensemble de N *qubits*, qui constitue un système présentant de nombreuses similitudes avec celui que nous présenterons dans ce manuscrit.

Si l'on considère un ensemble de N *qubits* identiques, on peut former par addition des spins individuels $\hat{\mathbf{S}}_i$, l'opérateur $\hat{\mathbf{J}} = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{S}}_i$. L'état symétrique $|0\rangle^{\otimes N}$ est transformé par l'action de l'opérateur $\hat{\mathbf{J}}$ en un autre état symétrique, et ainsi de suite. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $j = N/2$ correspond en réalité exactement aux états symétriques à N *qubits*. La première impulsion Ramsey, dont nous parlons dans l'exemple des horloges atomiques, agit de manière identique sur les N *qubits* et génère donc des états symétriques, qui sont des états propres de l'opérateur collectif $\hat{\mathbf{J}}^2$. Le couplage des N *qubits* à une source classique résonante produit donc la rotation du moment cinétique collectif $\hat{\mathbf{J}}$ de taille $j = N/2$. On peut donc décrire l'état atomique collectif sur une sphère, appelée sphère de Bloch généralisée correspondant à l'ensemble des points où pointe le moment cinétique quasi classique $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$. Le couplage du moment cinétique à une source classique engendre des états appelés « états cohérents de spin » pour lesquels les fluctuations des composantes de $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ vérifient l'égalité dans la relation d'incertitude d'Heisenberg : $\Delta \hat{J}_x \Delta \hat{J}_y = \frac{\hbar}{2} |\langle \hat{J}_z \rangle|$. Les fluctuations transversales angulaires sont isotropes autour du vecteur moyen $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ et sont en $1/\sqrt{N}$. Ces états cohérents de spin sont donc représentés par des petits disques d'incertitude sur la sphère de Bloch, centrés sur la valeur moyenne du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}$. Les états comprimés atomiques correspondent donc à des états où les fluctuations suivant une direction sont inférieures à celles de cet état cohérent de spin, *ie* inférieur à $1/\sqrt{N}$. La génération de tels états est généralement réalisée par dynamiques non linéaires via les interactions entre particules [57, 58], par répétition de mesures non destructives [59, 60] ou par dynamique de Zénon quantique [61]. Ces états comprimés atomiques ont permis d'atteindre une sensibilité en phase 10 fois inférieure à la limite quantique standard [62]. Il existe aussi des états comprimés du champ électro-magnétique qui possèdent des fluctuations sub-poissonniennes soit dans le nombre de photons, soit dans la phase du champ [63–65]. Ces états comprimés de la lumière peuvent être utilisés par exemple pour la détection d'ondes gravitationnelles [66–68]

D'autres approches théoriques ont été proposées prouvant la robustesse et les avantages de nouveaux états-sondes comme des états cohérents intriqués [69, 70], des états de Fock/Dicke intriqués [71–73] ou des états non Gaussiens intriqués [74]. L'intrication de plusieurs modes de ces états [75–77] a aussi été étudiée, ainsi que très récemment l'utilisation de mélanges d'états où la sonde est intriquée avec un système auxiliaire lui aussi mesuré [78, 79]. La plupart de ces méthodes utilisent l'intrication comme une ressource pour la métrologie quantique. C'est sur cette notion que se rejoignent métrologie quantique et information quantique et que les atomes de Rydberg ont un rôle à jouer.

Les qualités des atomes de Rydberg suscitent en effet un regain d'intérêt dans le domaine de l'information quantique [80] et de la simulation quantique [81]. Les très fortes interactions de Van der Waals entre atomes de Rydberg [82] et leur longue portée sont à l'origine du phénomène de blocage dipolaire [83]. Grâce à cet effet de blocage dipolaire, des portes quantiques peuvent être réalisées [83–85] et des états intriqués peuvent être générés [86]. Par ailleurs, l'étude des gaz de Rydberg est en plein essor : par l'effet de blocage dipolaire, l'excitation d'un unique atome de Rydberg dans un tel gaz atomique est possible et devient délocalisée, introduisant des corrélations spatiales dans le gaz [87–89]. En somme, que ce soit individuellement, au sein d'une chaîne d'atomes, dans un cristal ou bien au sein d'un gaz, les atomes de Rydberg semblent être un outil privilégié tant pour la connaissance fondamentale que pour les applications qui en découlent dans les domaines de la métrologie quantique, de l'information quantique et de la simulation quantique. Si toutes ces propriétés permettront d'ouvrir de larges perspectives au terme de ce manuscrit, nous exploiterons plutôt dans nos expériences la grande sensibilité au champ électrique de ces atomes de Rydberg, ainsi que la formidable structure que forment les différentes multiplicités Stark. En effet dans nos expériences, au lieu d'utiliser un ensemble de N atomes à deux niveaux, nous n'utiliserons qu'un seul atome, mais à N niveaux.

Ainsi, afin d'atteindre la limite ultime d'Heisenberg et d'améliorer la sensibilité des mesures électrométriques actuelles, nous proposons dans cette thèse de doctorat une approche alternative aux méthodes de métrologie quantique jusqu'ici présentées. Notre méthode repose sur l'utilisation d'un unique atome de Rydberg préparé dans un état du type *Chat de Schrödinger*. Les états *Chats de Schrödinger* sont des superpositions quantiques d'états semi-classiques du champ électromagnétique [90–94] ou atomiques [95, 96]. Le nom donné à ces états fait référence à la célèbre « expérience de pensée » du *Chat de Schrödinger* imaginée par Schrödinger aux débuts de la mécanique quantique [97] (Figure 3). Ces états permettent d'améliorer par un facteur \sqrt{N} la sensibilité de la limite quantique standard et d'atteindre la limite ultime de Heisenberg [94, 99]. La sensibilité de ces états *Chats de Schrödinger* fut récemment utilisée comme sondes magnétométriques sous la forme d'états *Chats* de 13 spins [100] ou encore pour la détection d'événements de diffusion de photon unique par un ion piégé [101]. De nouveau, le blocage dipolaire permet en particulier de générer de tels états dans des ensembles d'atomes de Rydberg [102].

Notre équipe a proposé l'année dernière la réalisation expérimentale d'une méthode innovante conduisant à la génération déterministe et périodique d'états *Chats de Schrödinger* du moment cinétique au sein d'un atome de Rydberg par dynamique de Zénon quantique [96]. Ces dynamiques nouvelles ont été étudiées durant mes deux premières années de thèse et ont été décrites en détail dans la thèse de doctorat d'Adrien Signoles [103]. L'obtention d'un signal métrologique à partir de ces états *Chats de Schrödinger* obtenus par dynamique de Zénon quantique a constitué une partie de mon travail. Il s'est cependant avéré que la structure des différentes multiplicités Stark d'un atome de Rydberg pouvait être exploitée, afin de générer des états du même type permettant de mesurer plus aisément de très petits champs électriques d.c. avec une grande sensibilité.



FIGURE 3 – *Expérience de pensée du Chat de Schrödinger. Un chat est enfermé dans une boîte close en présence d'une particule radioactive qui déclenche en cas de désintégration, via un compteur Geiger, un mécanisme conduisant à la diffusion d'un poison létal. Le système macroscopique constitué par le chat est donc intriqué avec un système quantique, qui au bout du temps de demi-vie de l'atome initialement excité se retrouve dans une superposition quantique d'états. Le système macroscopique se retrouve finalement dans une étrange superposition d'états « mort » et « vivant ». Cette fable soulève finalement le problème de la limite classique-quantique. Image extraite de [98].*

La structure des multiplicités Stark d'un atome de Rydberg en champ électrostatique, constituées chacune de n^2 niveaux atomiques, offre en effet de grandes ressources quant à la génération d'états non classiques atomiques. L'étude précise des symétries au sein d'une multiplicité donnée permet de faire émerger la base des états paraboliques et de montrer qu'elle est une base privilégiée pour traiter perturbativement la levée de dégénérescence des n^2 niveaux d'une même couche n par effet Stark. Le nombre quantique magnétique m demeure donc un bon nombre quantique. La Figure 4 représente l'ensemble des niveaux Stark d'une même multiplicité dont la dégénérescence a été partiellement levée par l'effet Stark linéaire. Cet effet Stark linéaire, qui détermine l'écart entre deux niveaux Stark voisins d'une multiplicité, dépend linéairement du champ électrique statique F_{st} , mais aussi du nombre quantique principal n . Les niveaux sont classés par colonnes en fonction de leur nombre quantique magnétique. Parmi tous ces niveaux, deux états se distinguent particulièrement : les deux états de $|m|$ maximaux, qui sont appelés « états circulaires ». Pour ces états, la densité de probabilité de l'électron de valence est un tore centré sur le noyau de l'atome. On distingue donc ces deux états des autres états dits « elliptiques ».

Au premier ordre, les déplacements Stark linéaires des niveaux d'une même multiplicité permettent d'identifier différentes échelles harmoniques finies de niveaux. En effet, les diagonales montantes ($m_2 = \text{Cste}$) et descendantes ($m_1 = \text{Cste}$) forment autant de sous-espaces, composés de $2j + 1$ niveaux équidistants, dont nous pouvons montrer en utilisant les symétries de l'atome d'hydrogène, qu'ils correspondent aux états propres de deux moments cinétiques indépendants $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ de normes égales à $j = (n - 1)/2$. Ainsi, tous les niveaux Stark peuvent être décrits par deux nombres quantiques m_1 et m_2 ($m_1 + m_2 = m$), valeurs propres (à un facteur \hbar près) de deux opérateurs $\hat{J}_{1,z}$ et $\hat{J}_{2,z}$, associés à deux moments cinétiques de même norme. On montre alors que la composante σ_+ d'un rayonnement radiofréquence ne se couple qu'à l'opérateur $\hat{\mathbf{J}}_1$ et ne modifie donc pas le

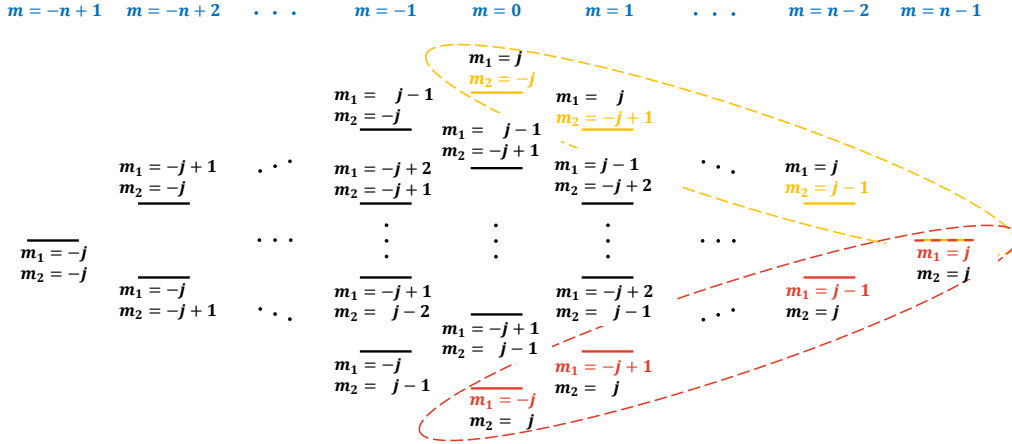


FIGURE 4 – Structure d’une multiplicité n en champ électrique statique. Les niveaux sont étiquetés suivant leurs nombres quantiques paraboliques $\{j, m_1, m_2, m\}$ et classés horizontalement selon leur nombre quantique magnétique m . Les niveaux du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ pour $m_2 = j_2 = j$ sont représentés en rouge et les niveaux du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$ pour $m_1 = j_1 = j$ en jaune. L’état général de l’atome s’écrit alors comme le produit tensoriel de ces deux moments cinétiques indépendants.

nombre quantique m_2 - l’autre composante de la polarisation σ_- se couplant à l’autre opérateur moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$ et ne modifiant pas m_1 . Le choix de la polarisation du champ radiofréquence permet donc de confiner la dynamique de l’atome dans un sous-espace correspondant à l’échelle de spin d’un unique moment cinétique qui serait « porté » par l’atome.

Si l’on considère l’état circulaire de $m = n - 1 > 0$, on peut identifier deux échelles particulières de spin (niveaux en jaune et rouge) auxquelles appartient cet état. L’évolution de l’atome, initialement dans cet état circulaire, couplé à un champ radiofréquence σ_+ restera restreinte aux niveaux entourés en pointillé rouge, associés aux états du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$. De manière très similaire à l’opérateur moment cinétique collectif d’un ensemble de N qubits, le couplage de l’atome, décrit par $\hat{\mathbf{J}}_1$, à un champ radiofréquence polarisé σ_+ va donc engendrer la rotation de ce moment cinétique sur une sphère de Bloch dite généralisée, dont l’état sera à chaque instant un « état cohérent de spin » (voir Figure 5). Les états cohérents de spin sont donc générés par couplage du moment cinétique à une source classique. Ces états sont repérés sur la sphère de Bloch par les coordonnées angulaires sphériques (Θ, Φ) qui correspondent à la direction vers laquelle pointe le moment cinétique moyen $\langle \hat{\mathbf{J}}_1 \rangle$. Les fluctuations quantiques sur les composantes de cet opérateur font que ces états sont représentés par des disques d’incertitude sur la sphère de Bloch. Finalement, on définit les états cohérents de spin $|\Theta, \Phi\rangle$ du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$, comme le résultat de la rotation du moment cinétique dans l’état maximal $|j, +j\rangle$ pointant au pôle Nord de la sphère de Bloch :

$$|\Theta, \Phi\rangle \equiv \hat{R}_{\Theta, \Phi} |j, +j\rangle \quad , \quad (11)$$

où $\hat{R}_{\Theta,\Phi}$ correspond à l'opérateur rotation défini par :

$$\hat{R}_{\Theta,\Phi} = e^{-\frac{i}{\hbar}\Theta\hat{J}_{\mathbf{n}}} \quad , \quad (12)$$

avec $\hat{J}_{\mathbf{n}}$ le générateur des rotations autour de l'axe $\mathbf{n} = (-\sin \Phi, \cos \Phi, 0)$.

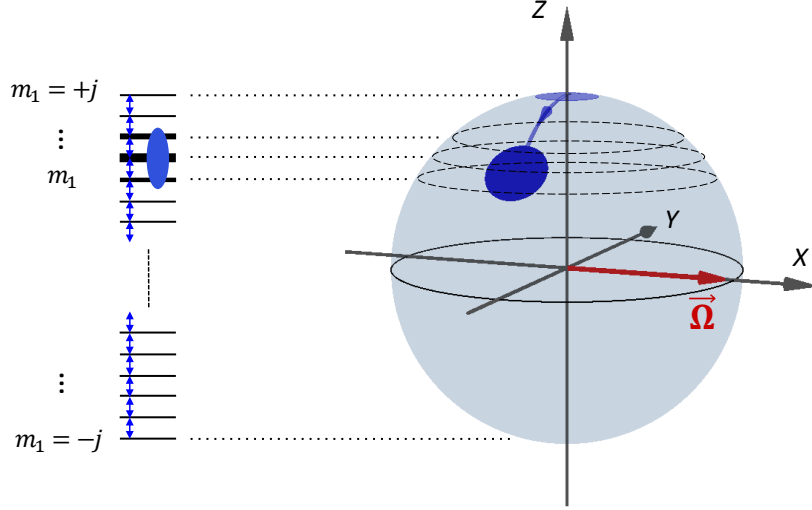


FIGURE 5 – Représentation des états cohérents de spin sur la sphère de Bloch généralisée. L'état cohérent de spin est obtenu par rotation de l'état maximal du moment cinétique $|j, +j\rangle$. En vis-à-vis de la sphère de Bloch, l'échelle harmonique des $2j + 1$ états propres du moment cinétique \hat{J}_1 .

En préparant l'atome dans une superposition d'états du moment cinétique, nous allons donc dans ce manuscrit proposer et réaliser une méthode de métrologie quantique permettant de dépasser la limite quantique standard et de mesurer de très faibles champs électriques statiques avec une sensibilité meilleure que les meilleures mesures de champ électrique d.c. actuelles.

Le dispositif expérimental est représenté Figure 6 (a). Les atomes de rubidium ^{87}Rb issus d'un four forment un jet atomique collimaté (flèche bleue) et traversent une structure composée de deux électrodes planes horizontales, ainsi que quatre électrodes entourant la cavité (seules deux de ces quatre dernières électrodes sont ici représentées). Ces six électrodes servent dans un premier temps à générer les champs électrostatiques nécessaires à l'excitation optique des atomes de Rydberg par les lasers (flèches rouge et verte) qui intersectent le jet atomique au centre de la structure. Dans un second temps, les deux électrodes planes servent à définir un axe de quantification vertical permettant de générer un rayonnement radiofréquence σ_+ à l'aide des quatre électrodes latérales. Disposant d'un champ radiofréquence σ_+ , nous pouvons en particulier générer un atome de Rydberg circulaire (état bicolore sur la Figure 4) par passage adiabatique depuis les niveaux de faible moment cinétique orbital ($m = 2$).

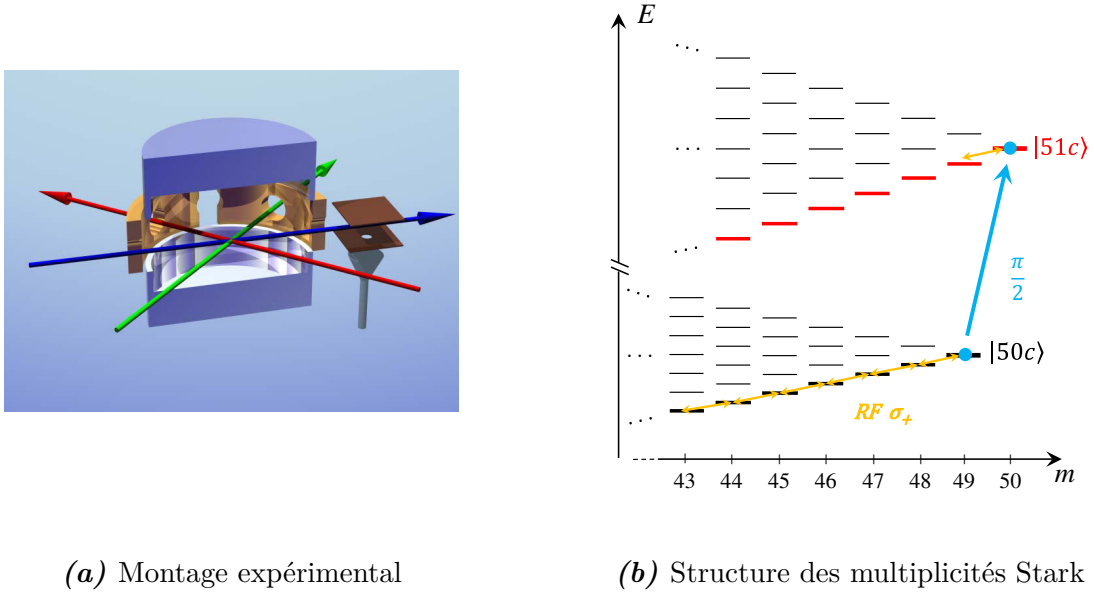


FIGURE 6 – Métrologie quantique : montage et implémentation. **(a)** Coupe du montage expérimental. Un jet atomique d’atomes de rubidium traverse une structure composée de deux électrodes planes parallèles et de quatre électrodes latérales (seules deux électrodes sont représentées). Les atomes sont excités optiquement au centre de la cavité et sont ensuite manipulés par couplage à des champs micro-ondes et radiofréquences, avant d’être détectés par un channeltron à la sortie de la structure. **(b)** Structure des multiplicités Stark $n_g = 50$ et $n_e = 51$. Le couplage de l’atome à un champ radiofréquence polarisé σ_+ permet de manipuler simultanément les moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ dont les états sont représentés par des traits gras noirs et rouges. La préparation d’une superposition d’états circulaires permet d’envisager des dynamiques différentes pour ces deux moments cinétiques dont la condition de résonance avec le champ radiofréquence diffère à cause de l’effet Stark différentiel.

Avec ce montage expérimental, nous avons réalisé deux expériences qui seront décrites successivement dans ce manuscrit. La première expérience consiste en l’observation expérimentale de la dynamique Zénon quantique, qui nous permet de manière déterministe de générer des états *Chats de Schrödinger* du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$. Une partie de mon travail a été consacrée à la reconstruction de cette superposition d’état par la méthode de maximum de vraisemblance, qui sera donc décrite en détail dans ce manuscrit. Cependant, l’effet de la perturbation Zénon ajoute des fluctuations préjudiciables à la réalisation d’expériences de métrologie. Nous avons donc imaginé une méthode alternative de génération de telles superpositions du moment cinétique, afin de parvenir à dépasser expérimentalement la limite quantique standard. Cette méthode consiste à préparer une superposition d’états dans deux multiplicités distinctes, dont la phase relative entre les deux composantes de la superposition est extrêmement sensible aux variations de champ électrique.

Plus précisément, à partir de l’état de Rydberg circulaire ($m > 0$) d’une multiplicité donnée, il est possible de préparer par une impulsion $\pi/2$ micro-onde une superposition de poids égaux de deux états circulaires appartenant à deux multiplicités voisines, comme la superposition $|\psi\rangle = (|50c\rangle + |51c\rangle)/\sqrt{2}$ où les *kets* $|50c\rangle$ et $|51c\rangle$ désignent

les états circulaires des multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$ (Figure 6 (b)). L'effet Stark linéaire dépendant du nombre quantique principal n , les échelles de spin associées aux deux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$, décrivant l'état des composantes de la superposition atomique respectivement dans les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$ (niveaux gras noirs et rouges), ont des transitions d'échelle de fréquences différentes. Un champ radiofréquence résonant avec les transitions entre niveaux Stark voisins de la multiplicité $n_g = 50$ sera donc désaccordé avec la fréquence de ces mêmes transitions une multiplicité plus haut. La dynamique résultant du couplage de l'atome au champ radiofréquence sera donc fort différente pour les deux composantes de la superposition. Pour un champ électrostatique suffisamment élevé, on peut même considérer que le désaccord entre le champ radiofréquence et la première transition d'échelle depuis le niveau circulaire $|51c\rangle$ est tellement grand, que cette composante va demeurer sur cet état circulaire. La dynamique de l'autre composante, c'est-à-dire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$, va être bien différente puisque le couplage résonant va engendrer sa rotation. Notre stratégie de métrologie quantique consiste à tirer profit de la grande sensibilité au champ électrique du déphasage $\Delta\chi$ accumulé lors de l'évolution distincte des composantes de la superposition atomique lors du couplage radiofréquence.

Nous avons vu plus avant que l'état collectif d'un ensemble de N *qubits* pouvait être décrit par un spin collectif de taille $j = N/2$, que la limite quantique standard correspondait à des fluctuations de phase en $1/\sqrt{N}$ et que la limite de Heisenberg correspondait à des fluctuations plus faibles, en $1/N$. Si l'on s'appuie sur ces définitions de la limite quantique standard et de la limite de Heisenberg formulées pour un ensemble de N *qubits*, on conclut que pour notre moment cinétique $j = (n_g - 1)/2 = 24,5$:

<u>Limite quantique standard</u> : $\Delta\chi \geq \frac{1}{\sqrt{2j}}$ / <u>Limite de Heisenberg</u> : $\Delta\chi \geq \frac{1}{2j}$

La sensibilité de notre méthode évolue comme l'inverse de la taille de la ressource, c'est-à-dire comme la limite de Heisenberg. Notre méthode d'électrométrie quantique permet d'atteindre une sensibilité de quelques mV/cm par atome pour une durée d'interrogation de seulement 26 ns, ce qui constitue une mesure 2,3 fois plus sensible que la limite quantique standard et à peine 3 fois moins sensible que la limite de Heisenberg. Pour un temps d'intégration correspondant au temps de vol de nos atomes, notre méthode conduit, en moyennant aux temps longs la répétition de T mesures, à une sensibilité de $18,9 \mu\text{V}/\text{cm}/\sqrt{\text{Hz}}$. Par ailleurs, l'extrême sensibilité d'un unique atome aux champs électriques permet des mesures résolues en temps avec une résolution inférieure à la microseconde, dont nous proposerons une preuve de principe dans ce manuscrit.

Le chapitre I de ce manuscrit présente les éléments d'atomistique généraux importants pour la compréhension des manipulations des atomes de Rydberg dans nos expériences. L'étude des symétries de l'atome d'hydrogène permet, dans le cadre d'un traitement semi-classique, d'identifier les trois constantes du mouvement que sont l'énergie, le moment cinétique \mathbf{L} et le vecteur de Laplace-Runge-Lenz \mathcal{A} au sein d'une couche n donnée. Ces deux dernières constantes vectorielles sont essentielles à la compréhension de la description quantique d'un atome de Rydberg en termes de deux moments cinétiques indépendants. Le couplage d'un atome de Rydberg à un rayonnement radiofréquence en champ électrostatique sera étudié et nous soulignerons l'analogie de notre système avec un moment cinétique $j = (n_g - 1)/2$ plongé dans un champ magnétique classique. Nous développerons ensuite les méthodes de représentation d'un tel état du moment cinétique sur une sphère de Bloch dite généralisée. Nous clôturerons ce premier chapitre par l'introduction du modèle du défaut quantique permettant de décrire correctement les états de faibles moments cinétiques orbitaux de l'atome de rubidium et soulignerons les conséquences des non linéarités ajoutées par la prise en compte de l'effet Stark d'ordres supérieurs.

Le chapitre II décrira les outils expérimentaux nécessaires à la manipulation des atomes de Rydberg et en particulier à la préparation d'états de Rydberg circulaires. Après une description de l'environnement cryogénique et du montage mécanique, une attention particulière sera portée au contrôle du champ électrique et à la polarisation du champ radiofréquence, qui sont deux éléments majeurs de notre méthode d'électrométrie quantique.

Le chapitre III traitera de la dynamique Zénon quantique permettant la génération d'états du type *Chat de Schrödinger* par une méthode innovante. Après quelques rappels théoriques, nous décrirons son implémentation sur les états Stark d'un atome de Rydberg. Finalement, une large part sera consacrée à l'analyse de la fonction de Wigner d'un tel état et à l'obtention d'un signal métrologique simple à partir d'une coupe de cette fonction. La méthode de reconstruction d'états par maximum de vraisemblance sera décrite et discutée.

Le chapitre IV proposera une méthode alternative pour l'obtention d'un signal métrologique à l'aide de superpositions d'états du moment cinétique de grandes tailles. Les avantages de notre stratégie, reposant sur la grande sensibilité du déphasage des deux composantes d'une superposition d'états au champ électrique, seront exposés et nous prouverons qu'elle présente une sensibilité en $1/j$ qui varie comme la limite de Heisenberg. Notre méthode, consistant en la manipulation de superpositions de grands moments cinétiques, s'expose cependant aux phénomènes de décohérence que nous tenterons de limiter par le contrôle des homogénéités de champ électrique.

Le chapitre V détaillera les résultats de notre méthode de métrologie quantique. Après l'explication en détail des séquences expérimentales, nous présenterons un premier signal métrologique qui prouvera de manière qualitative que notre mesure est d'une sensibilité bien en dessous de la limite quantique standard. Nous présenterons ensuite un second

signal interférométrique qui permettra de conclure sur les performances en termes de sensibilité et les limites de notre méthode. Notre procédé de mesure permettant une mesure résolue en temps et en position de très faibles champs électriques, nous exposerons une preuve de principe d'une mesure résolue en temps sur une marche de champ électrique. Pour finir, nous discuterons les effets de la décohérence et de réduction du contraste de notre signal interférométrique et montrerons que notre signal est en partie limité par son extrême sensibilité.

Chapitre I

Éléments d'atomistique

*La rose est sans pourquoi, fleurit parce qu'elle fleurit.
N'a souci d'elle-même, ne désire être vue.*

Angelus Silesius, cité par Martin Heidegger, Le principe de raison (1962)

Sommaire

I.1	Atome d'hydrogène	20
I.1.1	Modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène isolé	20
I.1.2	Modèle quantique de l'atome d'hydrogène isolé	28
I.1.3	Atome d'hydrogène en champ électrostatique	43
I.1.4	Atome d'hydrogène dans un champ électrostatique soumis à un rayonnement radiofréquence	48
I.2	Représentation d'un état de moment cinétique	61
I.2.1	Sphère de Bloch généralisée et fonctions caractéristiques . . .	62
I.2.2	Fonction Q d'un moment cinétique	63
I.2.3	Distribution de Wigner d'un moment cinétique	67
I.3	Déviations au modèle de l'échelle harmonique de niveaux Stark	70
I.3.1	Effet Stark d'ordres supérieurs	71
I.3.2	Rubidium en champ nul : un atome hydrodrénoïde	77
I.3.3	Rubidium en champ électrostatique	81

Un peu plus de cent ans après le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913), il est frappant de constater à quel point nous sommes loin de cette première *Théorie des quanta*, tout en étant ses héritiers. La bonne compréhension de cette physique atomique, extrêmement féconde tout au long du XX^e siècle, permet encore aujourd'hui d'aborder des problèmes nouveaux et de s'appuyer sur les technologies nouvelles afin de persévérer sans cesse dans l'exploration du monde quantique.

En 1905 déjà, Einstein [104] s'appuyant sur une analogie puissante et audacieuse entre la matière et le rayonnement, utilisera l'« hypothèse atomique », *ie* la nature discontinue de la matière, pour construire la loi de quantification du rayonnement électromagnétique, sous la forme de la loi dite de Planck-Einstein [104–106] :

$$E_n = n \times \hbar\omega \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad (\text{I.1})$$

où \hbar est la constante désormais appelée *constante de Planck* réduite, introduite dès 1900 par Planck dans sa tentative de résoudre l'épineux problème dit de la « catastrophe ultraviolette » du corps noir, et ω désignant la pulsation propre d'un oscillateur décrivant un mode du champ électromagnétique.

De même, les expériences de spectroscopie atomique, mettant en évidence le fait que certaines valeurs traditionnellement continues ne pouvaient que prendre des valeurs discrètes, révélaient les insuffisances de la *Théorie Classique* et par là même la nécessité de l'hypothèse des quanta. Malgré ces évidences expérimentales d'une "quantification" depuis les travaux de Fraunhofer [107], Foucault [108] et Kirchhoff [109,110], aucune théorie quantitative, pas même empirique, ne fut formulée avant les travaux de Balmer [111] et Rydberg [112] proposant des lois phénoménologiques décrivant la position des raies lumineuses de l'atome d'hydrogène. Pour n'en citer qu'une, la loi phénoménologique de Rydberg et Ritz [113] établie en 1889 décrira grâce à une formule d'une rare compacité la fréquence de certaines transitions bien particulières de l'atome d'hydrogène :

$$\Delta\nu_{n,n'} = -c R_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad , \quad (\text{I.2})$$

où les nombres n et n' étaient deux nombres permettant de classer les raies spectroscopiques d'absorption et qui s'avèreront représenter deux valeurs du nombre quantique principal. Afin de décrire au mieux les observations expérimentales réalisées au sein de vapeurs atomiques, Rydberg introduit dans cette formule de manière *ad hoc* la constante de Rydberg R_y . Durant près d'une vingtaine d'années, ces lois phénoménologiques se sont multipliées afin de décrire les raies d'absorption d'autres éléments chimiques, avec un souci d'unification et des efforts de généralisation. Ce n'est pourtant qu'en 1913, que le jeune physicien danois Niels Bohr présentera dans son célèbre article *On the Constitution of Atoms and Molecules* [114] un modèle de l'atome permettant de rendre compte quantitativement d'un grand nombre de résultats expérimentaux.

Dans cet article, il postulait que dans l'atome d'hydrogène seules certaines orbites, correspondant à des énergies et à des rayons discrets, étaient autorisées. Il ajoutait que l'émission et l'absorption de la lumière par l'atome s'effectuaient par sauts quantiques entre ces orbites discrètes, et que ces sauts, qui survenaient à des instants imprévisibles, étaient accompagnés de l'apparition ou de la disparition des quanta de lumière, dont Einstein avait prédit l'existence. Dans cet article, Bohr considère un atome suivant un modèle planétaire et, appliquant un raisonnement analogue à celui mené par Planck et Einstein sur le rayonnement électromagnétique appliqué cette fois à un processus de capture radiative de l'électron, il en conclut que les seules orbites « accessibles » sont celles dont l'énergie vaut :

$$E_n = -\frac{\hbar\Omega_0}{2n^2} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{où} \quad \frac{\hbar\Omega_0}{2} = \frac{m_e(e^2/4\pi\epsilon_0)^2}{2\hbar^2} \approx 13,6 \text{ eV} \quad . \quad (\text{I.3})$$

Le nombre entier (non nul) n permettait de « numérotter » les orbites électroniques et ainsi, en considérant que le saut d'une orbite n d'énergie E_n à une orbite n' d'énergie $E_{n'}$ s'accompagne de l'émission d'un photon d'énergie $\hbar\omega$, Bohr donne une expression théorique de la constante introduite plus tôt par Rydberg, en bon accord avec les mesures expérimentales d'alors :

$$R_y = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} \quad . \quad (\text{I.4})$$

Le modèle atomique de Bohr ne considère que des orbites planétaires circulaires ayant un moment cinétique orbital maximal pour une énergie donnée, et ses limites sont par ailleurs bien connus. Le formalisme quantique moderne permet aujourd'hui une bien meilleure compréhension de cette physique atomique. L'électrodynamique quantique en cavité a pour sa part contribué à entretenir ce dialogue à cheval sur un siècle entre les pères fondateurs de la mécanique quantique et les expérimentateurs d'aujourd'hui réalisant quotidiennement les *Gedankenexperimente*¹ d'hier, telle la fable de Schrödinger dont nous parlions en introduction ou encore la réalisation d'une « boîte à photon » qu'avaient imaginé conjointement Einstein et Bohr.

Dans ce premier chapitre, nous présenterons tout d'abord quelques éléments d'atomistique concernant l'atome d'hydrogène, isolé ou soumis à un champ électrique statique extérieur, en révélant la profonde analogie entre une trajectoire atomique orbitale et l'état d'un moment cinétique « porté » par l'atome. De nombreux outils de représentation sont disponibles afin de représenter toute une faune d'états du moment cinétique et seront présentés en détail. Finalement, l'utilisation d'atomes hydrogénoïdes introduit quelques déviations au modèle de l'atome d'hydrogène, dont les conséquences seront discutées.

1. En français : expériences de pensées.

I.1 Atome d'hydrogène

Le rubidium est un métal alcalin qui dispose donc d'un unique électron de valence. Les atomes de rubidium portés dans les états de Rydberg pour lesquels l'électron de valence gravite loin du cœur atomique chargé se comportent comme des atomes hydrogénoïdes, c'est-à-dire qu'hormis la masse de leur noyau, leur structure est semblable à celle de l'atome d'hydrogène.

I.1.1 Modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène isolé

Considérons tout d'abord un atome d'hydrogène isolé. D'emblée, des considérations de symétrie due à la géométrie du problème émergent. Nous tâcherons dans les paragraphes qui vont suivre de comprendre en quoi ces symétries du problème sont essentielles dans le traitement semi-classique et quantique du problème de l'atome d'hydrogène.

I.1.1.a Constantes du mouvement : \mathbf{E} , \vec{L} et $\vec{\mathcal{A}}$

Ce paragraphe se veut être un rappel de quelques résultats de mécanique classique relatifs au problème à deux corps, parfois appelé de Kepler-Coulomb, d'une particule dans un potentiel coulombien de la forme :

$$V(\vec{r}) = -\frac{k}{r} \quad , \quad (\text{I.5})$$

où \vec{r} désigne le vecteur position et où k est une constante positive, expression recouvrant par sa généralité à la fois les problèmes d'attraction gravitationnelle entre deux corps massifs et d'attraction coulombienne entre deux charges de signes opposés.

Par ces rappels, nous désirons montrer que certains des objets et outils, qui nous seront très utiles conceptuellement par la suite lors d'une approche purement quantique, apparaissent « naturellement » lors de l'écriture des équations d'Euler et d'Hamilton-Jacobi. Les constantes du mouvement qui en découlent, tels les vecteurs moment cinétique \vec{L} et de Laplace-Runge-Lenz $\vec{\mathcal{A}}$, traduisent des symétries particulières du problème mécanique qui conduiront à la compréhension de la dégénérescence en énergie de certaines trajectoires électroniques.

Présenté de la sorte, ce problème permet de décrire en première approximation l'atome d'hydrogène et les atomes hydrogénoïdes. L'atome d'hydrogène est en effet composé d'un unique proton constituant le noyau, ainsi qu'un électron de valence. De charges opposées,

ces deux particules s'attirent par interaction coulombienne². Dans ce type de problème à deux corps, il est courant de disjoindre formellement le mouvement du centre de masse et le mouvement dit « relatif » et ainsi de désigner par

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad \text{et} \quad \vec{r} \equiv \mathbf{r} \quad , \quad (\text{I.6})$$

où m_e et m_p désignent respectivement les masses de l'électron et du proton, les grandeurs relatives à la « particule fictive » associée au mouvement relatif des deux corps. Le noyau étant beaucoup plus massif que l'électron périphérique, cette particule fictive est associée, dans une très bonne approximation, à l'électron de valence de cet atome. Dans ce formalisme, les équations de Newton permettent de dégager une première constante du mouvement, l'énergie mécanique :

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{k}{r} \quad , \quad (\text{I.7})$$

traduisant l'invariance par translation dans le temps du problème de Kepler-Coulomb. Dans cette expression, $\dot{\mathbf{r}}$ désigne la dérivée du vecteur position, soit le vecteur vitesse. La force \mathbf{f} dérivant du potentiel $V(\mathbf{r})$ est ainsi dite « conservative ». Cette force $\mathbf{f} = -k \cdot \mathbf{r}/r^3$ dérivant du potentiel $V(\mathbf{r})$ étant colinéaire au vecteur position, l'écriture du théorème du moment cinétique donne immédiatement la conservation du moment cinétique $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, traduisant l'invariance par rotation du problème – expression dans laquelle $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$ désigne l'impulsion de la particule fictive. Le mouvement de la particule fictive, c'est-à-dire dans notre cas de l'électron, est donc contenu dans un plan perpendiculaire à \mathbf{L} .

L'existence d'une troisième quantité conservée est moins directe et relève une symétrie plus subtile du problème, caractéristique de la forme du potentiel coulombien en $1/r$, appelée « symétrie dynamique ». Il convient d'écrire l'équation de la rotation du vecteur unitaire \mathbf{e}_r et d'utiliser explicitement l'expression de la force \mathbf{f} pour construire l'intégrale première du mouvement, appelée vecteur de Laplace-Runge-Lenz :

$$\mathcal{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r} \quad . \quad (\text{I.8})$$

Comme on le verra sous peu, cette quantité vectorielle a une interprétation géométrique simple. Avant tout, en calculant le produit scalaire de $\vec{\mathcal{A}}$ avec le vecteur position \mathbf{e}_r , on retrouve la première loi de Kepler, dite « loi des orbites », qui énonce que la trajectoire est une conique dont le centre attracteur occupe un des foyers, dont l'équation est la suivante :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2} \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{\mu k} \cos(\theta - \theta_0) \right) \quad , \quad (\text{I.9})$$

2. On prendra comme convention de signe $q = -e < 0$ pour la charge de l'électron.

où $\mathcal{A} = |\mathbf{A}|$ désigne la norme du vecteur de Laplace-Runge-Lenz. De cette équation de la trajectoire émerge l'excentricité de la conique $e = \mathcal{A}/\mu k$ ($0 \leq e \leq +\infty$) où θ_0 est l'angle polaire du péricentre. Dans le cas d'un état lié, cette conique est une ellipse ($0 \leq e < 1$) de demi-axes :

$$a = \frac{\mathbf{L}^2/\mu k}{1 - (\mathcal{A}/\mu k)^2} \quad \text{et} \quad b = a \sqrt{1 - (\mathcal{A}/\mu k)^2} . \quad (\text{I.10})$$

La norme du vecteur de Laplace-Runge-Lenz se retrouve donc dans les caractéristiques géométriques de la trajectoire. Elle correspond en effet, à une normalisation près, à l'excentricité de la conique de la première loi de Kepler. Ainsi, pour une trajectoire circulaire, le vecteur de Laplace-Runge-Lenz est nul et pour une ellipse très aplatie tendant à être linéaire $\mathcal{A} \rightarrow \mu k$. La Figure I.1 présente la construction du vecteur de Laplace-Runge-Lenz en quatre points \vec{r}_i de l'ellipse képlérienne.

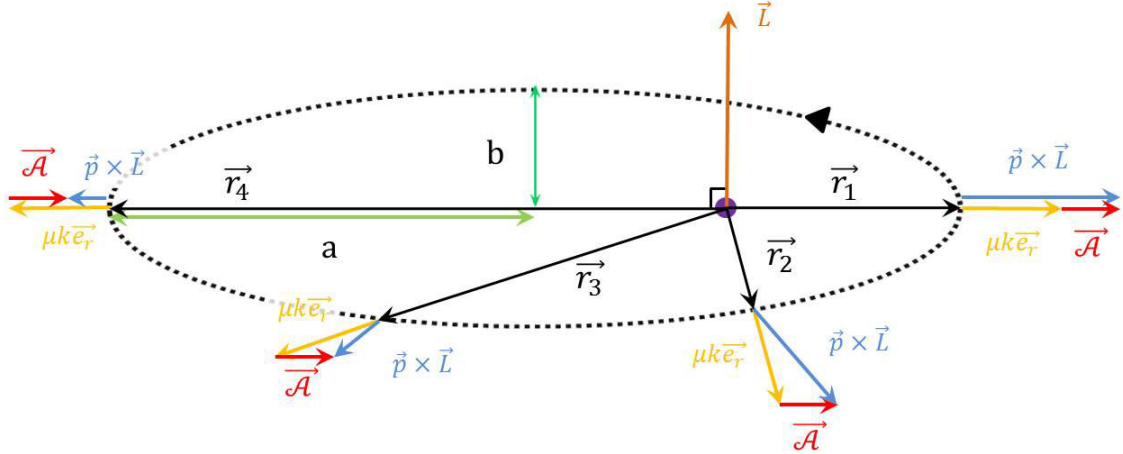


FIGURE I.1 – Construction géométrique du vecteur de Laplace-Runge-Lenz en quatre points \mathbf{r}_i de l'ellipse képlérienne. Avec l'énergie E et le vecteur moment cinétique \mathbf{L} , le vecteur de Laplace-Runge-Lenz \mathbf{A} est une quantité conservée du mouvement, caractéristique du potentiel en $1/r$. Les longueurs a et b sont celles des demi-axes de l'ellipse.

On note directement à partir de la définition de \mathbf{A} que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0$, qui indique que le vecteur de Laplace-Runge-Lenz est contenu dans le plan orbital. Par ailleurs, la moyenne temporelle du vecteur position \mathbf{r} est directement liée à $\vec{\mathcal{A}}$ par la relation :

$$\langle \mathbf{r} \rangle = -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{L}^2}{(\mu k)^2 - \mathcal{A}^2} \mathbf{A} . \quad (\text{I.11})$$

Cette dernière relation permet en particulier de déduire que le vecteur de Laplace-Runge-Lenz est colinéaire à l'axe de symétrie de l'ellipse et est toujours orienté du centre de la force (qui peut être assimilé au noyau de l'atome d'hydrogène dans une bonne approximation) vers le péricentre c'est-à-dire le point de l'orbite le plus proche du foyer. Cela se

vérifie Figure I.1, où le centre de la force est représenté par le point violet à l'intérieur de l'orbite et le péricentre correspondant au point de l'ellipse \mathbf{r}_1 .

Nous avons donc mis en évidence trois grandeurs qui sont des constantes du mouvement : l'énergie mécanique E , le vecteur moment cinétique \mathbf{L} et le vecteur de Laplace-Runge-Lenz \mathbf{A} . Cependant, ces sept grandeurs scalaires ne sont pas toutes indépendantes, comme l'indiquait déjà l'équation $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0$, et ce qu'indique encore l'équation suivante :

$$\mathcal{A}^2 = (\mu k)^2 + 2\mu \mathbf{L}^2 E \quad . \quad (\text{I.12})$$

Ainsi, il n'existe que cinq grandeurs scalaires indépendantes constantes du mouvement, ce qui est un maximum pour un système mécanique à trois dimensions, et ce qui fait de ce système à deux corps de Kepler-Coulomb un système « maximalelement superintégrable » [115]. Face à ces interdépendances, il est courant de choisir les trois composantes du vecteur moment cinétique \mathbf{L} ainsi que les deux coordonnées polaires du vecteur de Laplace-Runge-Lenz \mathcal{A} et θ_0 pour décrire le système.

Ceci établi, il est alors aisé de résoudre les équations de Hamilton-Jacobi stationnaires en coordonnées sphériques ou paraboliques et d'appliquer, pour un traitement semi-classique complet du problème de l'atome d'hydrogène, la méthode de quantification \mathcal{BWS} ³ dans ces systèmes de coordonnées respectifs. Le lecteur intéressé par cette théorie quelque peu historique est invité à se reporter aux travaux spécifiquement consacrés à ce sujet, ou à la thèse de doctorat de Jean Hare [118]. L'intérêt de ce paragraphe d'ouverture sur la théorie de l'atome d'hydrogène était de faire émerger les constantes classiques du mouvement et d'en appréhender la nature intimement géométrique. Par ailleurs, d'après le théorème de Noether, on sait que les invariances d'un système mécanique impliquent l'existence d'intégrales premières du mouvement. Le paragraphe suivant reprendra les éléments essentiels de la théorie de ces groupes de symétrie de rotation et dynamique qui seront primordiaux par la suite pour la compréhension de la dynamique quantique d'un atome de Rydberg couplé à un champ radiofréquence dans nos expériences.

I.1.1.b Éléments de symétrie

i) Groupe des rotations d'espace $SO(3)$

L'isotropie du problème de l'atome d'hydrogène a pour conséquence la conservation du moment cinétique \mathbf{L} . Ce lien se formalise du point de vue de la théorie des groupes par le fait que le moment cinétique \mathbf{L} « engendre » les rotations, c'est-à-dire que le moment cinétique permet de construire les transformations canoniques correspondantes. On prouve ainsi que la fonction $\mathcal{R}_{d\theta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + d\theta \cdot \mathbf{L}$ est bien la fonction génératrice de la

3. D'après les noms de N. Bohr [114], W. Wilson [116] et A. Sommerfeld [117] qui ont entre autres contribué à son développement.

transformation canonique infinitésimale associée à la rotation d'angle $d\boldsymbol{\theta}$ dans \mathbb{R}^3 . On peut alors définir l'opérateur vectoriel \mathcal{L} tel que :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3, \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\theta} = i \{ \boldsymbol{\theta}, \mathbf{L} \} \quad , \quad (\text{I.13})$$

et construire alors l'opérateur rotation $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}}$ d'angle fini $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{\theta}} = e^{-i\mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad . \quad (\text{I.14})$$

ii) Groupe de symétrie dynamique $SO(4)$

La conservation du vecteur de Laplace-Runge-Lenz, spécifique des problèmes à force centrale en $1/r$, implique l'invariance du hamiltonien du système sous des transformations plus subtiles. Avant de construire une représentation de ce groupe de symétrie dynamique, il peut être judicieux, au vu de l'équation (I.12), de définir un vecteur de Laplace-Runge-Lenz réduit, noté en majuscule droite \mathbf{A} , tel que :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{-2\mu E}} \cdot \mathcal{A} \quad , \quad (\text{I.15})$$

permettant de réécrire l'équation (I.12) sous la forme :

$$\mathbf{A}^2 + \mathbf{L}^2 = -\frac{\mu k^2}{2E} \quad , \quad (\text{I.16})$$

ce qui symétrise un peu plus les rôles joués par le moment cinétique et le vecteur de Laplace-Runge-Lenz, dorénavant « réduit ». On en conclut que $\mathbf{A}^2 + \mathbf{L}^2$ est une grandeur conservée reliée à l'énergie de la trajectoire classique.

Le hamiltonien du système est donc invariant sous les transformations canoniques plus générales engendrées à la fois par le moment cinétique \mathbf{L} , le vecteur Laplace-Runge-Lenz réduit \mathbf{A} , ainsi que leurs produits. Ces transformations canoniques peuvent être représentées par l'opérateur :

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = \exp \left[-i \left(\mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\eta} \right) \right] \quad , \quad (\text{I.17})$$

où l'on a défini l'opérateur \mathcal{A} à partir du vecteur de Laplace-Runge-Lenz réduit, tel que :

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3, \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\eta} = i \{ \boldsymbol{\eta}, \mathbf{A} \} \quad . \quad (\text{I.18})$$

L'ensemble de ces transformations forme le groupe des symétries dynamiques du problème qui s'identifie au groupe $SO(4)$ des rotations d'un espace euclidien de dimension quatre. Il suffit pour s'en convaincre de calculer les crochets de Poisson entre

les différentes composantes de \mathbf{L} , \mathbf{A} ainsi qu'entre les composantes croisées :

$$\begin{cases} \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k \\ \{L_i, A_j\} = \epsilon_{ijk} A_k \\ \{A_i, A_j\} = \epsilon_{ijk} L_k \end{cases} \quad i, j, k = x, y, z. \quad (\text{I.19})$$

Ce groupe est donc généré par un moment cinétique à quatre dimensions, c'est-à-dire un tenseur antisymétrique d'ordre deux et de dimension quatre, dont les six composantes sont celles de \mathbf{L} et \mathbf{A} :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{H}_4} = \begin{bmatrix} 0 & L_z & -L_y & A_x \\ -L_z & 0 & L_x & A_y \\ L_y & -L_x & 0 & A_z \\ -A_x & -A_y & -A_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.20})$$

iii) Structure du groupe $SO(4)$ - Générateurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2

De même que le groupe des rotations $SO(3)$ traduit une propriété d'isotropie dans l'espace, c'est-à-dire qu'aucune direction de l'espace n'est privilégiée ou autrement dit que les trois générateurs de ce groupes L_x , L_y et L_z jouent des rôles similaires, le groupe $SO(4)$ ne privilégie aucun de ses six générateurs (à la différence de $SO(3, 1)$ par exemple) ce qui traduit finalement une équivalence ou une certaine symétrie dans les rôles joués par \mathbf{L} et \mathbf{A} . Dans l'étude de l'évolution séculaire des grandeurs \mathbf{L} et \mathbf{A} en mécanique céleste par la théorie des perturbations, l'évolution de ces deux grandeurs fait apparaître un système d'équations couplées qu'on parvient aisément, eu égard aux rôles symétriques de \mathbf{L} et \mathbf{A} , à découpler en introduisant les demi-sommes et demi-différences de ces variables :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{A}) \end{cases}. \quad (\text{I.21})$$

Les relations de commutation de \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 sont celles de deux moments cinétiques en trois dimensions et, qui plus est, ces deux moments cinétiques sont indépendants :

$$\begin{cases} \{J_{1,i}, J_{1,j}\} = \epsilon_{ijk} J_{1,k} \\ \{J_{2,i}, J_{2,j}\} = \epsilon_{ijk} J_{2,k} \\ \{J_{1,i}, J_{2,j}\} = 0 \end{cases} \quad i, j, k = x, y, z. \quad (\text{I.22})$$

Par inversion du système (I.21), on constate que \mathbf{L} est bien la somme de deux moments cinétiques et donc effectivement par règle d'addition un moment cinétique, alors que le

vecteur de Laplace-Runge-Lenz réduit n'a pas lui cette nature :

$$\begin{cases} \mathbf{L} = (\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_1) \\ \mathbf{A} = (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \end{cases} . \quad (\text{I.23})$$

Si l'on considère les transformations canoniques engendrées par les éléments de ce groupe de symétrie dynamique, on peut réécrire l'expression (I.17) de \mathcal{T} sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) &= \exp\left[-i(\mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\eta})\right] \\ &= \exp\left[-i(\mathcal{J}_1 \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}))\right] \exp\left[-i(\mathcal{J}_2 \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\eta}))\right] \\ &= \exp\left[-i(\mathcal{J}_2 \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\eta}))\right] \exp\left[-i(\mathcal{J}_1 \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}))\right] , \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

où les opérateurs vectoriels \mathcal{J}_1 et \mathcal{J}_2 sont définis comme le produit du complexe i avec le crochet de Poisson des grandeurs associées, comme introduit précédemment pour \mathcal{L} en (I.13) et \mathcal{A} en (I.18). Pour écrire cela, on s'appuie sur la structure d'algèbre qu'apportent les crochets de Poisson sur l'espace des phases en mécanique hamiltonienne⁴. Ces égalités traduisent que toute transformation du groupe $SO(4)$, qui transforme donc une trajectoire en une autre de même énergie, peut s'écrire comme le produit d'une rotation engendrée par \mathbf{J}_1 et d'une seconde engendrée par \mathbf{J}_2 , ou vice versa.

Par ailleurs, en raison de la relation de (I.22) $\forall i, j \in \{x, y, z\}$, $\{J_{1,i}, J_{2,j}\} = 0$, il se cache derrière cet « efficace » changement de variables (I.21) une propriété bien spécifique du groupe $SO(4)$, qui est d'être isomorphe au produit des deux groupes $SO(3)$:

$$SO(4) \cong SO(3) \otimes SO(3) . \quad (\text{I.25})$$

En d'autres termes, les deux algèbres de Lie associées sont découplées, de sorte que l'on peut écrire que $\mathfrak{so}_4 = \mathfrak{so}_3 \oplus \mathfrak{so}_3$. Finalement, les crochets de Poisson des composantes de \mathbf{J}_1 et de \mathbf{J}_2 (deux premières relations de (I.22)) montrent que ces deux grandeurs réalisent le nombre maximum de générateurs qui commutent (le groupe est dit de rang 2) et on vérifie alors que les deux grandeurs \mathbf{J}_1^2 et \mathbf{J}_2^2 sont conservées et reliées à l'énergie de la trajectoire classique :

$$\mathbf{J}_{1,2}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2) = -\frac{\mu k^2}{8E} = \text{Cste} . \quad (\text{I.26})$$

4. Cette utilisation extensive des crochets de Poisson dans ce traitement semi-classique de l'atome d'hydrogène sera dès le prochain paragraphe remplacé par des crochets de Lie selon la procédure de quantification canonique.

Il est cependant difficile de se représenter ces rotations tridimensionnelles dans l'espace physique usuel, car elles ne correspondent pas à des rotations géométriques que subirait la trajectoire de l'électron de valence. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la définition (I.21) des grandeurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 et de se rappeler que si effectivement le moment cinétique \mathbf{L} est générateur des rotations infinitésimales de l'espace physique, le vecteur de Laplace-Runge-Lenz réduit \mathbf{A} est lui, comme on a pu le montrer, relié à l'excentricité des trajectoires elliptiques. Ces moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 , générant des rotations dans un espace plus complexe que \mathbb{R}^3 , ne sont donc pas de simples moments cinétiques orbitaux.

Pour finir de révéler la subtilité de ces vecteurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 , il convient de remarquer leur comportement singulier vis-à-vis des transformations de parité. Comme bien connu, l'opérateur parité laisse invariant le moment cinétique \mathbf{L} , mais change cependant le signe du vecteur de Laplace-Runge-Lenz. Ceci se voit directement sur la définition (I.8) et se conçoit bien géométriquement en se rappelant que ce vecteur est relié à la valeur moyenne temporelle du vecteur position (voir équation. (I.11)). Si l'on considère la définition (I.21) des opérateurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 , on voit que l'action de l'opérateur parité sur ces générateurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 provoque leur permutation : $\mathbf{J}_1 \xleftrightarrow{P} \mathbf{J}_2$. Les deux groupes $SO(3)$ dont le produit est isomorphe à $SO(4)$ ne sont donc pas véritablement identiques comme pourrait le laisser croire la notation. Toute rotation de $SO(4)$ se décompose donc en fait en un produit d'une rotation dite « isoclinique droite » et d'une rotation « isoclinique gauche ».

Il n'est pas le lieu de mener plus loin l'analyse de la structure de ces deux sous-groupes de $SO(4)$. Pour ce qu'il nous importe dans ce manuscrit, cette description d'une famille de trajectoires de même énergie⁵ en termes de deux moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 indépendants nous permet, outre des commodités d'ordre analytique, de comprendre d'ores et déjà la dégénérescence parfois dite « accidentelle » d'un multiplet hydrogénoïde et de nous guider vers certains systèmes privilégiés de variables Action-Angle dans le cadre d'une quantification semi-classique \mathcal{BWS} ou autrement dit vers certaines bases privilégiées pour la fonction d'onde dans le cadre d'une description quantique.

iv) Deux grandes familles de variables Action-Angles

Disposant de deux moments cinétiques « fictifs » pour décrire toute une famille de trajectoires de même énergie, il apparaît naturel de choisir comme variables Action-Angles, qu'on pourrait appeler *découplées*, le jeu de variables indépendantes constitué de la longueur totale et de la projection sur un axe particulier, qu'on appellera (Oz) , de ces deux moments cinétiques : J_{1z} , J_{2z} et $\mathbf{J}_1^2 = \mathbf{J}_2^2$. Ce choix d'un axe commun de quantification pour \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 permet de considérer les composantes L_z et A_z , qui sont la demi-somme

5. En effet, le groupe de symétrie dynamique $SO(4)$ permet de comprendre uniquement le lien « géométrique » entre différentes trajectoires de même énergie. Le moment cinétique et le vecteur de Laplace-Runge-Lenz étant des constantes du mouvement, l'énergie donnée par la formule $E = (\frac{1}{2}\mu k^2)/(\mathbf{A}^2 + \mathbf{L}^2)$ en inversant l'équation (I.16) est conservée sous toutes les transformations du groupe $SO(4)$. Les générateurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 ne connectent donc pas de trajectoires d'énergies différentes.

et la demi-différence des variables J_{1z} et J_{2z} . Or, cette grandeur A_z est intimement liée à la séparabilité de l'équation de Hamilton-Jacobi en coordonnées paraboliques [118] et on peut donc dire que le choix de variables découplées conduit naturellement à travailler en coordonnées paraboliques.

D'un autre côté, on peut décider de choisir un jeu de variables couplant les moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 en considérant les variables associées à la longueur et la projection sur un axe particulier - qu'on prendra toujours (Oz) - de la somme de ces moments cinétiques (ainsi que la longueur de ces deux moments cinétiques fixant l'énergie E) : $(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$, $(J_{1z} + J_{2z})$ et $\mathbf{J}_1^2 = \mathbf{J}_2^2$. Cependant, la somme des moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 est justement égale au moment cinétique \mathbf{L} ! Ce choix n'est donc autre que celui des variables \mathbf{L} et L_z , c'est-à-dire celles qui apparaissent *de facto* dans la séparation de l'équation de Hamilton-Jacobi en coordonnées sphériques.

En conclusion, il apparaît que dans le cadre d'un traitement semi-classique de l'atome d'hydrogène, certaines symétries, dynamiques ou non, permettent de former des constantes du mouvement, comme l'énergie E , le moment cinétique \mathbf{L} ou le vecteur de Laplace-Runge-Lenz réduit \mathbf{A} , qui rentrent en jeu de fait dans la séparation des équations de Hamilton-Jacobi stationnaires dans tel ou tel système de coordonnées. Plus précisément, la séparabilité en coordonnées paraboliques est liée à la constante du mouvement qu'est le vecteur de Laplace-Runge-Lenz réduit \mathbf{A} . Cette conservation révèle une symétrie dynamique du problème qui se traduit par l'invariance du hamiltonien sous le groupe $SO(4)$.

Toutes ces considérations sont nées d'une analyse semi-classique du problème de l'atome d'hydrogène et il était important à mes yeux de suivre dans une première étape de ce manuscrit et aussi loin que nécessaire cette approche semi-classique⁶. Il serait possible de procéder à la quantification des générateurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 afin de pousser plus loin le traitement semi-classique de l'atome d'hydrogène. Néanmoins, dans la suite de ce manuscrit, nous basculerons délibérément vers un traitement quantique du problème de l'atome d'hydrogène et retrouverons les objets et les méthodes usuels de la mécanique quantique qui nous sont aujourd'hui finalement plus communs que les équations de Hamilton-Jacobi et la méthode de quantification \mathcal{BWS} .

I.1.2 Modèle quantique de l'atome d'hydrogène isolé

La formulation quantique du problème de l'atome d'hydrogène en termes de vecteur d'état dépendant du temps (point de vue de Schrödinger) revient à résoudre l'équation

6. La Figure I.16 (d) page 69 à la fin de ce premier chapitre tente de refaire un lien avec cette approche semi-classique en rappelant les caractéristiques géométriques des orbites formant par superposition quantique l'état *Chat de Schrödinger* représenté en (c), qui est véritablement une superposition des trajectoires électroniques.

de Schrödinger (non relativiste) [119] décrivant l'évolution temporelle du *ket* $|\psi(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad \text{où} \quad \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad , \quad (\text{I.27})$$

avec, dans le cas de l'atome d'hydrogène :

$$V(\hat{\mathbf{r}}) = V(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad . \quad (\text{I.28})$$

Les solutions stationnaires de cette équation vérifient l'équation de Schrödinger stationnaire aussi appelée *équation aux valeurs propres* :

$$\hat{H} |\psi(t)\rangle = E |\psi(t)\rangle \quad . \quad (\text{I.29})$$

I.1.2.a Base des états sphériques

Outre le fait d'être invariant dans le temps, cet hamiltonien \hat{H} (I.27) est invariant sous toute rotation (potentiel central) :

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = 0 \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} \quad , \quad (\text{I.30})$$

ce qui se voit mieux en faisant apparaître littéralement dans l'expression du hamiltonien l'opérateur moment cinétique, ce qui a pour effet de séparer au sein de cet hamiltonien les parties radiale et angulaire :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r^2} r + \frac{1}{2\mu r^2} \hat{\mathbf{L}}^2 + V(r) \quad . \quad (\text{I.31})$$

Ainsi, \hat{H} commute en particulier avec \hat{L}_z et l'on peut construire un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC) grâce à \hat{H} , $\hat{\mathbf{L}}^2$ et \hat{L}_z . Il est en effet possible de montrer *a posteriori* que cet ensemble est bien complet en montrant que la base propre commune est unique.

Les fonctions propres communes à $\hat{\mathbf{L}}^2$ et \hat{L}_z sont les harmoniques sphériques, ce qui nous conduit naturellement à travailler en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , définies en lien avec les coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

où r représente la distance au centre de la sphère, $\theta \in [0, \pi]$ la colatitude et $\varphi \in [0, 2\pi]$ la longitude.

Ce choix de coordonnées permet de séparer les dépendances radiales et angulaires de la fonction d'onde $\psi_{l,m}(\hat{\mathbf{r}})$:

$$\begin{aligned}\psi_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) &= R_l(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad , \\ \hat{\mathbf{L}}^2 \psi_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) &= l(l+1)\hbar^2 \psi_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad , \\ \hat{\mathbf{L}}_z \psi_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) &= m\hbar \psi_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad .\end{aligned}\tag{I.33}$$

où l et m sont des entiers tels que $|m| \leq l$, appelés respectivement nombre quantique azimutal et nombre quantique magnétique.

L'équation aux valeurs propres (I.29) devient alors par substitution l'équation de Schrödinger radiale :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2(rR_l(r))}{dr^2} + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{k}{r} + E \right) rR_l(r) = 0 \quad ,\tag{I.34}$$

avec

$$\int_0^\infty |R_l(r)|^2 r^2 dr = 1 \quad (\text{normalisation de la fonction d'onde}) \quad .\tag{I.35}$$

Dans cette équation (I.34), on constate que la fonction d'onde radiale, ne dépend effectivement que du nombre quantique azimutal l . La fonction d'onde radiale réduite $rR_l(r)$ obéit à une équation de Schrödinger unidimensionnelle décrivant le mouvement d'une particule de masse μ dans un potentiel effectif, somme du potentiel coulombien $-k/r$ et du potentiel centrifuge proportionnel à $l(l+1)/r^2$.

Ne nous intéressant qu'au spectre lié ($E < 0$), cette équation n'admet de solution de carré sommable et vérifiant les conditions aux limites⁷, que pour certaines valeurs particulières de l'énergie E telles que :

$$E = \frac{\mu(e^2/(4\pi\epsilon_0))^2}{2\hbar^2(n_r + l + 1)^2} \quad ,\tag{I.36}$$

où n_r est un entier positif ou nul, appelé nombre quantique radial correspondant au nombre de nœuds de la fonction d'onde radiale, c'est-à-dire le nombre de fois où elle s'annule entre $r = 0$ et $r = \infty$. Ainsi, pour chaque valeur du nombre quantique azimutal l , il existe une famille d'énergies discrètes possibles, qui peuvent être classées en fonction du nombre quantique radial n_r . Une fonction d'onde radiale est donc définie par deux nombres quantiques l et n_r . Normalisée, cette fonction d'onde radiale est unique pour l et n_r donnés, à un facteur de phase près.

7. c'est-à-dire $R_l(r)$ bornée pour $r \rightarrow 0$ et $R_l(r) \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$.

On constate sans surprise que l'énergie est indépendante du nombre quantique magnétique m , ce qui est une conséquence directe de l'isotropie du problème⁸. Par contre, des états ayant des nombres n_r et l différents peuvent avoir la même énergie, dès lors que $n_r + l$ est constant. Cette dégénérescence parfois désignée à tort comme « accidentelle » est une propriété caractéristique du potentiel coulombien et a été analysée, dans le cadre du modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène, comme une conséquence directe de la structure du groupe $SO(4)$.

Cette dégénérescence est illustrée Figure I.2 pour quelques états les plus liés, *ie* de plus faible nombre quantique radial, et pour trois valeurs consécutives du nombre quantique azimutal l . Sur cette Figure, les potentiels coulombien et centrifuge sont représentés respectivement en pointillé rouge et bleu, et le potentiel effectif résultant en trait plein noir. Pour une valeur de l donnée, les fonctions d'onde radiales solutions de l'équation de

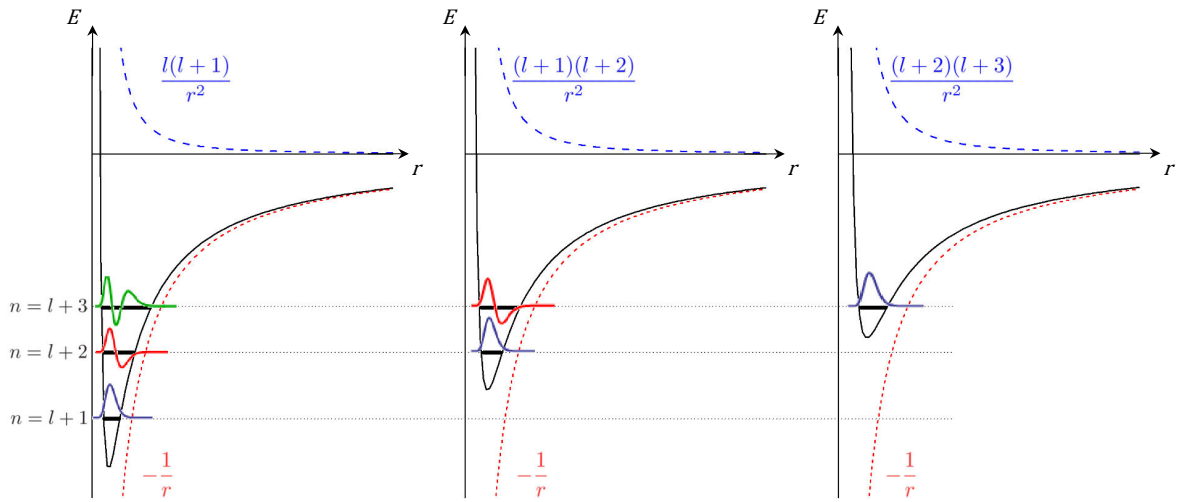


FIGURE I.2 – Illustration de la dégénérescence en l de l'énergie d'un atome d'hydrogène. Lorsque l augmente, la barrière cinétique devient plus grande (pointillé bleu). Le potentiel résultant (trait plein noir) est alors moins profond. Pour les potentiels en $1/r$, le niveau fondamental de moment cinétique $l + 1$ est dégénéré avec le deuxième niveau d'énergie de moment cinétique l . Cette dégénérescence parfois dite « accidentelle » trouve sa justification dans une étude approfondie des invariants du système et du groupe de symétrie $SO(4)$.

Schrödinger unidimensionnelle, associées à une valeur de l'énergie discrète de l'énergie E suivant la formule (I.36), sont dessinées en bleu pour $n_r = 0$, rouge pour $n_r = 1$ et vert pour $n_r = 2$. On constate que les niveaux $n = l + 2$ rouges et bleus sont de même énergie, de même pour les trois niveaux $n = l + 3$ représentés qui sont donc dégénérés.

8. Le choix de l'axe sur lequel est mesurée la projection du moment cinétique (ici (Oz)) est bien arbitraire, tout axe étant complètement équivalent dû à l'invariance par rotation du problème quand l'atome est isolé. Ainsi, la valeur de la projection sur l'axe de quantification n'a pas lieu d'apparaître dans l'expression de l'énergie du système.

L'usage fait que l'on redéfinit traditionnellement l'« étiquetage » des états en fonction d'un nouveau nombre quantique, appelé nombre quantique principal n , tel que :

$$n = n_r + l + 1 \quad , \quad (\text{I.37})$$

qui apparaît en effet directement au dénominateur de la formule (I.36), qui se réécrit alors sous la forme de la formule de Bohr [114] :

$$E = -\frac{E_1}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_1 = \frac{\mu q^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \approx 13,6 \text{ eV} \quad . \quad (\text{I.38})$$

De manière équivalente, une fonction d'onde radiale est donc complètement caractérisée par la donnée des deux nombres quantiques n et l . Ainsi, pour chaque valeur de n donnée, l'état de $l = n - n_r - 1$ maximal est tel que $n_r = 0$, soit aucune annulation de la fonction d'onde radiale. On retrouve donc que $l \leq n - 1$.

Les fonctions d'onde radiales sont analytiquement calculables et s'écrivent sous la forme normalisée [120] :

$$R_{n,l}(r) = \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} e^{r/(na_0)} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{na_0}\right) \quad , \quad (\text{I.39})$$

où $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_e e^2) \approx 0,53 \text{ \AA}$ désigne le rayon de Bohr qui représente l'unité de longueur du problème et où $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont les polynômes de Laguerre généralisés définis par :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha} \right) \quad (\text{I.40})$$

Au-delà de cette expression analytique, on peut donner quelques remarques qualitatives en s'appuyant sur la Figure I.3 représentant la densité de probabilité radiale $r^2 |R_{n,l}(r)|^2$ pour le niveau $51f$ ($n = 51$ et $l = 3$). Le potentiel coulombien est représenté en noir et la ligne horizontale rouge indique l'énergie E_0/n^2 où une droite horizontale intersecte le potentiel coulombien en $r = n^2 a_0$ définissant la région classiquement accessible. La fonction d'onde prend des valeurs notables dans la région classiquement accessible (où la densité électronique radiale présente un grand nombre de nœuds) mais elle est essentiellement localisée loin du cœur atomique. L'atome a donc une « taille » de l'ordre du grand-axe de l'orbite elliptique de Sommerfeld $n^2 a_0$.

La fonction d'onde totale normalisée en coordonnées sphériques dépend finalement de trois nombres quantiques $\{n, l, m\}$ et s'exprime donc en multipliant ces fonctions d'onde radiales $R_{n,l}(r)$ avec les harmoniques sphériques $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$: $\psi_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) = R_l(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$. L'énergie ne dépendant que du nombre quantique principal n , l étant un nombre entier prenant ses valeurs entre 0 et $n - 1$ et m un nombre entier relatif entre $-l$ et $+l$, soit

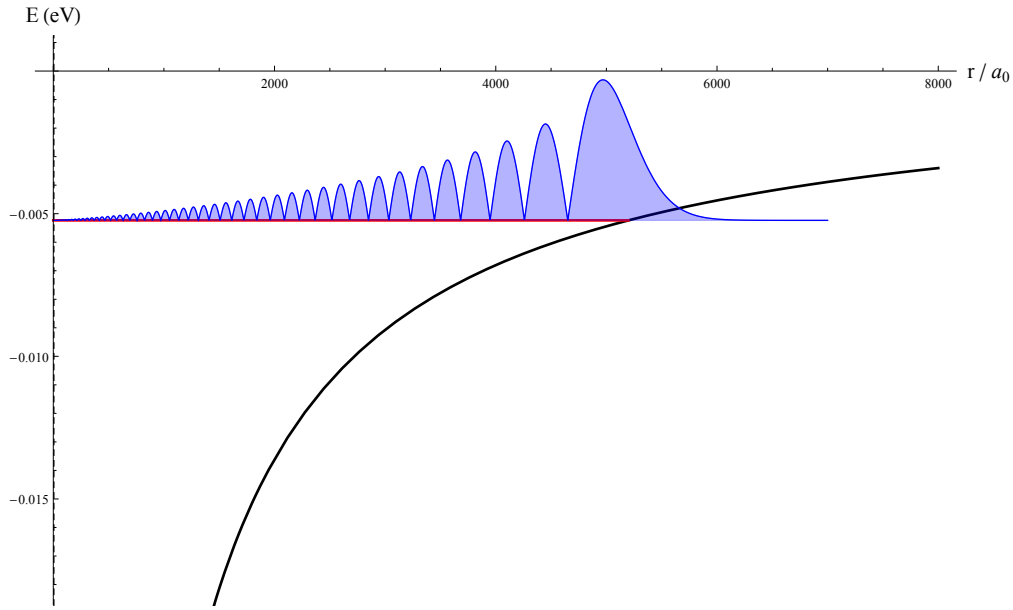


FIGURE I.3 – Fonction radiale du niveau 51f de l'atome d'hydrogène : carré de la fonction d'onde radiale multipliée par r^2 , $r^2|R_{n,l}(r)|^2$, en fonction du rayon adimensionné r/a_0 . Le potentiel coulombien est représenté en noir et la ligne horizontale rouge recouvre la région classiquement accessible.

$2l + 1$ valeurs possibles, on calcule la dégénérescence totale du niveau n comme suit :

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad . \quad (\text{I.41})$$

On représente en Figure I.4 la densité de probabilité de quelques fonctions d'onde, choisies avec l'intention de souligner la grande diversité des états de l'atome d'hydrogène. Le noyau de l'atome d'hydrogène est placé au centre du repère. L'invariance par rotation autour de l'axe vertical (Oz) traduit le fait que la fonction d'onde est fonction propre de l'opérateur L_z . On présente donc aussi une coupe de cette densité de probabilité suivant un plan contenant l'axe (Oz). Pour une énergie donnée ($n = 21$), on observe que plus le système possède de *quanta* de moment cinétique l , plus la fonction d'onde de l'électron se localise loin du noyau, ce qui est assez intuitif. On note aussi que plus le nombre quantique magnétique m tend vers le nombre quantique azimutal l - soit en termes semi-classiques plus le vecteur moment cinétique s'aligne avec l'axe de quantification -, plus la densité de probabilité de la fonction d'onde électronique se confine autour du plan horizontal $z = 0$. Ceci se conçoit bien semi-classiquement en se rappelant que le vecteur moment cinétique \mathbf{L} était orthogonal au plan orbital. La dernière fonction d'onde représente un état de nombres quantiques l et m maximaux, qu'on appelle en raison de la forme torique de la fonction d'onde électronique « état circulaire ». Cet état circulaire est l'équivalent purement quantique de l'atome de Bohr qui ne considérait que les orbites circulaires de l'électron de valence.

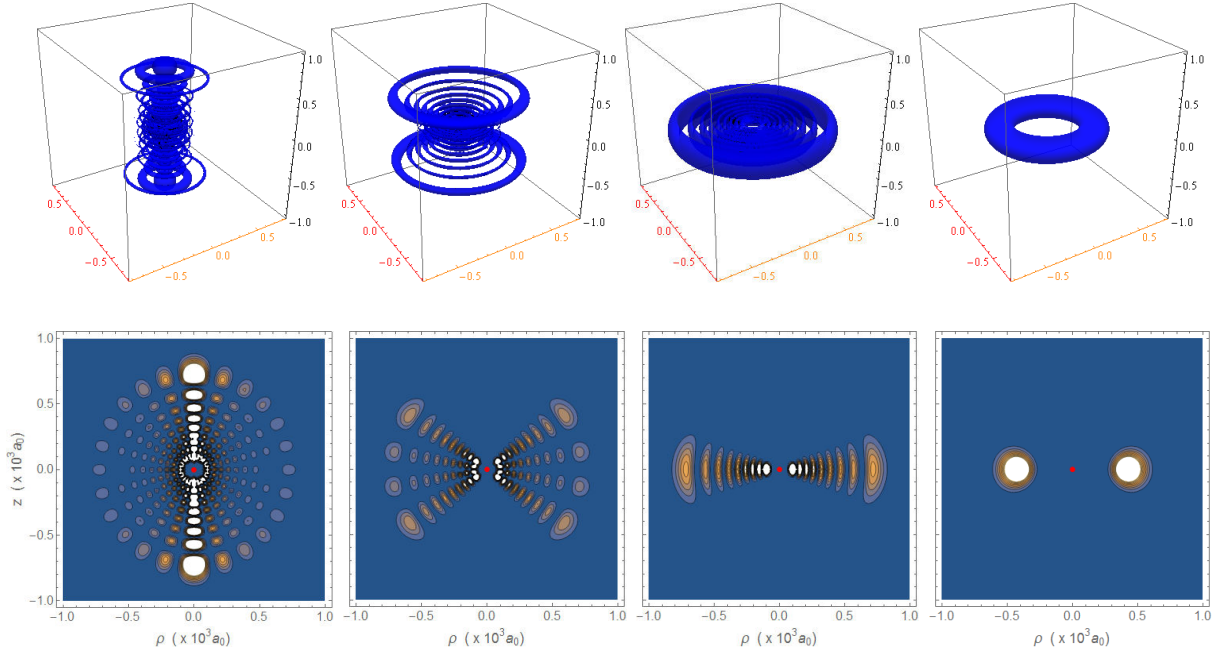


FIGURE I.4 – Densité de probabilité de quelques états sphériques de l'hydrogène : $|n = 21, l = 12, m = 0\rangle$, $|n = 21, l = 12, m = 9\rangle$, $|n = 21, l = 12, m = 12\rangle$ et $|n = 21, l = 20, m = 20\rangle$. Sur la première ligne sont représentées les fonctions d'onde à trois dimensions. L'axe vertical est l'axe de quantification (Oz). L'unité des axes est $10^3 a_0$. Nous avons représenté les surfaces où la densité de probabilité devient supérieure à $1,5 \cdot 10^{-9} a_0^{-3}$. Sur la deuxième ligne est tracée une coupe de cette densité de probabilité suivant un plan contenant l'axe (Oz). La couleur varie de 0 (fond bleu) à $5 \cdot 10^{-9} a_0^{-3}$ (blanc). La variable φ n'intervient qu'à travers un terme de phase $e^{im\varphi}$, la densité de probabilité $|\psi|^2$ est donc invariante avec φ . Les fonctions d'onde à trois dimensions ne reprennent pas exactement tous les motifs de leur projection à cause de l'effet du seuil, choisi pour donner assez de lisibilité.

I.1.2.b Base des états paraboliques

Bien moins courant que le système de coordonnées sphériques, le système de coordonnées paraboliques (ξ, η, φ) est défini en fonction des coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} \xi = r + z \\ \eta = r - z \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}, \quad (\text{I.42})$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ce système de coordonnées est appelé de la sorte car les surfaces $\xi = \text{Cste}$ et $\eta = \text{Cste}$ sont des paraboloides de révolution de foyer O et d'axe (Oz). L'axe (Oz) a donc un rôle privilégié dans ce système de coordonnées, même si, eu égard à l'isotropie du problème, ce choix est arbitraire et équivalent à tout autre choix d'axe de quantification.

Dans ce système de coordonnées, le hamiltonien H se réécrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{4}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] - \frac{2e^2/(4\pi\epsilon_0)}{\xi + \eta} , \quad (\text{I.43})$$

ce qui permet de séparer l'équation de Schrödinger et de chercher des solutions sous la forme d'un vecteur propre de \hat{L}_z :

$$\psi(\xi, \eta, \varphi) = \Phi_1(\xi) \Phi_2(\eta) e^{im\varphi} . \quad (\text{I.44})$$

Par substitution dans l'équation aux valeurs propres, on est conduit à deux équations différentielles linéaires indépendantes vérifiées respectivement par les fonctions Φ_1 et Φ_2 :

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{\mu} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Phi_1}{d\xi} \right) + \left[\frac{E}{2} \xi - \frac{\mu^2 \hbar^2}{4\mu\xi} + Z_1 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] \Phi_1 = 0 \\ \frac{\hbar^2}{\mu} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Phi_2}{d\eta} \right) + \left[\frac{E}{2} \eta - \frac{\mu^2 \hbar^2}{4\mu\eta} + (1 - Z_1) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] \Phi_2 = 0 \end{cases} , \quad (\text{I.45})$$

où Z_1 correspond au paramètre de séparation.

i) États paraboliques : base des états $\{|n, n_1, n_2\rangle\}$

La recherche d'états liés amène à définir deux nouveaux nombres quantiques n_1 et n_2 , deux nombres entiers positifs ou nuls, correspondant respectivement aux nombres de nœuds des fonctions Φ_1 et Φ_2 , de telle sorte qu'il n'existe des solutions à ce système d'équations uniquement pour des valeurs discrètes (ici négatives) de l'énergie, telles que :

$$E = -\frac{E_1}{(n_1 + n_2 + |m| + 1)^2} . \quad (\text{I.46})$$

Par identification avec le spectre lié extrait d'une analyse en coordonnées sphériques, il est possible de relier le nombre quantique principal n et les deux nombres quantiques paraboliques n_1 et n_2 :

$$n = n_1 + n_2 + |m| + 1 . \quad (\text{I.47})$$

La fonction d'onde normalisée s'écrit alors [120] :

$$\psi_{n_1, n_2, m}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{\sqrt{2}}{n^2} \mathcal{F}_{n_1, m} \left(\frac{\xi}{na_0} \right) \mathcal{F}_{n_2, m} \left(\frac{\eta}{na_0} \right) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} , \quad (\text{I.48})$$

avec $\mathcal{F}_{k, m}(x)$ une fonction hypergéométrique confluyente :

$$\mathcal{F}_{k, m}(x) = \sqrt{\frac{k!}{(k + |m|)!}} L_k^{(|m|)}(x) e^{-x/2} x^{|m|/2} . \quad (\text{I.49})$$

L'élimination de l'énergie $E < 0$ dans le système d'équations (I.45) conduit à l'expression de la constante de séparation en fonction des nombres quantique $Z_1 = \left(n_1 + \frac{|m|+1}{2}\right)/n$ et pour le spectre discret à l'équation suivante :

$$\left[\frac{2\hbar^2}{\mu} \left(\frac{\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) - \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)}{\xi + \eta} - \frac{\xi - \eta}{4\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} \right] \psi_{n_1, n_2, m} = \frac{n_2 - n_1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \psi_{n_1, n_2, m} \quad (\text{I.50})$$

où l'on « reconnaît » dans le terme de gauche, après un calcul quelque peu fastidieux, la composante sur l'axe (Oz) de l'opérateur :

$$\hat{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}}) - \mu k \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \quad . \quad (\text{I.51})$$

On a donc :

$$\hat{\mathcal{A}}_z \psi_{n_1, n_2, m}(\hat{\mathbf{r}}) = \mu k \frac{n_2 - n_1}{n} \psi_{n_1, n_2, m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad . \quad (\text{I.52})$$

Cet opérateur n'est rien d'autre que l'opérateur associé au vecteur de Laplace-Runge-Lenz symétrisé, pour que l'opérateur soit hermitien, les opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ ne commutent pas. Dans le cas quantique, on est alors conduit à définir par symétrisation cet opérateur $\hat{\mathcal{A}}$. D'après l'équation (I.50), les états paraboliques sont donc des états propres de l'opérateur $\hat{\mathcal{A}}$ avec pour valeur propre $\mu k (n_2 - n_1)/n$, ainsi que de l'opérateur \hat{L}_z , par construction .

ii) États paraboliques : base des états $\{|j, m_1, m_2\rangle\}$

Par « quantification » des résultats semi-classiques, on s'attend à retrouver la relation de commutation avec l'opérateur moment cinétique suivant :

$$[\hat{L}_i, \hat{\mathcal{A}}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{\mathcal{A}}_k \quad , \quad (\text{I.53})$$

où ϵ_{ijk} désigne le symbole de Levi-Civita. Cette relation se vérifie aisément par le calcul. Néanmoins, avec cette définition, les commutateurs entre composantes de l'opérateur $\hat{\mathcal{A}}$ valent alors :

$$[\hat{\mathcal{A}}_i, \hat{\mathcal{A}}_j] = -2i\hbar \hat{H} \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad , \quad (\text{I.54})$$

c'est-à-dire que l'ensemble des commutateurs n'est pas fermé, ce qui n'est pas si grave, cette grandeur étant constante à l'intérieur d'un niveau d'énergie donné. Il suffit alors de définir, à l'intérieur d'un niveau d'énergie $E < 0$, l'opérateur « réduit », en lettre capitale droite :

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{-2\mu E}} \cdot \hat{\mathcal{A}} \quad \text{où} \quad \hat{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}}) - \mu k \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \quad . \quad (\text{I.55})$$

Les relations de commutation entre composantes de l'opérateur réduit $\hat{\mathbf{A}}$ sont alors :

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad , \quad (\text{I.56})$$

et l'on a toujours :

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad \text{et} \quad [\hat{L}_i, \hat{A}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{A}_k \quad . \quad (\text{I.57})$$

Ces relations de commutation sont caractéristiques de l'algèbre de Lie des rotations dans un espace à 4 dimensions \mathfrak{so}_4 . Bien sûr, les opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{A}}$ définis de la sorte vérifient :

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{A}}] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = 0 \quad . \quad (\text{I.58})$$

Les opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{A}}$ ne commutent pas, il est plus judicieux d'introduire, dans le même esprit que précédemment dans le cas semi-classique, les opérateurs associés aux vecteurs \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 introduits dans le modèle semi-classique. Les composantes de ces deux opérateurs vérifient les relations de commutation d'un moment cinétique et l'on note alors $j_1(j_1 + 1)\hbar^2$ et $j_2(j_2 + 1)\hbar^2$ les valeurs propres des opérateurs $\hat{\mathbf{J}}_1^2$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^2$, avec j_1 et j_2 des nombres entiers ou demi-entiers positifs. Or, au sein d'un niveau d'énergie E , on a :

$$\hat{\mathbf{J}}_1^2 = \hat{\mathbf{J}}_2^2 = -\frac{\mu k^4}{8E} - \frac{\hbar^2}{4} \quad . \quad (\text{I.59})$$

On peut ainsi exprimer le spectre lié en fonction du nombre j_1 ou j_2 :

$$E = \frac{\mu e^4 / 2\hbar^2}{(2j_1 + 1)^2} = \frac{\mu e^4 / 2\hbar^2}{(2j_2 + 1)^2} \quad , \quad (\text{I.60})$$

ce qui permet, par comparaison avec la formule de Bohr, de les relier au nombre quantique principal n :

$$j_1 = j_2 = \frac{n-1}{2} \equiv j \quad . \quad (\text{I.61})$$

Toute solution de l'équation de Schrödinger d'énergie $E = -E_1/n^2$ est donc un état propre de $\hat{\mathbf{J}}_1^2$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^2$ de valeur propre $\frac{1}{4}(n^2 - 1)\hbar^2$ et on peut construire un ECOC grâce aux composantes $\hat{J}_{1,z}$ et $\hat{J}_{2,z}$, qui commutent avec le hamiltonien et sont des constantes du mouvement. Ayant noté $m_1\hbar$ et $m_2\hbar$ les valeurs propres de ces opérateurs, on peut finalement décrire tout état propre par les trois nombres quantiques $\{n, m_1, m_2\}$, la donnée de n fixant les valeurs de j_1 et j_2 par (I.61). Comme pour toute projection d'un moment cinétique, les valeurs propres m_1 et m_2 des opérateurs $\hat{J}_{1,z}/\hbar$ et $\hat{J}_{2,z}/\hbar$ sont des entiers ou demi-entiers tels que $m_1, m_2 = -j, -j+1, \dots, +j$. Par ailleurs, les opérateurs $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$, correspondant à deux moments cinétiques indépendants, commutent et l'on peut donc

factoriser formellement tout état propre de nombre quantique $n = 2j + 1$ fixé :

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \quad , \quad (\text{I.62})$$

ou plus succinctement :

$$|j, m_1, m_2\rangle = |j, m_1\rangle \otimes |j, m_2\rangle \quad ; \quad (\text{I.63})$$

ce qui est une autre écriture de la décomposition du groupe de symétrie $SO(4)$ en un produit tensoriel de deux sous-groupes maximaux $SO(3) \otimes SO(3)$.

Il faut noter que ces états $|j, m_1, m_2\rangle$ sont états propres de $\hat{L}_z = \hat{J}_{1,z} + \hat{J}_{2,z}$ avec pour valeur propre $(m_1 + m_2)\hbar$ et de l'opérateur $\hat{A}_z = \hat{J}_{1,z} - \hat{J}_{2,z}$ avec pour valeur propre $(m_1 - m_2)\hbar$. Ceci fait que la base $\{|j, m_1 - m_2, m_1 + m_2\rangle\}$ est aussi une base admissible associée à l'ECOC $\{\hat{H}, \hat{L}_z, \hat{A}_z\}$ définissant la base parabolique introduite précédemment.

Nous avons présenté au début de ce paragraphe les solutions de l'équation de Schrödinger exprimées en fonction des nombres quantiques paraboliques n_1 et n_2 , formant en cela la base des états propres $\{|n_1, n_2, m\rangle\}$. Nous disposons donc de deux bases de fonctions propres de l'ECOC $\{\hat{H}, \hat{L}_z, \hat{A}_z\}$ qui doivent donc, à un facteur de phase globale près, coïncider. On en déduit par identification le lien entre les états propres $\{|j, m_1, m_2\rangle\}$ et $\{|n_1, n_2, m\rangle\}$:

$$\begin{cases} 2j + 1 = n_1 + n_2 + |m| + 1 = n \\ m_1 + m_2 = m \\ m_1 - m_2 = n_1 - n_2 \end{cases} \quad , \quad (\text{I.64})$$

avec $m_1, m_2 = -j, -j+1, \dots, +j$ et $n_1, n_2 = 0, 1, \dots, n-1$. La base des états $\{|j, m_1, m_2\rangle\}$ constitue donc aussi une base parabolique des plus confortables que l'on utilisera de manière extensive dans la suite de ce manuscrit.

Remarque : Dans ce paragraphe, il faut noter que nous avons en choisissant l'axe de projection (Oz) privilégié un axe de quantification particulier. Si en effet les opérateurs $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ sont associés au groupe $SO(3)$, le sous-groupe des rotations autour de (Oz) engendré par $\hat{J}_{1,z}$ et $\hat{J}_{2,z}$ est lui $SU(2)$. Non-isomorphes, on peut cependant montrer qu'il existe un homomorphisme entre ces deux groupes [121] : $SO(3) \simeq SO(2)/\mathbb{Z}_2$. Dans la terminologie de la théorie des groupes, nous avons donc diagonalisé suivant la chaîne de sous-groupes suivante [120] :

$$SO(4) = SO(3)_{\hat{\mathbf{J}}_1} \otimes SO(3)_{\hat{\mathbf{J}}_2} \supset SU(2)_{\hat{J}_{1,z}} \otimes SU(2)_{\hat{J}_{2,z}} \quad (\text{I.65})$$

Ce sous-groupe $SU(2)_{\hat{J}_{1,z}} \otimes SU(2)_{\hat{J}_{2,z}}$ qui rompt la symétrie sphérique sera bien adapté à la description des états propres de l'atome d'hydrogène en présence d'un champ électrique statique extérieur.

iii) États paraboliques et parité

Si l'on se réfère à la définition du système de coordonnées paraboliques en (I.42), on note que le changement de $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ se traduit par la permutation des coordonnées ξ et η . Les nombres quantiques paraboliques n_1 et n_2 , nés de la séparabilité de l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées paraboliques, étant attachés à ces coordonnées, l'application de l'opérateur parité sur les états paraboliques a pour effet de permuter les deux nombres quantiques paraboliques n_1 et n_2 :

$$\hat{P}\psi_{n_1,n_2,m} = (-1)^m \psi_{n_2,n_1,m} \quad . \quad (\text{I.66})$$

Les états paraboliques, dont l'expression de la fonction d'onde a été donnée en (I.48) et (I.49), n'ont donc pas de parité déterminée, à l'exception du cas où $n_1 = n_2$.

La Figure I.5 représente les densités de probabilité d'un panel représentatif d'états paraboliques. La notation en $|n, n_1, n_2, m\rangle$ sont redondantes, ces quatre nombres quantiques étant reliés par la relation $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$, mais elle permet de mieux appréhender l'influence du nombre quantique m sur la forme de la fonction d'onde, tout en permettant de réfléchir à la parité. En effet, si l'on regarde tout d'abord les trois premières sous-figures : on observe que le deuxième état, $|n, n_1 = 2, n_2 = 2, m = 16\rangle$, fait justement parti des états à parité déterminée ($n_1 = n_2$) ; la symétrie centrale s'observe aisément sur la coupe présentée plus en dessous⁹. Par ailleurs, on passe de l'état parabolique de la première sous-figure à la troisième sous-figure par l'action de l'opérateur parité, qui échange les nombres quantiques paraboliques n_1 et n_2 . On note que ces deux états ne sont plus symétriques par rapport au plan $z = 0$, ce qui constitue une différence par rapport aux états de la base sphérique. Finalement, l'influence non triviale de la variation du nombre quantique m pour n et n_1 constants est illustrée sur la dernière sous-figure.

iv) États paraboliques : dégénérescence

La décomposition des états $|j, m_1, m_2\rangle$ de la base parabolique comme le produit tensoriel des états $|j, m_1\rangle$ et $|j, m_2\rangle$ rend le calcul de la dégénérescence en $n \times n = n^2$ d'un niveau d'énergie lié trivial.

I.1.2.c Relation entre les bases sphériques et paraboliques

Au sein d'une sous-couche d'énergie $E < 0$, ie pour des états de nombre quantique n fixé ou de manière équivalente de nombres $j_1 = j_2 \equiv j$ fixés, on peut donc en synthèse décrire les états sur la base parabolique correspondant à l'ECOC $\{\hat{\mathbf{J}}_1^2 = \hat{\mathbf{J}}_2^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}\}$ ou sur la base sphérique correspondant à l'ECOC $\{\hat{\mathbf{J}}_1^2 = \hat{\mathbf{J}}_2^2, \hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z\}$.

9. Le nombre quantique $m = 16$ étant pair, l'état parabolique de parité $(-1)^m$ est pair.

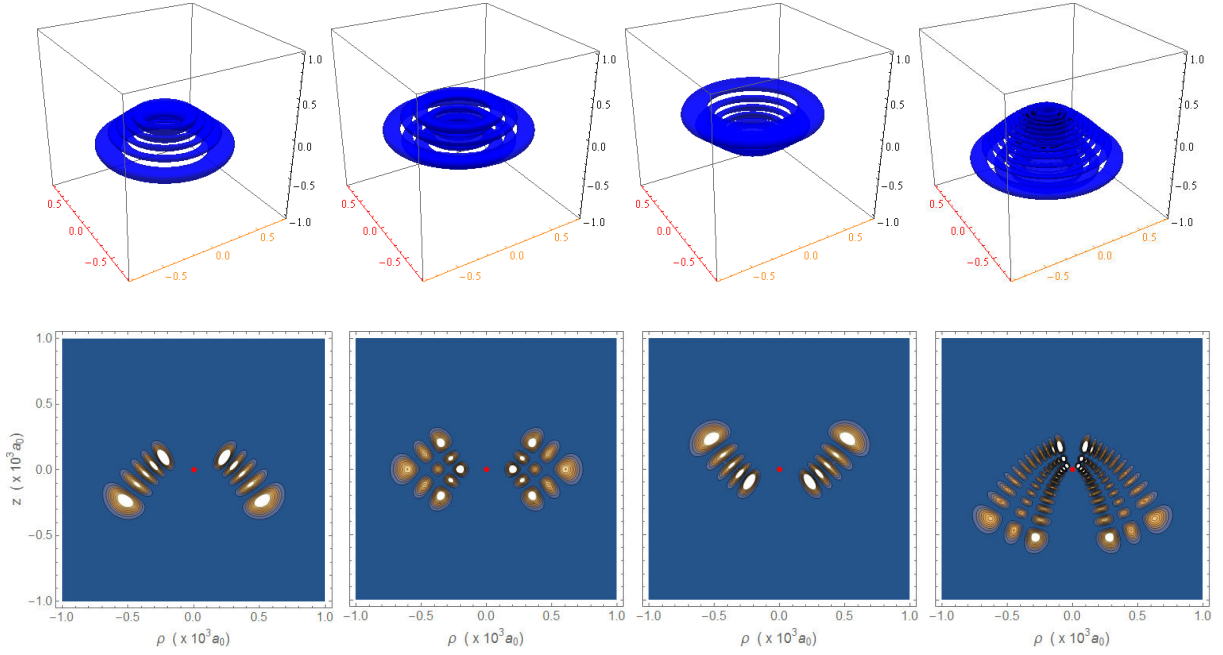


FIGURE I.5 – Densité de probabilité de quelques états paraboliques de l'atome d'hydrogène pour $n = 21$, de gauche à droite $|n, n_1 = 0, n_2 = 4, m = 16\rangle$, $|n, n_1 = 2, n_2 = 2, m = 16\rangle$, $|n, n_1 = 4, n_2 = 0, m = 16\rangle$ et $|n, n_1 = 2, n_2 = 11, m = 7\rangle$. Les notations en $|n, n_1, n_2, m\rangle$ sont redondantes, ces quatre nombres quantiques étant reliés par la relation $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$. Les représentations présentent les mêmes caractéristiques que sur la Figure I.4.

D'une part, on note les états paraboliques $|j, m_1, m_2\rangle$, où le nombre quantique azimutal j est un nombre entier ou demi-entier et les nombres quantiques magnétiques m_1 et m_2 tels que $m_1, m_2 = -j, -j + 1, \dots, +j$. D'autre part, on note les états sphériques $|j, l, m\rangle$, où j , l et m désignent les nombres quantiques azimutaux et magnétique. Comme $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$, par règles d'addition des moments cinétiques, l varie entre $l = j_1 + j_2 = 2j = n - 1$ et $l = j_1 - j_2 = 0$. Et par propriété de projection, $-l \leq m \leq l$.

Finalement, et toujours par règles d'addition des moments cinétiques, les deux bases sont reliées par les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$|j, l, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j j m_1 m_2 | l m \rangle |j, m_1, m_2\rangle \quad , \quad (\text{I.67})$$

et, inversement :

$$|j, m_1, m_2\rangle = \sum_{l, m} \langle j j m_1 m_2 | l m \rangle |j, l, m\rangle \quad , \quad (\text{I.68})$$

avec $-j \leq m_1, m_2 \leq j$.

I.1.2.d Bases alternatives et interprétation géométrique de l'opérateur de Laplace-Runge-Lenz

Comme écrit précédemment, le groupe de rotation $SO(4)$ ne privilégie aucune des quatre dimensions de l'espace et l'on peut alors composer, sur le modèle de la base sphérique, des bases « hybrides » donnant un rôle à la quatrième dimension, faisant ainsi intervenir l'opérateur de Laplace-Runge-Lenz réduit. Les relations de commutation des composantes de $\hat{\mathbf{A}}$ ne sont pas celles d'un moment cinétique :

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad . \quad (\text{I.69})$$

L'on peut cependant trouver trois composantes des opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{A}}$, qui vérifient elles les relations de commutation d'un moment cinétique. En effet, si l'on considère les trois composantes \hat{A}_x , \hat{A}_y et \hat{L}_z , on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{A}_x, \hat{A}_y] = i\hbar \hat{L}_z \\ [\hat{A}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{A}_x \\ [\hat{L}_z, \hat{A}_x] = i\hbar \hat{A}_y \end{array} \right. \quad . \quad (\text{I.70})$$

L'opérateur vectoriel « hybride » $\hat{\chi} = (\hat{A}_x, \hat{A}_y, \hat{L}_z)$ est donc un moment cinétique orbital. Les spectres de $\hat{\chi}^2$ et $\hat{\chi}_z = \hat{L}_z$ sont donc bien connus et les composantes de $\hat{\chi}$ forment alors les générateurs du groupe des rotations dans l'hyperplan de « coordonnées » (excentricité selon (Ox) , excentricité selon (Oy) , projection du moment cinétique sur (Oz)). Ainsi, l'opérateur \hat{A}_x est le générateur d'une rotation transformant \hat{A}_y en \hat{L}_z et \hat{L}_z en $-\hat{A}_y$.

On illustre l'action de \hat{A}_x sur la forme de l'orbite électronique en Figure I.6. Partant d'une orbite circulaire d'excentricité nulle (trait plein noir), l'action de \hat{A}_x est de réduire la projection du moment cinétique \hat{L}_z et d'augmenter simultanément l'excentricité suivant $-\mathbf{e}_y$. Rappelons que $\hat{\mathbf{A}}$ commutant avec le hamiltonien, toutes ces orbites obtenues sous l'effet de l'opérateur \hat{A}_x sont de même énergie, ce qui peut se voir comme la conservation de la longueur du demi-grand axe de l'ellipse¹⁰. Par ailleurs, l'aire totale de l'ellipse décroît sous l'action de \hat{A}_x , ce qui traduit d'après la deuxième loi de Kepler la diminution du moment cinétique, « converti » en excentricité.

Pour clore la discussion sur cette base hybride, on peut exprimer l'opérateur vectoriel $\hat{\chi}$ en fonction des composantes des opérateurs $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ précédemment introduits comme

10. L'équation (I.12) permet d'exprimer la grandeur $1/(2E)$ en fonction de \mathcal{A}^2 et \mathbf{L}^2 , ce qui par identification avec l'expression du demi-grand axe a en (I.10) donne l'expression $a = -k/(2E)$ où $E < 0$.

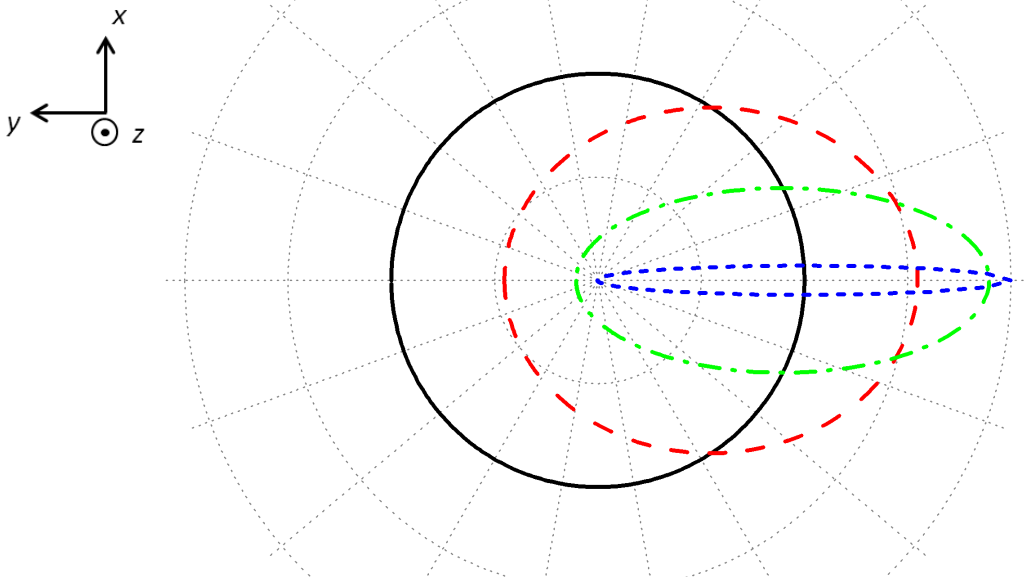


FIGURE I.6 – Illustration de l'action de l'opérateur \hat{A}_x sur la forme des orbites képlériennes. \hat{A} commutant avec le hamiltonien, toutes ces orbites sont de même énergie. Ainsi, la longueur du demi-grand axe $a = -k/(2E)$ où $E < 0$ ne dépendant que de l'énergie, reste ici constante pour toutes les orbites. Les trajectoires sont tracées pour des ellipticités $e = 0$ (trait plein noir), $e = 0,55$ (pointillé rouge), $e = 0,89$ (pointillé vert) et $e = 0,998$ (pointillé bleu). On remarque que l'aire totale décroît à mesure que l'ellipticité croît, ce qui traduit d'après la deuxième loi de Kepler une diminution du moment cinétique.

les demi-sommes et demi-différences des opérateurs $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} -\hat{J}_{1,x} \\ -\hat{J}_{1,y} \\ \hat{J}_{1,z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{J}_{2,x} \\ \hat{J}_{2,y} \\ \hat{J}_{2,z} \end{pmatrix} . \quad (\text{I.71})$$

Le premier vecteur dans l'équation (I.71) n'est autre que le vecteur $\hat{\mathbf{J}}_1$ tourné de π autour de l'axe (Oz) de telle sorte que l'opérateur $\hat{\chi}$ se réécrit finalement :

$$\begin{aligned} \hat{\chi} &= e^{-i\frac{\pi}{\hbar}\hat{J}_{1,z}} \hat{\mathbf{J}}_1 e^{i\frac{\pi}{\hbar}\hat{J}_{1,z}} + \hat{\mathbf{J}}_2 \\ &= e^{-i\frac{\pi}{\hbar}\hat{J}_{1,z}} (\hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2) e^{i\frac{\pi}{\hbar}\hat{J}_{1,z}} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{\hbar}\hat{J}_{1,z}} \hat{\mathbf{L}} e^{i\frac{\pi}{\hbar}\hat{J}_{1,z}} . \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

Les spectres de $\hat{\chi}^2$ et $\hat{\chi}_z$ sont identiques à ceux de $\hat{\mathbf{L}}^2$ et \hat{L}_z et l'on construit ainsi cette nouvelle base « hybride » par action de la rotation $e^{i\frac{\pi}{\hbar}\hat{J}_{1,z}}$ sur la base sphérique. Le point important est que les états propres sont aussi états propres de $\hat{\mathbf{J}}_1^2$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^2$ avec pour valeur propre $j(j+1)$ ce qui est véritablement nouveau et justifie la dénomination de base hybride.

I.1.3 Atome d'hydrogène en champ électrostatique

Les belles propriétés de symétrie de l'atome d'hydrogène en champ nul vont engendrer un comportement bien particulier de cet atome en champ électrostatique. Comme nous le verrons, la dégénérescence en champ nul d'un niveau lié d'énergie donnée, conséquence des propriétés de symétrie de l'atome d'hydrogène, occasionne un effet Stark linéaire lorsqu'un champ électrique statique apparaît. La mise en évidence de symétries en champ nul demeure un élément clé du traitement en champ électrostatique, permettant ainsi un raisonnement en termes de brisure de symétrie.

Historiquement, il est intéressant de noter l'importance, tant théorique qu'expérimentale, de l'étude de l'interaction d'un atome avec un champ statique. Dès la première *Théorie des quanta*, Epstein [122] et Schwartzschild [123] se sont saisis de ce problème et ont montré - simultanément et indépendamment - en 1916 la séparabilité en coordonnées paraboliques de l'équation d'Hamilton-Jacobi. De même, dans le formalisme hamiltonien quantique, l'équation de Schrödinger se sépare en coordonnées paraboliques [31, 120], mais il n'existe à ce jour pas de solution analytique au problème et un traitement perturbatif est alors de rigueur¹¹ si l'on veut comprendre la physique de ce problème en échappant à un traitement purement numérique.

Afin de traiter le problème de l'atome d'hydrogène en champ (faible) extérieur, la méthode canonique est donc de traiter l'effet du champ extérieur perturbativement, par ajout au hamiltonien \hat{H} d'un potentiel perturbatif \hat{W} :

$$\hat{W}(\hat{\mathbf{r}}) = -q\mathbf{F}_{st} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -qF_{st}\hat{z} \quad , \quad (\text{I.73})$$

où \mathbf{F}_{st} correspond au champ électrique statique et uniforme¹², orienté selon l'axe (Oz) positif, qui devient un axe de quantification privilégié.

En mécanique quantique, la théorie des perturbations usuelle, parfois dite de Rayleigh-Schrödinger, s'applique si le potentiel est petit devant l'écart entre niveaux d'énergie ΔE [124, 125] :

$$W \ll \Delta E \quad . \quad (\text{I.74})$$

Ce régime décrit usuellement dans le cas de l'hydrogène le domaine de « inter- l -mixing » [126, 127], où la perturbation ne mélange pas entre elles les différentes multiplicités n , justifiant ainsi la diagonalisation du hamiltonien perturbé à l'intérieur d'une couche n donnée. Cette condition peut s'écrire [128] :

$$F_{st} \ll \frac{E_1}{qa_0n^3} \quad . \quad (\text{I.75})$$

11. Que ce soit en mécanique quantique ou en mécanique classique d'ailleurs.

12. Par confort, l'on suppose que $F_{st} > 0$ et on rappelle que $q = -e < 0$.

Il est intéressant de noter que l'approximation séculaire quasi-classique, où les paramètres de la trajectoire elliptique évoluent lentement devant la période de l'orbite¹³, donne une majoration du champ en $1/n^2$ et est donc moins stricte que la condition quantique. L'origine de cette différence vient de l'inadéquation de la théorie des perturbations usuelles aux états de Rydberg qui sont des états de grand nombre quantique principal. En réalité des méthodes de perturbation plus poussées (voir Chap III. de [120]) montrent qu'effectivement la condition quantique est trop stricte. Quoiqu'il en soit, ces conditions donnent une majoration du champ électrique de plusieurs centaines de V/cm pour $n \sim 50$, qui nous autorise très largement à entreprendre ce calcul perturbatif.

I.1.3.a Éléments de matrice : bases sphérique et parabolique

Le calcul de l'effet Stark nécessite la connaissance des éléments de matrice de \hat{z} entre deux états quelconques. Regardons tout d'abord ces éléments pris dans la base des états sphériques. Par symétrie, $\hat{\mathbf{r}}$ étant un opérateur vectoriel impair, on obtient que pour tout état sphérique $|n, l, m\rangle$:

$$\langle n, l, m | \hat{\mathbf{r}} | n, l, m \rangle = 0 \quad \text{et en particulier} \quad \langle n, l, m | \hat{z} | n, l, m \rangle = 0 \quad . \quad (\text{I.76})$$

Tous les éléments diagonaux de l'opérateur \hat{z} sont donc nuls. En effet, les symétries du problème de l'atome d'hydrogène en champ électrostatique font que $\hat{\mathbf{L}}$ ne commute pas avec le hamiltonien Stark. Les autres éléments de matrice se calculent grâce au théorème de Wigner-Eckart [124]. Ils sont non nuls si $\Delta l = \pm 1$ et $\Delta m = 0$:

$$\langle n, l, m | \hat{z} | n, l-1, m \rangle = -\sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} \times \frac{3}{2} n \sqrt{n^2 - l^2} a_0 \quad . \quad (\text{I.77})$$

Dans la base parabolique, tous les éléments de matrice de \hat{z} ont été calculés par Gordon [129]. La seule règle de sélection qui émerge dans le cas général est $\Delta m = 0$. Ceci fait, qu'à part le cas où $n = n'$, les éléments de matrice sont assez peu usités. Dans ce cas particulier, qui est celui qui nous intéresse pour un développement perturbatif à faible champ électrique extérieur, on obtient [130] :

$$\langle n, n_1, n_2 | \hat{z} | n, n'_1, n'_2 \rangle = \frac{3}{2} n (n_1 - n_2) a_0 \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2} \quad . \quad (\text{I.78})$$

avec toujours $n = n_1 + n_2 + |m| + 1 = n'_1 + n'_2 + |m| + 1$. A l'intérieur d'un niveau de nombre quantique principal n donné, l'opérateur \hat{z} est donc diagonal dans la base parabolique, ce qui fait - effectivement - de ce système de coordonnées une base confortable pour traiter des problèmes d'interaction avec un champ électrique extérieur¹⁴.

13. Soit, dans le formalisme hamiltonien : $W \ll H$.

14. Ce dont l'on pouvait se douter par l'analyse des symétries de la perturbation...

Remarque 1 : L'équation (I.52) peut se réécrire pour l'opérateur réduit à l'intérieur d'une multiplicité n d'énergie $E = -E_1/n^2 < 0$. Ainsi, l'opérateur \hat{z} est proportionnel à \hat{A}_z et est par conséquent aussi diagonal dans la base des états paraboliques (I.78).

Par ailleurs, comme $\hat{A}_z = \hat{J}_{2z} - \hat{J}_{1z}$, on peut réécrire ce résultat en fonction des opérateurs \hat{J}_{1z} et \hat{J}_{2z} et ainsi exprimer la perturbation \hat{W} en fonction de ces deux opérateurs de moment cinétique :

$$\hat{W} = \Omega_S \hat{J}_{2z} - \Omega_S \hat{J}_{1z} \quad \text{avec} \quad \Omega_S = \frac{3}{2} n q \frac{a_0}{\hbar} F_{st} \quad . \quad (\text{I.79})$$

Remarque 2 : La proportionnalité des opérateurs \hat{z} et \hat{A}_z ne dépendant pas de l'axe de quantification choisi, l'isotropie du problème ne privilégiant aucun axe, cette proportionnalité s'étend aux opérateurs vectoriels $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{r}}$. On a alors la relation suivante :

$$\hat{\mathbf{r}} = -\frac{3}{2} n \frac{a_0}{\hbar} \hat{\mathbf{A}} \quad . \quad (\text{I.80})$$

Cette égalité est une extension du théorème de Wigner-Eckart [124], qui établit la proportionnalité de ces deux opérateurs à n et l fixés. Parfois appelée « remplacement de Pauli », l'équation (I.80), qui est l'équivalent quantique de la relation classique (I.11), étend la relation de proportionnalité à tous les niveaux de n donné, quelque soit la valeur de l .

I.1.3.b Champ électrique statique : effet Stark linéaire

Avec les outils développés lors de l'étude semi-classique de l'atome d'hydrogène en champ nul, il est possible de mener une très belle résolution du problème en champ statique. Dans le cadre de l'approximation séculaire, consistant à traiter la perturbation au premier ordre, il est possible de faire apparaître une constante du mouvement approchée appelée « invariant adiabatique » $\langle W \rangle$ qui joue le rôle d'hamiltonien effectif décrivant en particulier les mouvements séculaires de \mathbf{L} et de \mathbf{A} . Si la symétrie sphérique est brisée et donc que le moment cinétique \mathbf{L} n'est plus une constante du mouvement, l'énergie totale, l'invariant adiabatique et la projection du moment cinétique suivant l'axe de la perturbation à symétrie cylindrique (comme c'est le cas ici) forment un jeu de constantes, qui permet une résolution complète du problème. L'écriture des équations séculaires en termes des moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 est salutaire puisqu'elle prouve de manière simple et éclairante que le mouvement séculaire se résume à la précession des deux moments cinétiques autour du champ électrique selon l'axe (Oz), à une pulsation Ω_S mais en sens opposés (Figure I.7) !

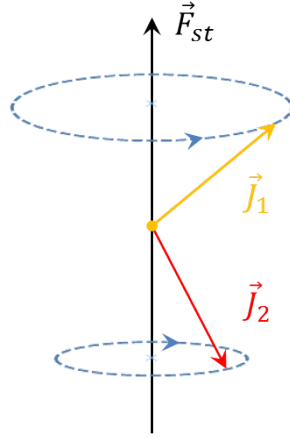


FIGURE I.7 – Précession des moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 en champ électrostatique faible. Les deux moments cinétiques, qui ont la même longueur, précessent à la même pulsation $\Omega_S = \frac{3}{2}nq\frac{a_0}{\hbar} F_{st}$ autour du champ électrique extérieur \mathbf{F}_{st} , mais en sens opposés.

Malgré l'existence de cette belle théorie, dans ce manuscrit, nous n'aurons qu'une vision très « utilitaire » et statique de l'effet Stark, puisque seuls les déplacements en énergie des niveaux, pour un champ électrique statique fixé une fois pour toute, seront exploités. Calculons ainsi au premier ordre les énergies des différents états paraboliques perturbés. Le déplacement au premier ordre d'un niveau d'énergie E_n s'obtient en diagonalisant la restriction du potentiel perturbatif \hat{W} au sous-espace propre correspondant *ie* à la multiplicité n fixée.

Les éléments de matrice de l'opérateur \hat{z} ayant été calculés précédemment en coordonnées paraboliques dans le cas où $n = n'$, on en déduit le déplacement en énergie au premier ordre :

$$W_{(n,n_1,n_2)}^{(1)}(F_{st}) = \langle n, n_1, n_2 | \hat{W} | n, n'_1, n'_2 \rangle = -\frac{3}{2}qa_0F_{st}n(n_1 - n_2) \quad . \quad (\text{I.81})$$

Outre la dépendance en n du déplacement Stark en énergie au premier ordre, on note la dépendance en $n_1 - n_2$, différence qui est parfois désignée comme le « nombre quantique électrique ». A un facteur multiplicatif près, ce nombre quantique électrique est égal à l'excentricité de l'orbite dans la direction \mathbf{e}_z , qui est à l'origine d'un dipôle atomique dans cette direction se couplant - et ce d'autant plus qu'il est grand - au champ électrique statique. Nous avons observé plus haut dans le manuscrit, à la section I.1.2.b iii) page 39, l'effet d'une permutation de ces nombres quantiques n_1 et n_2 sur la densité électronique des états paraboliques : la symétrie par rapport au plan $z = 0$ que cette permutation occasionnait, ou autrement dit le changement de signe de l'excentricité de l'orbite dans cette direction, permute les barycentres des charges positives et négatives. Ceci change le signe du dipôle atomique et provoque *in fine* un déplacement en énergie de signe contraire. Tout cela est consistant. On remarque par ailleurs que l'effet Stark linéaire ne dépend pas du nombre quantique magnétique m , qui n'apparaîtra qu'au second ordre.

Ainsi, l'effet Stark lève (partiellement) la dégénérescence des n^2 niveaux de la multiplicité ; les niveaux de m différents tels que $n_1 - n_2 = \text{Cste}$ subissant le même déplacement Stark linéaire demeurent dégénérés. La Figure I.8 représente la structure des niveaux d'une multiplicité n donnée, classés horizontalement selon leur nombre quantique magnétique m , $-(n-1) \leq m \leq (n-1)$. On observe la belle symétrie de Kramers ($m \leftrightarrow -m$), conséquence de l'invariance par renversement du temps du problème, ainsi que la structure triangulaire des niveaux à $m \geq 0$: le nombre d'états vérifiant l'égalité $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$ diminuant d'une unité à chaque fois que m augmente d'une unité. Le niveau à l'extrême droite, pour lequel les nombres quantiques $n_1 = n_2 = 0$ et donc $m = n - 1 > 0$ est appelé niveau « circulaire » et n'est pas sensible à l'effet Stark linéaire ($n_1 - n_2 = 0$). Cet état circulaire est $(n-1)$ fois dégénéré¹⁵.

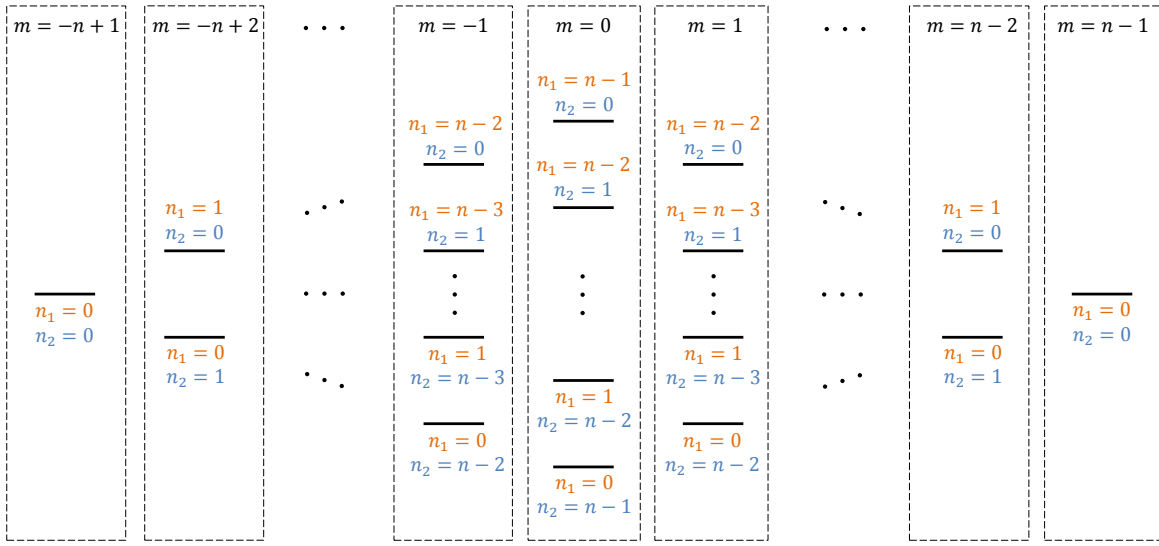


FIGURE I.8 – Structure d'une multiplicité n en champ électrique statique. Les niveaux sont étiquetés suivant leurs nombres quantiques paraboliques $\{n, n_1, n_2, m\}$ et classés horizontalement selon leur nombre quantique magnétique m . Les nombres quantiques paraboliques n_1 et n_2 , qui correspondent aux nombres de nœuds des dépendances en la première et deuxième variable parabolique ξ et η , sont ici vus sous un nouveau jour : ils désignent respectivement le $(n_1 + 1)$ -ième $((n_2 + 1)$ -ième) niveau le moins (le plus) énergétique pour un m donné.

Les niveaux au-dessus de l'état circulaire ont donc leur énergie accrue par effet Stark ($W^{(1)}(F_{st}) > 0$). En effet pour ces niveaux $n_1 > n_2$ et la densité de probabilité électronique est donc plus grande du côté des $z \geq 0$, c'est-à-dire que le dipôle atomique est orienté suivant $-\mathbf{e}_z$ et que le déplacement en énergie par interaction dipolaire $-\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{F}_{st}$ est positif.

15. Il existe un second état circulaire dans cette même multiplicité, situé à l'extrême gauche du « parapluie » Stark tel que $n_1 - n_2 = 0$ et cette fois-ci $m = -n + 1 < 0$.

Nous avons vu que la description du problème de l'atome d'hydrogène grâce aux opérateurs moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ commutant l'un avec l'autre permettait de factoriser les états propres paraboliques, que l'on peut écrire formellement comme suit :

$$|n, m_1, m_2\rangle = |n, m_1\rangle \otimes |n, m_2\rangle \quad , \quad (\text{I.82})$$

où m_1 et m_2 sont les projections de ces moments cinétiques sur l'axe de quantification (à un facteur \hbar près). Comme on l'a dit, si la symétrie sphérique est brisée en champ statique non nul, la symétrie cylindrique demeure et les nombres m_1 et m_2 persistent à décrire pertinemment les états propres, *ie* sont autrement dit encore de « bons nombres quantiques ». D'après le système (I.64) reliant les deux jeux de nombres quantiques paraboliques, on peut réécrire le déplacement Stark du premier ordre en fonction m_1 et m_2 :

$$W_{(n,m_1,m_2)}^{(1)}(F_{st}) = -\frac{3}{2}qa_0F_{st}n(m_1 - m_2) \quad . \quad (\text{I.83})$$

Sur la Figure I.9 est de nouveau représentée la structure d'une multiplicité n donnée en présence d'un champ électrique statique; les états sont cette fois étiquetés par les nombres quantiques m_1 et m_2 . Cette utilisation des nombres quantiques m_1 et m_2 associés aux opérateurs $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ a pour vertu de faire apparaître clairement certaines échelles de niveaux équidistants, comme l'ensemble des niveaux $m_1 = j$ (représentés en jaune) ou des niveaux $m_2 = j$ (représentés en rouge).

Si l'on considère ces sous-espaces d'états, entourés en pointillé sur la Figure I.9, on observe que les états de ces deux diagonales sont décrits *in fine* par un seul nombre quantique magnétique (l'autre étant constant) prenant des valeurs entières ou demi-entières entre $-j$ et j , correspondant à l'échelle finie des niveaux quantifiés d'un moment cinétique. Le prochain paragraphe va renforcer cette analogie structurelle en montrant que la dynamique de l'état d'un atome de Rydberg dans une multiplicité n donnée, couplé à un champ radiofréquence résonant avec la fréquence de la transition en deux niveaux Stark voisins, est analogue à celle d'un moment cinétique dans un champ magnétique transverse oscillant.

I.1.4 Atome d'hydrogène dans un champ électrostatique soumis à un rayonnement radiofréquence

Nous avons au paragraphe précédent établi la structure des niveaux d'énergie d'une multiplicité en présence d'un champ électrique statique qui vient lever la dégénérescence au premier ordre des n^2 niveaux en champ nul. L'utilisation de la base parabolique découplée associée aux opérateurs moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ permet de révéler au sein de la

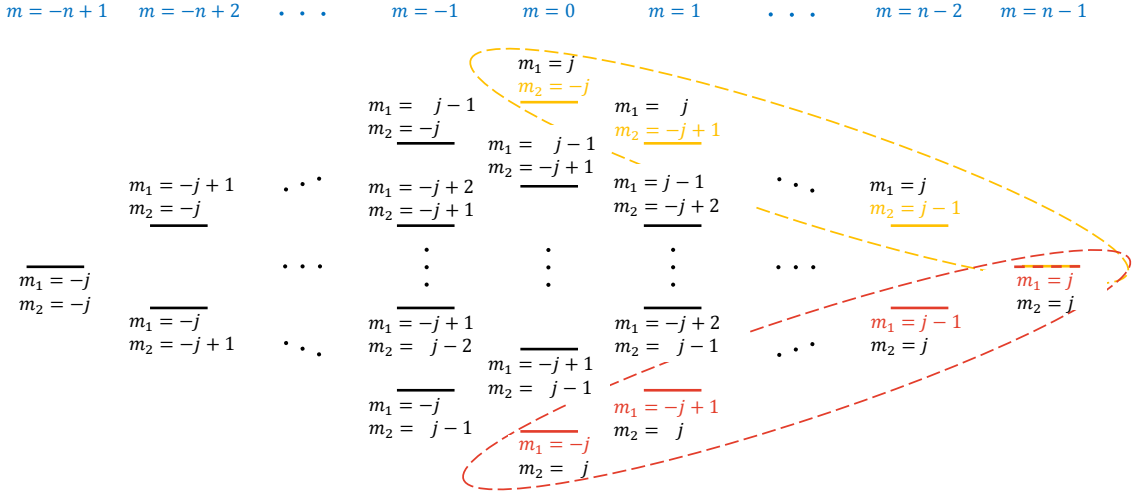


FIGURE I.9 – Structure d'une multiplicité n en champ électrique statique. Les niveaux sont étiquetés suivant leurs nombres quantiques paraboliques $\{j, m_1, m_2, m\}$ et classés comme pour la Figure I.8 précédente horizontalement selon leur nombre quantique magnétique m . Les niveaux du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ pour $m_2 = j_2 = j$ sont représentés en rouge et les niveaux du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$ pour $m_1 = j_1 = j$ en jaune. L'excitation laser des états de Rydberg permet de préparer un état parabolique de faible moment cinétique orbital ($m > 0$), puis les atomes sont amenés par passage adiabatique dans l'état de Rydberg circulaire représentés en rouge et jaune pour lequel $m_1 = m_2 = j$.

multiplicité des échelles harmoniques de niveaux. Les niveaux d'une telle « échelle de spin » sont équidistants et sont séparés par l'effet Stark linéaire. A champ électrique statique non nul fixé, nous étudions dans ce paragraphe l'effet du couplage d'un atome à un champ oscillant résonant avec la fréquence de la transition en deux niveaux Stark voisins, et donc avec l'ensemble des transitions élémentaires de l'échelle harmonique. Pour $n \sim 50$ et des champs électriques de quelques V/cm, la fréquence entre deux niveaux Stark voisins appartient au domaine radiofréquence.

I.1.4.a Hamiltonien de couplage

La présence d'un champ radiofréquence se formalise par l'ajout au hamiltonien $\hat{H} + \hat{W}$ d'un potentiel supplémentaire, très proche du potentiel \hat{W} à la différence près que le champ électrique, de direction arbitraire pour le moment, est ici variable dans le temps :

$$\hat{V}_{RF}(\hat{\mathbf{r}}, t) = -q \mathbf{E}_{RF}(t) \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad . \quad (\text{I.84})$$

Le calcul des éléments de matrice dans la base parabolique de l'opérateur \hat{z} , effectué par Gordon [129] a fait apparaître une unique règle de sélection :

$$\Delta m = \Delta(m_1 + m_2) = 0 \quad , \quad (\text{I.85})$$

ce qui permet donc de connecter des états d'une même colonne dans la représentation des états Figure I.9. Afin de coupler deux à deux les états des échelles harmoniques entourées en rouge ou jaune Figure I.9, il convient donc de considérer un champ oscillant orthogonal à l'axe de quantification. Dans ce plan $z = 0$, l'axe de quantification étant suivant $+\mathbf{e}_z$, on peut décomposer le champ radiofréquence dans la base de polarisation $\{\sigma_+, \sigma_-\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{RF}(t) &= \frac{F_{RF}^{\sigma_+}}{\sqrt{2}} [\cos(\omega_{RF}t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega_{RF}t)\mathbf{e}_y] + \frac{F_{RF}^{\sigma_-}}{\sqrt{2}} [\cos(\omega_{RF}t)\mathbf{e}_x - \sin(\omega_{RF}t)\mathbf{e}_y] \\ &= \left[\frac{F_{RF}^{\sigma_+}}{2\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \right] e^{-i\omega_{RF}t} + \left[\frac{F_{RF}^{\sigma_-}}{2\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \right] e^{-i\omega_{RF}t} + c.c. \quad , \end{aligned} \quad (\text{I.86})$$

où $c.c.$ désigne le complexe conjugué des termes qui précèdent. L'interaction du dipôle atomique avec le champ oscillant $\mathbf{F}_{RF}(t)$ prend alors la forme suivante :

$$\hat{V}_{RF}(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\frac{q}{2\sqrt{2}} \left[F_{RF}^{\sigma_+} e^{-i\omega_{RF}t} (\hat{x} + i\hat{y}) + F_{RF}^{\sigma_-} e^{-i\omega_{RF}t} (\hat{x} - i\hat{y}) \right] + h.c. \quad , \quad (\text{I.87})$$

où $h.c.$ désigne l'hermitique conjugué des termes qui précèdent. Les seuls éléments de matrice non nuls de $\hat{x} - i\hat{y}$ et $\hat{x} + i\hat{y}$ sont tels que $\Delta m = \pm 1$ et valent [131] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle n, m_1, m_2 | \hat{x} - i\hat{y} | n, m_1 + 1, m_2 \rangle = \frac{3}{2} n a_0 \sqrt{(n - 2m_1 - 1)(n + 2m_1 + 1)} \\ \langle n, m_1, m_2 | \hat{x} - i\hat{y} | n, m_1, m_2 + 1 \rangle = -\frac{3}{2} n a_0 \sqrt{(n - 2m_2 - 1)(n + 2m_2 + 1)} \\ \langle n, m_1 + 1, m_2 | \hat{x} + i\hat{y} | n, m_1, m_2 \rangle = \frac{3}{2} n a_0 \sqrt{(n + 2m_1 + 1)(n - 2m_1 - 1)} \\ \langle n, m_1, m_2 + 1 | \hat{x} + i\hat{y} | n, m_1, m_2 \rangle = -\frac{3}{2} n a_0 \sqrt{(n + 2m_2 + 1)(n - 2m_2 - 1)} \end{array} \right. \quad (\text{I.88})$$

L'opérateur $\hat{x} + i\hat{y}$ couple donc l'état $|n, m_1, m_2\rangle$ aux deux états $|n, m_1 + 1, m_2\rangle$ et $|n, m_1, m_2 + 1\rangle$ par des transitions $\Delta m = +1$ l'une étant montante en énergie, l'autre descendante. On analyse de même l'action de l'opérateur $\hat{x} - i\hat{y}$ sur des transitions cette fois-ci $\Delta m = -1$. L'action de ces deux opérateurs est résumée schématiquement sur la Figure I.10.

Or comme bien souvent à partir d'un opérateur moment cinétique, on aime à construire des opérateurs dits « d'échelle »¹⁶ et l'on est alors conduit à construire à partir des com-

16. Attention : En définissant les opérateurs d'échelle, nous changeons d'algèbre ! \hat{J}_1^{\pm} et \hat{J}_1^{\pm} génèrent une algèbre isomorphe à $c * \mathfrak{so}_3$, qui est la complexification de \mathfrak{so}_3 ; de même pour \hat{J}_2^{\pm} et \hat{J}_2^{\pm} . Mais comme $c * \mathfrak{so}_4$ demeure la somme directe de ces deux algèbres, la description du système en termes de deux moments cinétiques perdure et reste pertinente.

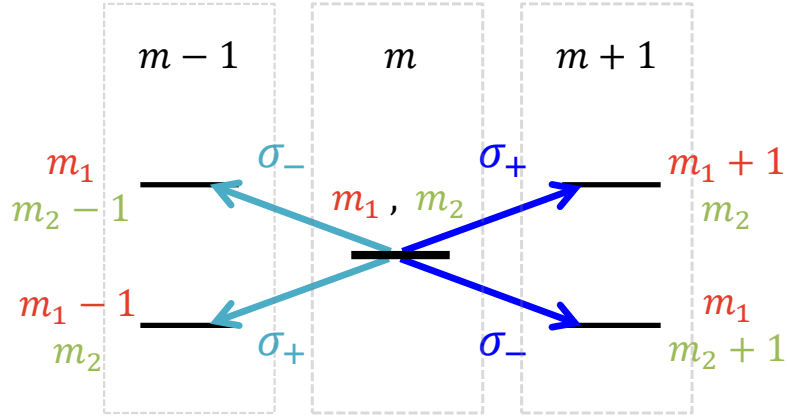


FIGURE I.10 – Action des opérateurs $\hat{x} \pm i\hat{y}$ sur les transitions $\Delta m = \pm 1$. L'opérateur $\hat{x} + i\hat{y}$ (flèches bleues roi) couple un état de m donné avec deux états $m + 1$ alors que l'opérateur $\hat{x} - i\hat{y}$ (flèches bleues gris) couple ce même état avec deux états $m - 1$. Les trois états le long de la diagonale montante (respectivement descendante) sont connectés par des transitions σ_+ (σ_-).

posantes des opérateurs moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ les opérateurs d'échelle suivant :

$$\begin{cases} \hat{J}_1^\pm = \hat{J}_{1x} \pm i\hat{J}_{1y} \\ \hat{J}_2^\pm = \hat{J}_{2x} \pm i\hat{J}_{2y} \end{cases}, \quad (\text{I.89})$$

et l'on peut ainsi construire la base parabolique découplée $|j, m_1, m_2\rangle$ par actions successives de ces opérateurs :

$$\begin{cases} \hat{J}_1^\pm |j, m_1, m_2\rangle = \sqrt{j(j+1) - m_1(m_1 \pm 1)} \hbar |j, m_1 \pm 1, m_2\rangle \\ \hat{J}_2^\pm |j, m_1, m_2\rangle = \sqrt{j(j+1) - m_2(m_2 \pm 1)} \hbar |j, m_1, m_2 \pm 1\rangle \end{cases}. \quad (\text{I.90})$$

Or si l'on travaille un peu sur le terme sous la racine carrée dans (I.90), on obtient pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{j(j+1) - m_i(m_i \pm 1)} &= \sqrt{(j \mp m_i)(j \pm m_i + 1)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{n-1}{2} \mp m_i\right)\left(\frac{n-1}{2} \pm m_i + 1\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(n \mp 2m_i - 1)(n \pm 2m_i + 1)} \end{aligned} \quad (\text{I.91})$$

ce qui n'est rien d'autre, à un facteur multiplicatif près, que les éléments de matrice de $\hat{x} \pm i\hat{y}$. Dans le même esprit que la décomposition de l'état $|j, m_1, m_2\rangle$ en un produit tensoriel des états $|j, m_1\rangle$ et $|j, m_2\rangle$, on peut ainsi écrire :

$$\hat{x} \pm i\hat{y} = \frac{3na_0}{\hbar} [\hat{J}_1^\pm \otimes \mathbb{1}_2 - \mathbb{1}_1 \otimes \hat{J}_2^\pm] \quad (\text{I.92})$$

En conséquence, le hamiltonien d'interaction avec le champ radiofréquence de polarisation σ_+ s'écrit :

$$\hat{V}_{RF}^{\sigma_+}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathcal{V}^{\sigma_+} \left[\left(\hat{J}_1^+ \otimes \mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_1 \otimes \hat{J}_2^+ \right) e^{-i\omega_{RF}t} + \left(\hat{J}_1^- \otimes \mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_1 \otimes \hat{J}_2^- \right) e^{-i\omega_{RF}t} \right] , \quad (\text{I.93})$$

où

$$\mathcal{V}^{\sigma_+} = -\frac{3}{2} q n \frac{a_0}{\hbar} \frac{F_{RF}^{\sigma_+}}{\sqrt{2}} . \quad (\text{I.94})$$

L'action de l'opérateur \hat{J}_1^\pm est de faire « monter ou descendre d'un échelon », c'est-à-dire qu'il engendre un déplacement en énergie d'une quantité $\pm \hbar \omega_a = \mp \frac{3}{2} q n a_0 F_{st}$, correspondant au déplacement Stark élémentaire absolu ($n_1 - n_2 = m_1 - m_2 = \pm 1$). Le premier terme de la somme (faisant intervenir \hat{J}_1^+) décrit un processus où l'atome monte d'un « échelon » en absorbant un photon radiofréquence. Le troisième terme de la somme (faisant intervenir \hat{J}_1^-) décrit lui un processus où l'atome descend d'un « échelon » en émettant un photon radiofréquence. Ces processus sont résonants au voisinage de $\omega = \omega_a$ et priment devant les processus antirésonants associés aux deux autres termes de la somme (l'atome monte d'un échelon en émettant un photon radiofréquence ou descend d'un échelon en absorbant un photon radiofréquence). Nous négligerons donc dans la suite de ce manuscrit ces termes non résonants et cette approximation appelée du « champ tournant » nous permet d'aboutir à une forme simplifiée pour le hamiltonien de couplage associé à la composante σ_+ du champ radiofréquence $\hat{V}_{RF}^{\sigma_+}(\hat{\mathbf{r}}, t)$:

$$\hat{V}_{RF}^{\sigma_+}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathcal{V}^{\sigma_+} \times \left[\left(\hat{J}_1^+ \otimes \mathbf{1}_2 \right) e^{-i\omega_{RF}t} + \left(\hat{J}_1^- \otimes \mathbf{1}_2 \right) e^{+i\omega_{RF}t} \right] . \quad (\text{I.95})$$

Par des raisonnements similaires, l'étude de la composante σ_- du champ radiofréquence permet d'écrire le hamiltonien de couplage associé à la composante σ_- du champ radiofréquence $\hat{V}_{RF}^{\sigma_-}(\hat{\mathbf{r}}, t)$:

$$\hat{V}_{RF}^{\sigma_-}(\hat{\mathbf{r}}, t) = -\mathcal{V}^{\sigma_-} \times \left[\left(\mathbf{1}_1 \otimes \hat{J}_2^- \right) e^{-i\omega_{RF}t} + \left(\mathbf{1}_1 \otimes \hat{J}_2^+ \right) e^{+i\omega_{RF}t} \right] , \quad (\text{I.96})$$

avec

$$\mathcal{V}^{\sigma_-} = -\frac{3}{2} q n \frac{a_0}{\hbar} \frac{F_{RF}^{\sigma_-}}{\sqrt{2}} . \quad (\text{I.97})$$

La composante σ_+ de la polarisation du rayonnement radiofréquence est liée aux opérateurs d'échelle \hat{J}_1^+ et \hat{J}_1^- . L'action de l'opérateur $\hat{V}_{RF}^{\sigma_+}$ sur l'état atomique laisse donc inchangé le nombre quantique m_2 . La composante σ_- , elle, est liée aux opérateurs d'échelle \hat{J}_2^+ et \hat{J}_2^- et l'action de l'opérateur $\hat{V}_{RF}^{\sigma_-}$ sur l'état atomique laisse alors inchangé le nombre quantique m_1 .

En présence d'un champ électrostatique faible et au sein d'une multiplicité n donnée, le hamiltonien du système peut donc se séparer en deux parties indépendantes faisant intervenir les opérateurs moments cinétiques découplés $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$. On écrira que le hamiltonien \hat{H} se scinde comme suit :

$$\hat{H} = \hat{H}^+ + \hat{H}^- \quad , \quad (\text{I.98})$$

où \hat{H}^+ et \hat{H}^- sont donc, comme on l'a vu précédemment, respectivement associés aux composantes de polarisation σ_+ et σ_- du champ radiofréquence. Les considérations de symétrie au sujet du groupe $SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$ perdurant, il est toujours pertinent de considérer la décomposition d'un état $|j, m_1, m_2\rangle$ comme le produit tensoriel $|j, m_1\rangle \otimes |j, m_2\rangle$. Ainsi, partant d'un état produit initial $|\psi^0\rangle = |\psi_1^0\rangle \otimes |\psi_2^0\rangle$ l'évolution du système est alors décrite par le vecteur $|\psi(t)\rangle$ tel que :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}_{\hat{H}}(t)|\psi^0\rangle \quad (\text{I.99})$$

$$= \hat{U}_{\hat{H}^+}(t)|\psi_1^0\rangle \otimes \hat{U}_{\hat{H}^-}(t)|\psi_2^0\rangle \quad . \quad (\text{I.100})$$

Il suffit donc de s'intéresser à la dynamique induite par \hat{H}_+ ou \hat{H}_- individuellement, associée à l'une ou l'autre composante en polarisation du champ radiofréquence respectivement dans la base des états $\{|j, m_1\rangle\}$ ou $\{|j, m_2\rangle\}$, $m_1, m_2 = -j, -j+1, \dots, +j$ où $j = (n-1)/2$ est un entier ou demi-entier.

Considérons donc tout d'abord la composante σ_+ du champ radiofréquence. Si l'on se réfère à la Figure I.9 page 49, on voit que l'espace des états atomiques accessibles par couplage avec la composante σ_+ de la polarisation du rayonnement radiofréquence prend la forme de diagonales d'états au sein d'une multiplicité, figuration d'échelles harmoniques de spin. Le spectre du hamiltonien atomique en champ statique extérieur $\hat{H}_0 = \hat{H} + \hat{W}$ est donc une échelle harmonique finie de niveaux équidistants séparés par l'effet Stark linéaire $\hbar\omega_a = -\frac{3}{2}qna_0F_{st}$. En effet, dans la base découplée $\{|j, m_1\rangle\}$, le hamiltonien \hat{H}_0 s'écrit sous la forme :

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} j\hbar\omega_a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (j-1)\hbar\omega_a & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(j-1)\hbar\omega_a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -j\hbar\omega_a \end{pmatrix} \quad (\text{I.101})$$

où l'origine des énergies étant celle du niveau médian $|j, m_1 = 0\rangle$ dans le cas où n est impair et indifféremment l'état $|j, m_1 = -1/2\rangle$ dans le cas pair¹⁷.

17. L'exponentiation d'une algèbre ne conduit pas à un unique groupe [131]. Ainsi l'algèbre \mathfrak{so}_3 est associée aux sous-groupes $SO(3)$ et $SU(2)$ qui se distinguent comme c'est le cas ici par la parité de

On a alors pour le hamiltonien total :

$$\hat{H}_0 + \hat{V}_{RF}^{\sigma+}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \begin{pmatrix} j\hbar\omega_a & \mathcal{V}_{j-1}^{\sigma+}e^{-i\omega_{RF}t} & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{V}_{j-1}^{\sigma+}e^{+i\omega_{RF}t} & (j-1)\hbar\omega_a & \mathcal{V}_{j-2}^{\sigma+}e^{+i\omega_{RF}t} & & \vdots \\ 0 & \mathcal{V}_{j-2}^{\sigma+}e^{+i\omega_{RF}t} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(j-1)\hbar\omega_a & \mathcal{V}_{-j}^{\sigma+}e^{-i\omega_{RF}t} \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{V}_{-j}^{\sigma+}e^{+i\omega_{RF}t} & -j\hbar\omega_a \end{pmatrix}$$

où, en se référant aux valeurs propres des opérateurs d'échelle \hat{J}_1^+ et \hat{J}_1^- en (I.90) :

$$\mathcal{V}_{m_1}^{\sigma+} = \sqrt{j(j+1) - m_1(m_1+1)} \times \hbar \mathcal{V}^{\sigma+} \quad (\text{I.102})$$

$$= -\frac{3}{2}qna_0\sqrt{j(j+1) - m_1(m_1+1)} \frac{F_{RF}^{\sigma+}}{\sqrt{2}} \quad , \quad (\text{I.103})$$

qui a bien la dimension d'une énergie.

Le passage dans le référentiel tournant à la fréquence $\omega_{RF}/(2\pi)$ du champ radiofréquence permet de réécrire ce hamiltonien total sous la forme effective suivante, désormais indépendante du temps :

$$\hat{H}_{\text{eff}}^+ = \begin{pmatrix} j\hbar\delta & \mathcal{V}_{j-1}^{\sigma+} & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{V}_{j-1}^{\sigma+} & (j-1)\hbar\delta & \mathcal{V}_{j-2}^{\sigma+} & & \vdots \\ 0 & \mathcal{V}_{j-2}^{\sigma+} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(j-1)\hbar\delta & \mathcal{V}_{-j}^{\sigma+} \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{V}_{-j}^{\sigma+} & -j\hbar\delta \end{pmatrix} \quad (\text{I.104})$$

où $\delta = \omega_a - \omega_{RF}$ représente le désaccord en pulsation entre l'atome et le champ radiofréquence. Après passage dans le référentiel tournant, le hamiltonien (non dépendant du temps) couple donc les états habillés $|j, m_1 = -j, m_2, N_{RF}\rangle, |j, m_1 = -j+1, m_2, N_{RF}-1\rangle, \dots, |j, m_1 = +j, m_2, N_{RF}-(2j+1)\rangle$ où N_{RF} désigne le nombre de photons radiofréquences de fréquence $\hbar\omega_{RF}$. En définitive, le hamiltonien \hat{H}_{eff}^+ associé à la composante σ_+ du champ radiofréquence peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{H}_{\text{eff}}^+ = \delta \hat{J}_{1,z} + \mathcal{V}^{\sigma+} (\hat{J}_1^+ + \hat{J}_1^-) \quad (\text{I.105})$$

$$= \delta \hat{J}_{1,z} + 2\mathcal{V}^{\sigma+} \hat{J}_{1,x} \quad , \quad (\text{I.106})$$

dimension des représentations irréductibles de l'algèbre.

ce qui s'interprète bien comme le générateur d'une rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ à une pulsation $\Omega^{\sigma+} = \sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma+})^2 + \delta^2}$ avec :

$$\Omega_{RF}^{\sigma+} = 2\mathcal{V}^{\sigma+} = 3q n \frac{a_0}{\hbar} F_{RF}^{\sigma+} \quad . \quad (\text{I.107})$$

En ces termes, les éléments de couplage se réécrivent simplement :

$$\mathcal{V}_{m_1}^{\sigma+} = \frac{\hbar \Omega_{RF}^{\sigma+}}{2} \sqrt{j(j+1) - m_1(m_1+1)} \quad (\text{I.108})$$

$$= \frac{\hbar \Omega_{RF}^{\sigma+}}{2} \sqrt{(j-m_1)(j+m_1+1)} \quad . \quad (\text{I.109})$$

De même, le hamiltonien \hat{H}_{eff}^- associé à la composante σ_- du champ radiofréquence peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{H}_{\text{eff}}^- = \delta \hat{J}_{2,z} + \Omega_{RF}^{\sigma-} \hat{J}_{2,x} \quad , \quad (\text{I.110})$$

qui s'interprète cette fois-ci comme le générateur d'une rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$ à une pulsation $\Omega^{\sigma-} = \sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma-})^2 + \delta^2}$ avec :

$$\Omega_{RF}^{\sigma-} = 3q n \frac{a_0}{\hbar} F_{RF}^{\sigma-} \quad . \quad (\text{I.111})$$

ce qui s'interprète cette fois-ci comme une rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$.

Finalement, le hamiltonien effectif total dans le référentiel tournant à la fréquence de la radiofréquence s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}} &= \delta \hat{J}_{1,z} + \Omega_{RF}^{\sigma+} \hat{J}_{1,x} + \delta \hat{J}_{2,z} + \Omega_{RF}^{\sigma-} \hat{J}_{2,x} \\ &= \delta \hat{L}_z + \Omega_{RF}^{\sigma+} \hat{J}_{1,x} + \Omega_{RF}^{\sigma-} \hat{J}_{2,x} \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.112})$$

Dans cette approche complètement linéaire, on observe donc que la polarisation σ_+ de champ radiofréquence se couple au moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ et la composante σ_- au moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$. Il est donc possible d'adresser spécifiquement un des deux moments cinétiques en jouant sur la polarisation du champ radiofréquence oscillant dans le plan $z = 0$ orthogonal à l'axe de quantification.

I.1.4.b Polarisation du rayonnement radiofréquence

Un temps considérable a été accordé dans nos expériences au réglage précis de la polarisation de ce champ radiofréquence, qui peut être considérée dans une bonne approxima-

tion comme purement σ_+ . Dans la suite, nous nous intéresserons donc au couplage d'un atome à un champ purement σ_+ . Partant par ailleurs du niveau de Rydberg circulaire ($m_1 = m_2 = j$), un champ radiofréquence σ_+ ne se couplant qu'au moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$, seuls les niveaux représentés en rouge Figure I.9 pour lesquels $m_2 = j = \text{Cste}$ sont accessibles et l'évolution de l'état de l'atome sera donc restreinte à cette échelle de spin. L'état atomique peut donc être synthétiquement décrit par les deux nombres quantiques $|j, m_1\rangle$ avec $j = (n - 1)/2$. Le hamiltonien de couplage, qui se résume à la composante $\hat{V}_{RF}^+(\hat{\mathbf{r}}, t)$, peut ainsi s'écrire de manière simplifiée :

$$\hat{V}_{RF}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \hat{V}_{RF}^+(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathcal{V}^{\sigma_+} \hat{J}_1^+ e^{-i\omega_{RF}t} + h.c. \quad , \quad (\text{I.113})$$

et le hamiltonien total du système s'écrit donc :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \delta \hat{J}_{1,z} + \Omega_{RF}^{\sigma_+} \hat{J}_{1,x} \quad , \quad (\text{I.114})$$

où $\Omega_{RF}^{\sigma_+}$ désigne la pulsation de Rabi associée à la composante σ_+ du champ radiofréquence.

Finalement, en sus d'évoluer dans un sous-espace de Hilbert qui est une échelle finie de $2j + 1$ niveaux équidistants, l'étude du hamiltonien de couplage de l'atome à un champ radiofréquence, et en particulier l'écriture des éléments de matrice, nous a fait aboutir à la conclusion que notre atome couplé à un champ radiofréquence polarisé est strictement équivalent à un grand moment magnétique $j = (n - 1)/2$ couplé à un champ magnétique transverse oscillant.

Dans le cas d'un couplage résonant de l'atome au champ radiofréquence ($\delta = 0$), le vecteur d'onde évolue sous l'effet de l'opérateur évolution $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ et tourne donc autour de l'axe (Ox) à la pulsation :

$$\Omega_{RF}^{\sigma_+} = -3q n \frac{a_0}{\hbar} \frac{F_{RF}^{\sigma_+}}{\sqrt{2}} \quad . \quad (\text{I.115})$$

Dans le cas plus général où $\delta \neq 0$, l'opérateur d'évolution s'écrit :

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{J}}_1 t} \quad , \quad (\text{I.116})$$

où $\mathbf{\Omega}$ désigne le vecteur rotation $\mathbf{\Omega} = (\Omega_{RF}, 0, \delta)$. L'état précesse donc autour de l'axe de rotation $\mathbf{\Omega}$ à une pulsation $\Omega = |\mathbf{\Omega}| = \sqrt{\Omega_{RF}^2 + \delta^2}$. On peut donc décrire notre système atomique comme un moment cinétique fictif - « porté par l'atome » - plongé dans un champ magnétique.

Pour clore ce paragraphe, nous représentons à la Figure I.11 les fonctions d'ondes (à travers les densités de probabilité électronique) de certains états de l'échelle de spin entourée en rouge sur la Figure I.9, qui sera véritablement notre « espace de travail » pour toute la suite du manuscrit. Pour tous ces états, le nombre quantique m_2 est constant

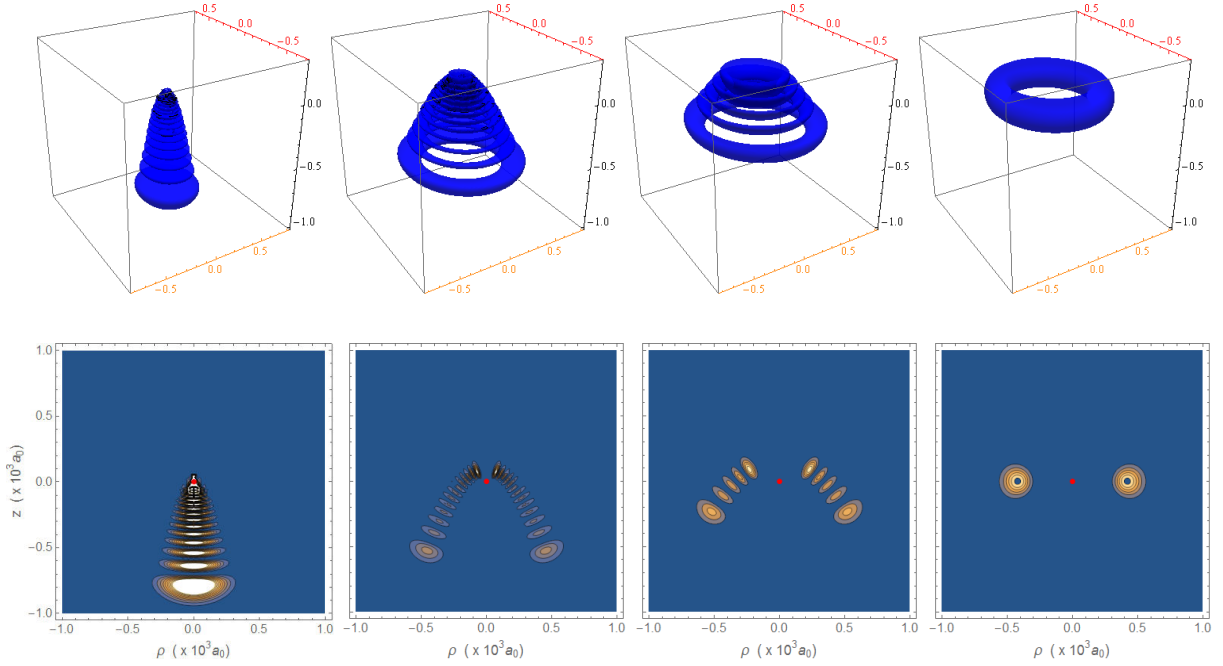


FIGURE I.11 – Densité de probabilité de quelques états paraboliques de « l'échelle de spin » $m_2 = +j = 10$ de la multiplicité $n = 21$ de l'atome d'hydrogène. Les niveaux, écrits sous le format $|j, m_1\rangle$, sont de gauche à droite : $|10, m_1 = -10\rangle$ ($m = 0$), $|10, m_1 = -2\rangle$ ($m = 8$), $|10, m_1 = 6\rangle$ ($m = 16$) et l'état circulaire $|10, m_1 = 10\rangle$ ($m = 20$). Les fonctions d'onde à 3 dimensions sont tracées pour une densité supérieure à $3 \cdot 10^{-9} a_0^{-3}$. Leurs projections dans un plan de coupe contenant l'axe de quantification (Oz) sont tracées entre 0 et $1,5 \times 10^{-8} a_0^{-3}$.

et maximal ($m_2 = +j = 10$) : le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$ est donc « aligné » avec l'axe de quantification (Oz). Pour l'état $|10, m_1 = -10\rangle$, le second nombre quantique magnétique m_1 est aussi maximum mais de signe opposé, ce qui conduit par addition à un moment cinétique total $m = m_1 + m_2 = 0$. La fonction d'onde est donc localisée autour de l'axe (Oz) : l'orbite est très elliptique ($|n_1 - n_2|$ est maximal), ce qui implique une grande sensibilité au champ électrique statique (dipôle atomique maximal) qui se traduit en effet par le déplacement Stark maximal du niveau en question vers les basses énergies. Les différents « lobes » de la fonction d'onde s'interprètent comme une figure d'interférence entre les trajets « descendant » et « ascendant » de la trajectoire quasi-linéaire de l'électron. Plus le nombre quantique m_1 augmente, plus la différence $m_1 - m_2 = n_1 - n_2$ s'amoindrit. Le nombre quantique dit « électrique » $n_1 - n_2$ diminuant, le dipôle atomique diminue et la fonction d'onde se recentre autour du plan $z = 0$. Dans l'état circulaire $m = 20$, la fonction d'onde est un tore centré sur le noyau, d'ellipticité nulle ($n_1 = n_2$) et de moment cinétique maximal ($m = n - 1$). On visualise ainsi sur la distribution électronique de ces états paraboliques dans un champ électrique vertical, l'évolution de la fonction d'onde lors de l'ajout successif de quanta de moment cinétique. On retrouve ainsi sur la fonction d'onde l'effet de l'action des opérateurs « hybrides » de $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{A}}$ qui convertissent le moment cinétique orbital en ellipticité.

I.1.4.c États de Dicke

En considérant la polarisation du champ radiofréquence purement σ_+ , ne se couplant qu'au moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$, on simplifiera la notation de cet opérateur en supprimant l'indice 1 : $\hat{\mathbf{J}}_1 \equiv \hat{\mathbf{J}}$, de même¹⁸ pour les opérateurs d'échelle $\hat{J}_1^\pm \equiv \hat{J}^\pm$. Ces opérateurs de montée et de descente \hat{J}^+ et \hat{J}^- (qui sont conjugués hermitiques l'un de l'autre), étant des combinaisons linéaires de \hat{J}_x et \hat{J}_y commutant avec $\hat{\mathbf{J}}^2$, commutent eux-mêmes avec $\hat{\mathbf{J}}^2$:

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}^\pm] = 0 \quad . \quad (\text{I.117})$$

En revanche \hat{J}^\pm ne commute pas avec \hat{J}_z et on obtient aisément à partir des relations de commutation des composantes de l'opérateur moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}$:

$$\begin{cases} [\hat{J}^-, \hat{J}^+] = -2\hbar\hat{J}_z \\ [\hat{J}^-, \hat{J}_z] = \hbar\hat{J}^- \\ [\hat{J}^+, \hat{J}_z] = -\hbar\hat{J}^+ \end{cases} \quad . \quad (\text{I.118})$$

Les états $|j, m_1\rangle$, aussi appelés états de Dicke, sont alors états propres de l'opérateur [132] :

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{J}^+ \hat{J}^- - \hat{J}^- \hat{J}^+) \quad , \quad (\text{I.119})$$

et sont générés par actions successives des opérateurs d'échelle \hat{J}^+ et \hat{J}^- respectivement sur les états extrémaux du moment cinétique $|j, -j\rangle$ et $|j, j\rangle$ [132, 133] :

$$|j, m\rangle = \frac{1}{(m_1 + j)!} \left(\begin{matrix} 2j \\ m_1 + j \end{matrix} \right)^{-1/2} (\hat{J}^+)^{m_1 + j} |j, -j\rangle \quad (\text{I.120})$$

$$= \frac{1}{(j - m_1)!} \left(\begin{matrix} 2j \\ m_1 + j \end{matrix} \right)^{-1/2} (\hat{J}^-)^{-m_1 + j} |j, j\rangle \quad , \quad (\text{I.121})$$

où $m_1 = -j, -j+1, \dots, +j$. L'état $|j, -j\rangle$ est donc l'état fondamental du moment cinétique et l'état $|j, j\rangle$ l'état le plus excité tels que :

$$\hat{J}^- |j, -j\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \hat{J}^+ |j, +j\rangle = 0 \quad . \quad (\text{I.122})$$

Ainsi, $\forall m \in \llbracket -j, j \rrbracket$:

$$\hat{J}_z |j, m_1\rangle = m_1 \hbar |j, m_1\rangle \quad . \quad (\text{I.123})$$

18. On conservera cependant l'indice pour le nombre quantique m_1 .

I.1.4.d États cohérents d'un moment cinétique

A partir d'un opérateur moment cinétique comme $\hat{\mathbf{J}}$, on considère par exponentiation l'opérateur rotation, générant une rotation d'angle Θ autour de l'axe $\mathbf{n} = (-\sin \Phi, \cos \Phi, 0)$:

$$\hat{R}_{\Theta, \Phi} = e^{-\frac{i}{\hbar} \Theta \hat{J}_{\mathbf{n}}} = e^{\frac{i}{\hbar} \Theta (J_x \sin \Phi - J_y \cos \Phi)} = e^{\zeta J^- - \zeta^* J^+} \quad , \quad (\text{I.124})$$

où $\hbar \zeta = \frac{\Theta}{2} e^{i\Phi}$. Ainsi, on appelle état cohérent d'un moment cinétique ou « état cohérent de spin », encore appelé « état de Bloch », l'état $|\Theta, \Phi\rangle$ qui s'obtient par rotation de l'état de moment cinétique maximal $|j, +j\rangle$:

$$|\Theta, \Phi\rangle \equiv \hat{R}_{\Theta, \Phi} |j, +j\rangle \quad . \quad (\text{I.125})$$

Dans notre cas, cette rotation est générée par couplage de l'atome au champ radiofréquence σ_+ . Lorsqu'on a affaire à une exponentielle d'opérateurs qui ne commutent pas, il est souvent très utile de transformer cet opérateur symétrisé en un produit ordonné d'exponentielles d'opérateurs. Les formules dites de Baker-Campbell-Hausdorff permettent par exemple de manipuler aisément les opérateurs translation dans l'espace des phases d'un oscillateur harmonique. Pour un moment cinétique, afin de dériver une relation de ce type, il convient d'appliquer un développement en série de Maclaurin à l'exponentielle d'une somme des opérateurs matricielles 2×2 , J^+ , J^- et J_z d'une part¹⁹, et un même développement aux produits ordonnés des exponentielles de ces mêmes opérateurs d'autre part [132]. Après identification terme à terme, un argument topologique permet d'étendre la relation obtenue en dimension 2 à une dimension quelconque. On peut alors écrire que :

$$\hat{R}_{\Theta, \Phi} = e^{-\tau J^+} e^{-\ln(1+|\tau|^2) J_z} e^{+\tau^* J^-} = e^{+\tau^* J^-} e^{+\ln(1+|\tau|^2) J_z} e^{-\tau J^+} \quad , \quad (\text{I.126})$$

avec $\hbar \tau = e^{-i\Phi} \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)$. Comme $J^+ |j, +j\rangle = 0$, la dernière expression permet alors d'exprimer l'état de Bloch en termes d'états de Dicke :

$$|\Theta, \Phi\rangle = \hat{R}_{\Theta, \Phi} |j, +j\rangle = \left(\frac{1}{1+|\tau|^2} \right)^j e^{-\tau J^-} |j, +j\rangle = \left(\cos \frac{\Theta}{2} \right)^{2j} e^{-\tau J^-} |j, +j\rangle \quad . \quad (\text{I.127})$$

En développant l'exponentielle et grâce à l'équation (I.121), on obtient [133] :

$$|\Theta, \Phi\rangle = \sum_{m=-j}^{m=j} \binom{2j}{m+j}^{1/2} \left(\cos \frac{\Theta}{2} \right)^{j+m} \left(\sin \frac{\Theta}{2} \right)^{j-m} e^{+i(j-m)\Phi} |j, m\rangle \quad . \quad (\text{I.128})$$

19. Ces 3 opérateurs matriciels $J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_z = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ sont une représentation de l'algèbre du groupe des rotations.

Étant une combinaison linéaire d'états $|j, m_1\rangle$, leur projection sur l'axe de quantification n'a pas de valeur déterminée. Si l'on écrit la projection de l'état cohérent $|\Theta, \Phi\rangle$ sur l'état de Dicke $|j, m_1\rangle$, on obtient une distribution binomiale de paramètre $p = \sin^2 \frac{\Theta}{2}$:

$$|\langle j, m_1 | \Theta, \Phi \rangle|^2 = \binom{2j}{m_1 + j} \left(\cos^2 \frac{\Theta}{2} \right)^{j+m_1} \left(\sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)^{j-m_1}, \quad (\text{I.129})$$

qui s'approche par une loi de Poisson dans la limite où p est petit et où j est grand, c'est-à-dire lorsque l'état cohérent est « proche » des deux seuls états cohérents qui sont aussi des états de Dicke : les états $|j, +j\rangle$ et $|j, -j\rangle$.

Par ailleurs, les états cohérents de spin sont des états minimaux vérifiant le cas de l'égalité dans les inégalités de Heisenberg. Ils sont donc décrits par leur disque d'incertitude de rayon proportionnel à \sqrt{j} comme le représente le disque bleu sur la Figure I.12. Cette Figure représente l'obtention d'un état cohérent de spin par rotation de l'état maximal du moment cinétique $|j, +j\rangle$ en vis-à-vis de l'échelle harmonique d'états de Dicke. Les états cohérents de spin sont des superpositions d'états de Dicke $|j, m_1\rangle$ et ne sont donc pas des états propres du hamiltonien. Ils évoluent donc dans le temps, mais persistent formellement à s'écrire, à un terme de phase près, sous la forme (I.128).

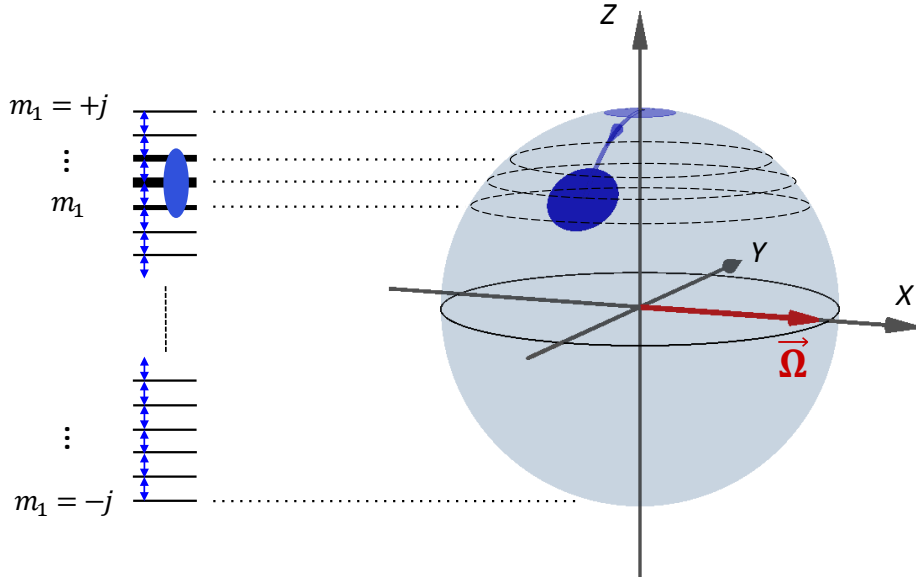


FIGURE I.12 – Projection d'un état cohérent de spin représenté par son disque d'incertitude sur les états de Dicke $|j, m_1\rangle$. Les niveaux $|j, m_1\rangle$ ont des projections $m_1\hbar$ sur l'axe vertical (Oz) équidistantes. L'état cohérent de spin obtenu par rotation de l'état maximal du moment cinétique $|j, +j\rangle$ se projette donc sur d'autant plus de niveaux qu'il se trouve au voisinage de l'équateur.

Finalement, les états cohérents de spin ne sont pas orthogonaux [132] et on a en particulier :

$$\langle \Theta, \Phi | \Theta', \Phi' \rangle = e^{ij(\Phi - \Phi')} \left[\cos \frac{\Theta - \Theta'}{2} \cos \frac{\Phi - \Phi'}{2} - i \cos \frac{\Theta + \Theta'}{2} \sin \frac{\Phi - \Phi'}{2} \right]^{2j} \quad (\text{I.130})$$

On obtient ainsi que :

$$|\langle \Theta, \Phi | \Theta', \Phi' \rangle|^2 = \cos^{4j} \frac{\Xi}{2} \quad , \quad (\text{I.131})$$

où Ξ est l'angle formé par les deux directions (Θ, Φ) et (Θ', Φ') donné par :

$$\cos \Xi = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos (\Phi - \Phi') \quad . \quad (\text{I.132})$$

Cette loi est un analogue de la loi de Malus pour les polarisations de la lumière. Néanmoins, les états cohérents de spin forment une base surcomplète, vérifiant la relation de fermeture :

$$(2j + 1) \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\Theta, \Phi\rangle \langle \Theta, \Phi| = 1 \quad , \quad (\text{I.133})$$

où $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$.

Ces états cohérents de spin sont centraux dans ce manuscrit. Dans l'ensemble des expériences ici présentées, l'atome, couplé à un rayonnement radiofréquence classique, sera la quasi-totalité du temps décrit par ce type d'états ou bien une superposition de tels états. Nous développerons dans la prochaine section des outils de représentation afin de visualiser aisément ces états atomiques quantiques les plus classiques qu'il soit.

I.2 Représentation d'un état de moment cinétique

Pour $j > 1/2$, la description de l'état du moment cinétique par un point sur une sphère, c'est-à-dire par deux coordonnées, n'est plus suffisante. Il faut alors construire de nouveaux outils de représentation appropriés. Dans cette section, après avoir présenté la sphère de Bloch généralisée, nous introduirons l'analogue des représentations de Husimi- Q et de Wigner de l'optique quantique, adaptées à la description de nos états de moment cinétique. Comme développé dans [132], au prix d'une contraction de l'espace des phases, ces distributions de l'optique quantique s'adaptent à un espace de dimension finie, permettant ainsi la représentation des états d'un grand moment cinétique j sur ladite sphère de Bloch généralisée.

I.2.1 Sphère de Bloch généralisée et fonctions caractéristiques

De prime abord, la norme du moment cinétique j étant constante, la représentation de l'état sur une sphère semble *de facto* privilégiée. En particulier, dans le cas d'un spin $1/2$, la dimension de l'espace de Hilbert des états étant de dimension 2, on peut représenter un état pur du système par un vecteur \mathbf{U} , appelé *vecteur de Bloch* pointant à la surface d'une sphère nommée *sphère de Bloch*. Les deux coordonnées (angulaires sphériques) de ce vecteur de Bloch déterminent entièrement l'état du spin : au vecteur de coordonnées (θ, φ) , on associe l'état $|\psi\rangle = \cos\theta|+\rangle + \sin\theta e^{i\varphi}|-\rangle$ [56], où l'état $|+\rangle$ désigne le spin \uparrow positionné au pôle Nord de la sphère de Bloch et l'état $|-\rangle$ désigne le spin \downarrow positionné au pôle Sud de la sphère de Bloch. Un mélange statistique peut même être représenté à l'intérieur de cette sphère comme la somme pondérée de plusieurs états purs [134]. La matrice densité d'un tel état dépend de trois nombres réels²⁰ qui sont associées aux trois coordonnées sphériques.

Cette représentation peut être étendue à un moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}$ arbitraire, entier ou demi-entier, dont l'état est représenté à la surface d'une sphère qui généralise la sphère de Bloch utilisée pour décrire un spin $1/2$. L'état atomique n'est cependant plus déterminé par un seul point à la surface de cette sphère de Bloch généralisée car l'espace de Hilbert n'est plus de dimension deux dans le cas d'un moment cinétique plus grand que $1/2$. Il nous faut donc construire des distributions permettant de décrire l'état du moment cinétique en associant à chaque coordonnée de la sphère de Bloch généralisée un nombre réel. Bien évidemment, ces distributions définies sur toute la sphère sont contraintes et seul un nombre fini de valeurs sur cette sphère de Bloch suffit à déterminer l'état complet du moment cinétique.

Eu égard à la non-commutation des composantes du moment cinétique \mathbf{J} , il existe plusieurs fonctions caractéristiques quantiques, s'appuyant sur différentes manières d'ordonner les composantes du moment cinétique \mathbf{J} , dont certaines fournissent par transformée de Fourier inverse des distributions de probabilité sur une sphère [135]. L'étude complète de ces distributions pour les systèmes de spins a été effectuée par Agarwal [136]. Il apparaît dans cet article que ce sont les opérateurs tensoriels irréductibles \hat{T}_{kq} qui jouent dans le cas des systèmes de moment cinétique un rôle analogue à l'opérateur déplacement $\mathcal{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ pour les systèmes bosoniques (voir annexe A), ce qui rend le problème autrement plus complexe. Nous nous contenterons donc de présenter deux distributions sur la sphère de Bloch généralisée qui présentent une forte analogie avec les distributions d'Husimi- Q et de Wigner de l'optique quantique.

20. Le terme complexe hors diagonal ainsi qu'un des deux termes diagonaux - la trace unité et l'hermiticité de la matrice contraignant le reste.

I.2.2 Fonction Q d'un moment cinétique

On définit la distribution de probabilité prenant valeurs sur une sphère [135] pour un opérateur densité arbitraire [137, 138] :

$$Q(\Theta, \Phi) = \frac{2j+1}{4\pi} \text{Tr}(\hat{\rho}|\Theta, \Phi\rangle\langle\Theta, \Phi|) \quad , \quad (\text{I.134})$$

qui est une distribution positive et normalisée pour un moment cinétique. En effet :

$$\int Q(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi = 1 \quad . \quad (\text{I.135})$$

Cette distribution est analogue, au facteur de normalisation près, à la distribution de Husimi- Q de l'optique quantique d'où la dénomination. En utilisant le fait que l'on génère les états cohérents de spin par rotation $\hat{R}_{\Theta, \Phi}$ de l'état de moment cinétique maximum $|j, +j\rangle$ (par exemple), on peut réécrire la fonction Q comme suit :

$$Q(\Theta, \Phi) = \frac{2j+1}{4\pi} \langle\Theta, \Phi|\hat{\rho}|\Theta, \Phi\rangle \quad (\text{I.136})$$

$$= \frac{2j+1}{4\pi} \langle j, +j|\tilde{\rho}|j, +j\rangle \quad , \quad (\text{I.137})$$

où l'opérateur $\tilde{\rho}$ correspond à l'état atomique « tourné » tel que $\tilde{\rho} = \hat{R}_{\Theta, \Phi}^\dagger \hat{\rho} \hat{R}_{\Theta, \Phi}$. Sous la forme (I.136), on interprète simplement cette fonction Q comme le recouvrement de l'état $\hat{\rho}$ avec l'état cohérent de spin $|\Theta, \Phi\rangle$. La dernière forme (I.137) fournit une méthode expérimentale pour mesurer la fonction Q , consistant à appliquer une rotation au système et à mesurer à l'issue la probabilité d'être dans l'état de moment cinétique maximal $|j, +j\rangle$.

En tant que distribution, toute l'information contenue dans la matrice densité $\hat{\rho}$ se retrouve dans la fonction Q . En effet, on peut appliquer à l'opérateur densité un développement multipolaire :

$$\hat{\rho} = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^{+k} \rho_{kq} \hat{T}_{kq} \quad , \quad (\text{I.138})$$

où les opérateurs tensoriels irréductibles \hat{T}_{kq} sont définis par :

$$\hat{T}_{kq} = \sum_{m=-j}^{+j} \sum_{m'=-j}^{+j} (-1)^{j-m} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} j & k & j \\ -m & q & m' \end{pmatrix} |j, m\rangle\langle j, m'| \quad , \quad (\text{I.139})$$

et où $\begin{pmatrix} j & k & j \\ -m & q & m' \end{pmatrix}$ représente le symbole de Wigner $3j$ usuel. On peut ainsi inverser la définition de cette distribution Q et exprimer les coefficients du développement multipolaire :

laire de la matrice densité $\rho_{kq} = \text{Tr}(T_{kq}^\dagger \hat{\rho})$ en fonction des valeurs de la fonction Q [137] :

$$\rho_{kq} = \frac{\sqrt{4\pi}}{(2j+1)!} (-1)^{k-q} \sqrt{(2j-k)!(2j+k+1)!} \int Q(\Theta, \Phi) Y_{kq}(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi \quad (\text{I.140})$$

où les $Y_{kq}(\Theta, \Phi)$ désignent les harmoniques sphériques.

La fonction Q d'un état de Dicke $|j, m\rangle$ s'obtient immédiatement à partir de l'équation (I.129) :

$$Q_{|j,m\rangle}(\Theta, \Phi) = \frac{2j+1}{4\pi} |\langle \Theta, \Phi | j, m \rangle|^2 \quad (\text{I.141})$$

$$= \frac{2j+1}{4\pi} \binom{2j}{m+j} \left(\cos \frac{\Theta}{2} \right)^{2(j+m)} \left(\sin \frac{\Theta}{2} \right)^{2(j-m)} . \quad (\text{I.142})$$

Son expression est indépendante de Φ et la fonction Q est donc bien invariante par rotation autour de l'axe de quantification (Oz) (les états des Dicke étant vecteurs propres de l'opérateur \hat{J}_z). En particulier, la représentation Q pour l'état maximal de moment cinétique $|j, +j\rangle$, qui est tout à la fois un état cohérent de spin et un état de Dicke s'écrit :

$$Q_{|j,+j\rangle}(\Theta, \Phi) = \frac{2j+1}{4\pi} \cos^{4j} \frac{\Theta}{2} . \quad (\text{I.143})$$

La Figure I.13 **(a)** représente cet état sur la sphère de Bloch généralisée pour $j = 25$. Il convient alors de faire attention au fait que la représentation Q d'un état de Dicke possède une certaine dispersion verticale alors que les états de Dicke, étant états propres de l'opérateur \hat{J}_z ne présentent pas de fluctuations suivant z . Cette remarque s'applique aussi sur la dispersion radiale des états de Fock dans l'espace de phase de l'oscillateur harmonique [134]. La Figure I.13 **(b)** représente un autre état de Dicke, $|j = 25, m_1 = 21\rangle$ invariant par rotation autour de l'axe de quantification (Oz). Le périmètre de l'anneau associé à la valeur propre $m\hbar$ étant plus grand que pour **(a)**, les valeurs de la fonction Q sont donc bien plus faibles d'après la normalisation (I.135). On note que cette fonction Q est assez impropre, pour des questions d'échelle, à représenter de tels états de Dicke.

Finalement, on peut facilement calculer grâce à l'expression (I.131) du recouvrement de deux états cohérents atomiques la fonction Q pour un état cohérent de spin $|\Theta', \Phi'\rangle$:

$$Q_{|\Theta', \Phi'\rangle}(\Theta, \Phi) = \frac{2j+1}{4\pi} \cos^{4j} \frac{\Xi}{2} , \quad (\text{I.144})$$

avec l'expression de Ξ en termes des variables angulaires Θ, Θ', Φ et Φ' donnée en (I.132) :

$$\cos \Xi = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos (\Phi - \Phi') . \quad (\text{I.145})$$

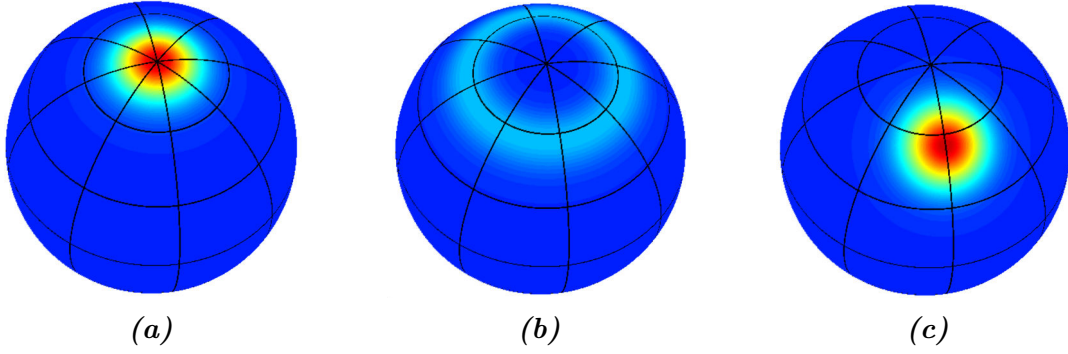


FIGURE I.13 – Représentation de la fonction Q de trois états particuliers d'un moment cinétique $j = 25$. **(a)** État de Dicke et cohérent $|j, +j\rangle$. **(b)** État de Dicke $|j, m_1 = 21\rangle$. **(c)** État cohérent de spin $|\Theta = 0,6 \text{ rad}, \Phi = 0\rangle$ centré peu ou prou sur la ville d'Edimbourg ($55^\circ 57' 07''$ Nord, $3^\circ 11' 47''$ Ouest) en Écosse au Royaume-Uni. L'état cohérent de spin est obtenu par rotation $\hat{R}(\Theta, \Phi)$ de l'état $|j, +j\rangle$.

On vérifie que pour $|\Theta' = 0, \Phi' = 0\rangle \equiv |j, +j\rangle$, $\Xi = \Theta$ et que l'on retrouve l'expression (I.143). Dans le cas général, on peut effectuer un développement de Taylor de $Q_{|\Theta', \Phi'\rangle}(\Theta, \Phi)$ autour de son maximum en (Θ', Φ') :

$$Q_{|\Theta', \Phi'\rangle}(\Theta, \Phi) \sim \frac{2j+1}{4\pi} \times \left[1 - \frac{J}{2} \left[(\Theta - \Theta')^2 + \sin^2 \Theta' (\Phi - \Phi')^2 \right] \right] , \quad (\text{I.146})$$

développement qui s'identifie avec celui jusqu'au second ordre d'une exponentielle et qui fait que, dans une certaine limite dont nous discuterons plus loin la fonction Q d'un état cohérent $|\Theta', \Phi'\rangle$ peut être approchée, à une normalisation près, par la distribution gaussienne suivante :

$$Q_{|\Theta', \Phi'\rangle}(\Theta, \Phi) \propto \frac{2j+1}{4\pi} e^{-\frac{j}{2} [(\Theta - \Theta')^2 + \sin^2 \Theta' (\Phi - \Phi')^2]} . \quad (\text{I.147})$$

Le périmètre des différents parallèles sur la sphère dépendant de la colatitude comme le sinus de Θ , on voit apparaître ce coefficient dans l'exponentielle devant la dépendance quadratique en Φ . Par ailleurs, pour un état cohérent de spin sur l'équateur ($\Theta = \pi/2$), on retrouve la même largeur en \sqrt{j} suivant les deux directions Θ et Φ .

La Figure I.13 (c) représente sur la sphère de Bloch généralisée un tel état cohérent de spin issu de la rotation de l'état maximal de moment cinétique $|j, +j\rangle$ (Figure I.13 (a)) d'un angle de 0,6 radian. L'état cohérent atomique $|\Theta = 0,6 \text{ rad}, \Phi = 0\rangle$ n'est plus invariant par rotation autour de l'axe de quantification (Oz), contrairement aux deux autres états (a) et (b) représentés sur cette figure : cela est dû à l'exponentielle en Φ dans l'expression de la projection de l'état cohérent de spin sur les états de Dicke (I.131) qui fait interférer de manière différente les diverses composantes suivant la direction Φ . Cette approche de la fonction Q d'un état cohérent de spin par une distribution gaussienne²¹

21. Ce qui est exactement le cas dans le contexte des états cohérents du champ électromagnétique [134, 139] : $Q_{|\beta\rangle\langle\beta|}(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta-\alpha|^2}$.

se justifie dans la limite des grands moments cinétiques $j \gg 1$. C'est aussi dans le cadre de cette limite, que l'on a pu décrire les états cohérents de spin proches des pôles comme une distribution de Poisson des états de Dicke. En effet, la courbure en tout point de la sphère vaut l'inverse du rayon. La courbure évolue donc en $1/j$, de sorte que dans la limite où $j \gg 1$, la courbure tend à s'annuler. L'espace des phases tend donc localement vers une surface plane et l'on retrouve ainsi transposés aux moments cinétiques les résultats de l'optique quantique où l'espace des phases est un plan : distribution gaussienne de la fonction Q et distribution poissonnienne d'un état de Bloch sur les états de Dicke. De plus, si l'on compare les éléments de matrice du hamiltonien de couplage qui engendre une rotation sur la sphère de Bloch (I.90) en $\sqrt{j(j+1) - m_1(m_1+1)}$, à ceux du hamiltonien engendrant une translation dans le plan de phase d'un oscillateur harmonique en $\sqrt{(2j)(j-m_1)}$, on note alors que jusqu'à environ $\Phi \sim \pi/6$ ($m_1 = 16$) les éléments de matrice sont les mêmes à 8% près (Figure I.14). Dans cette limite, l'analogie avec un oscillateur harmonique est donc aussi pertinente du point de vue dynamique.

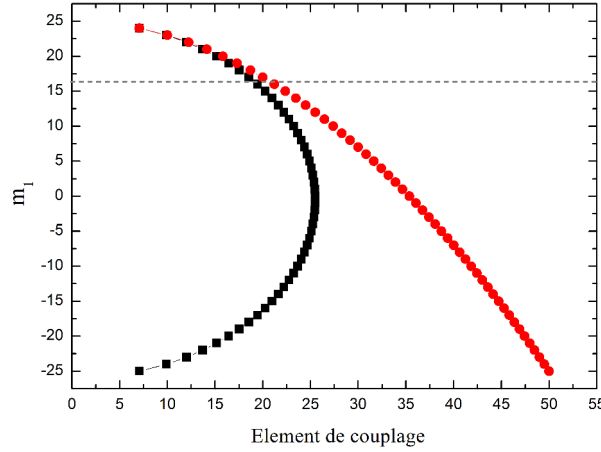


FIGURE I.14 – Éléments de matrice des opérateurs rotation d'un moment cinétique sur la sphère de Bloch et translation dans le plan de phase d'un oscillateur harmonique. Les points noirs correspondent aux éléments de matrices calculés précédemment, équation (I.90), en $\sqrt{j(j+1) - m_1(m_1+1)}$ pour un moment cinétique $j = 25$. En rouge, l'analogie de ces éléments de matrice pour une translation uniforme dans l'espace des phases en $\sqrt{(2j)(j-m_1)}$.

Si $j \gg 1$ continue à croître ($j \rightarrow \infty$), on atteint alors un second régime : la taille du disque d'incertitude, qui croît en \sqrt{j} devient alors négligeable devant la taille du vecteur qui croît comme j . Les fluctuations quantiques deviennent donc de plus en plus négligeables avec la taille du moment cinétique considéré en $1/\sqrt{j}$, ce qui justifie la dénomination de *limite classique*. Cette réduction relative du *shot noise* avec l'accroissement de la taille du moment cinétique fait qu'à la limite classique, comme on s'y attend, le moment cinétique est représenté par une flèche qui pointe alors exactement vers le pôle Nord de la sphère de Bloch.

I.2.3 Distribution de Wigner d'un moment cinétique

La distribution de Wigner associée aux moments cinétiques est définie²² en fonction des harmoniques sphériques $Y_{kq}(\theta, \varphi)$ par [136, 137] :

$$W(\Theta, \Phi) = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^{+k} Y_{kq}(\Theta, \Phi) \rho_{kq} \quad , \quad (\text{I.148})$$

avec $\rho_{kq} = \text{Tr}(\hat{T}_{kq}^\dagger \hat{\rho})$. Ainsi, grâce à l'expression (I.140), on fait le lien entre les fonctions Q et W , qui contiennent bien la même information. On se rappelle par ailleurs que dans le contexte de l'optique quantique, la fonction de Wigner [140] correspond à la valeur moyenne de l'opérateur parité du nombre de photons prise sur l'état déplacé $\tilde{\rho} = D(-\alpha)\rho D(\alpha)$ (voir annexe A). Les choses semblent ici un peu plus complexes. Analytiquement, on peut pressentir l'alternance des signes avec le niveau de Dicke $|j, m\rangle$ concerné à travers le facteur $(-1)^{j-m}$ dans l'expression (IV.49) des opérateurs multipolaires, quoique cette alternance de signe soit profondément insérée au sein de plusieurs sommations. Néanmoins, des calculs numériques montrent que dans la limite où $j \gg 1$ la somme alternée des probabilités de présence sur les états de Dicke successifs approche dans une très bonne approximation l'expression (I.148).

Pour un état de Dicke $\rho = |j, m\rangle\langle j, m|$, l'expression de la fonction de Wigner se simplifie grandement grâce aux propriétés des symboles de Wigner-3j qui, dans le cas où $m = m'$, sont non nuls si et seulement si $q = 0$:

$$W_{|j,m\rangle}(\Theta, \Phi) = \sum_{k=0}^{+2j} Y_{k0}(\Theta, \Phi) (-1)^{j-m} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} j & k & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{I.149})$$

Comme attendu, d'après les propriétés de symétrie des harmoniques sphériques $Y_{kq}(\Theta, \Phi)$ avec $q = 0$, la distribution de Wigner d'un état de Dicke est indépendante de Φ . Les expressions des fonctions de Wigner sont beaucoup plus touffues et complexes à analyser pour un état cohérent de spin ou encore pour un état du type *Chat de Schrödinger*, qui correspond à une superposition cohérente de plusieurs états cohérents de spin. Pour clore cette section sur la distribution de Wigner, nous nous contenterons de représenter la distribution de Wigner pour quelques états du moment cinétique particuliers et mettrons en exergue les particularités de cette fonction W relativement à la fonction Q .

On représente Figure I.15 (a) la fonction de Wigner de l'état $|j, +j\rangle$. Cette représentation semble très proche de la fonction Q présentée plus haut Figure I.13 (a) page 65. L'état $|j, +j\rangle$ étant de Dicke, il est indépendant de Φ et toutes les coupes contenant l'axe (Oz) sont identiques. On compare donc Figure I.15 (b) une coupe (xOz) par exemple

22. Si la forme ici proposée est l'expression « traditionnelle » et la plus usitée, il convient de remarquer que $\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^{1/2} \int W(\theta, \varphi) d\Omega = \text{Tr} \rho = 1$.

des fonctions Q et W de cet état, normalisées à l'unité. On constate que la fonction de Wigner (courbe noire) est moins large que la fonction Q (courbe rouge). Un ajustement gaussien donne les largeurs à $1/e$ de ces fonctions Q et de Wigner qui valent respectivement $32,3^\circ$ et $22,9^\circ$, soit un ratio de $1,411 \sim \sqrt{2}$. Le léger écart de ce ratio à la valeur $\sqrt{2}$ qui prévaut pour les fonctions d'Husimi- Q et de Wigner de l'optique quantique est imputable à la courbure de la sphère de Bloch. Par ailleurs, le ratio des intégrales au carré de ces deux coupes (non normalisées) donne bien le facteur $\sqrt{(2j+1)/(4\pi)}$ dû aux normalisations différentes des fonctions Q et de Wigner (voir note de bas de page n° 22).

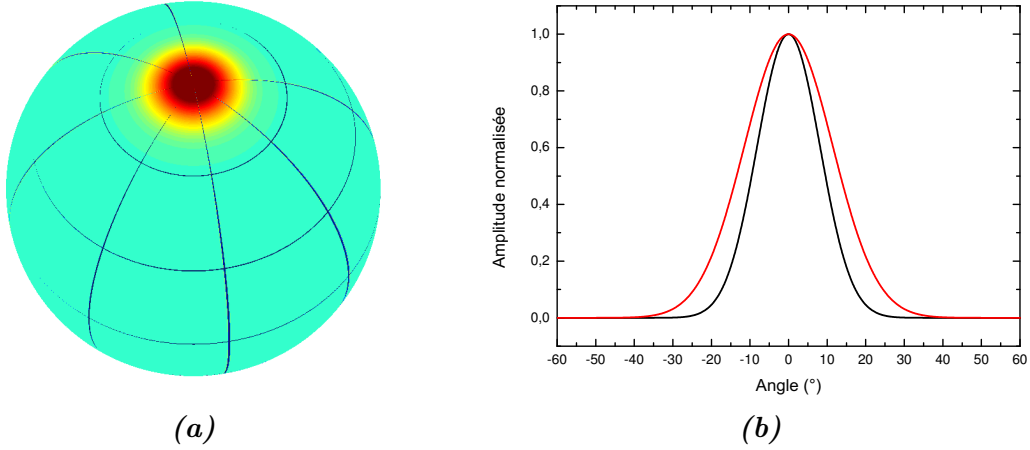


FIGURE I.15 – Coupes des fonctions de Wigner et Q de l'état $|j, +j\rangle$ pour $j = 25$. (a) Fonction de Wigner de l'état $|j, +j\rangle$. (b) Coupes (xOz) des fonctions de Wigner (en noir) et Q (en rouge) normalisées à l'unité pour cet état.

La fonction de Wigner peut prendre des valeurs réelles à la fois positives et négatives à la surface de la sphère de Bloch généralisée, ce qui fait qu'elle n'est pas une distribution de probabilité. En réalité, les valeurs négatives de la fonction de Wigner constituent véritablement une signature du caractère non classique d'un état. La Figure I.15 représentait un état cohérent de spin, état *quasi-classique* obtenu par couplage d'un moment cinétique avec un champ magnétique classique, dont les valeurs de la fonction de Wigner sont donc toutes positives. Nous nous proposons maintenant de représenter à la Figure I.16 la fonction de Wigner de trois états particulièrement non classiques du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}$: (a) l'état de Dicke $|j = 25, m = 21\rangle$ dont la fonction Q fut reproduite plus haut à la Figure I.13 (b) page 65, (b) l'état de Dicke « équatorial » $|j = 25, m = 0\rangle$ et (c) un état *Chat de Schrödinger* correspondant à la superposition de deux états cohérents de spin $|\psi_{SC}\rangle = |\Theta = 0,6 \text{ rad}, \Phi = 0\rangle + |\Theta = 0,6 \text{ rad}, \Phi = \pi\rangle$, toujours pour un moment cinétique $j = 25$. Finalement, la sous-figure (d) représente la densité de probabilité électronique de la superposition d'états cohérents de spin, représentée en (c). Ce type d'état *Chat de Schrödinger* du moment cinétique correspond véritablement à la superposition de deux orbites électroniques mésoscopiquement différentes qui interfèrent entre elles. Pour faire le lien avec les grandeurs introduites en début de chapitre, les valeurs moyennes des opérateurs quantiques $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1$ sont représentées par les vecteurs \mathbf{L} , \mathbf{A} et \mathbf{J}_1 pour les deux trajectoires électroniques, considérées séparément.

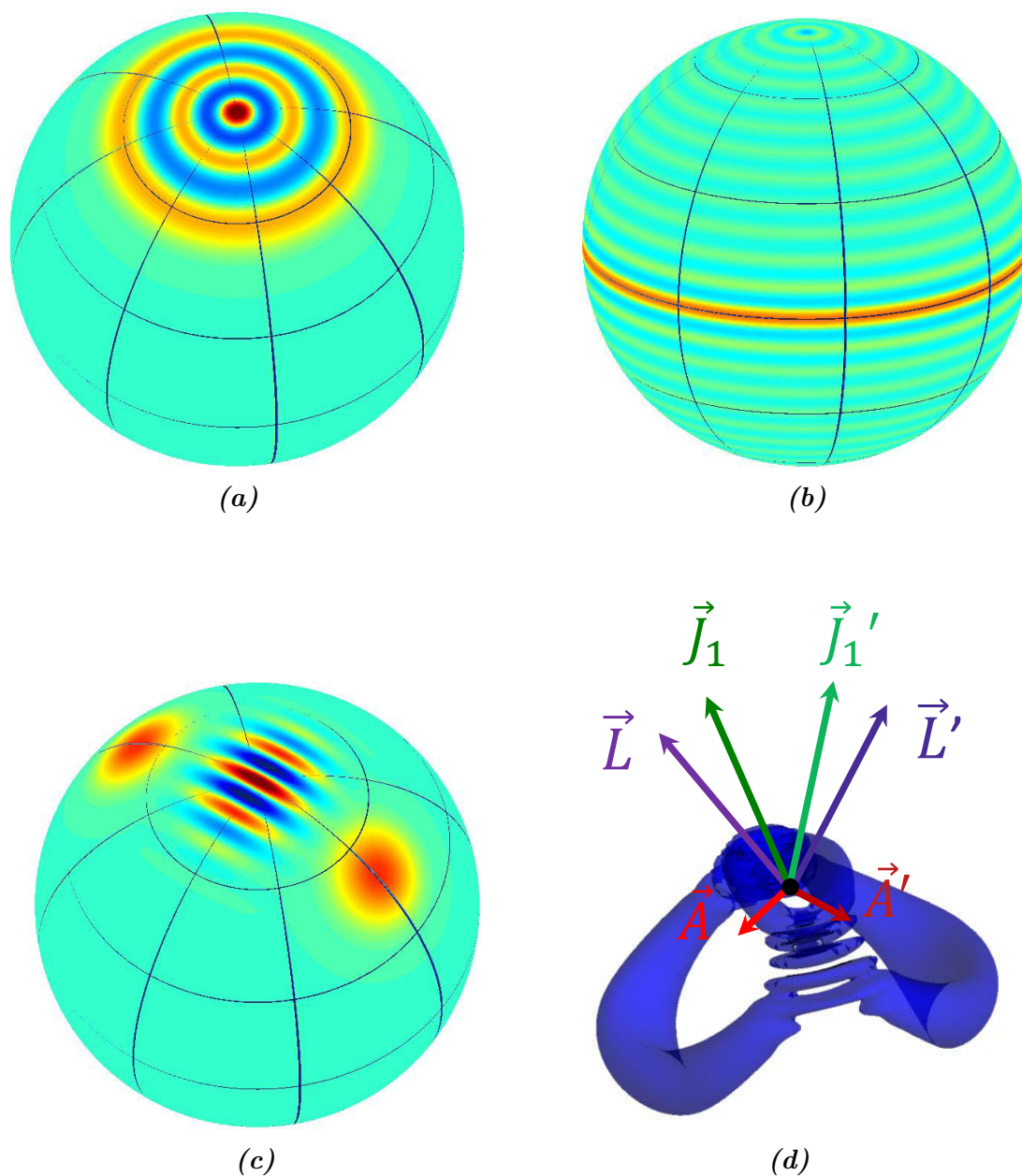


FIGURE I.16 – Représentation de la fonction de Wigner de trois états atomiques particulièrement non classiques. (a) État de Dicke $|j = 25, m = 21\rangle$ dont la fonction Q fut reproduite plus haut en I.13 (b) page 65. (b) État de Dicke « équatorial » $|j = 25, m = 0\rangle$. (c) État Chat de Schrödinger correspondant à la superposition de deux états cohérents de spin $|\psi_{SC}\rangle = |\Theta = 0,6\text{rad}, \Phi = 0\rangle + |\Theta = 0,6\text{rad}, \Phi = \pi\rangle$, toujours pour un moment cinétique $j = 25$. (d) Densité de probabilité électronique de la superposition d'états cohérents de spin, représentée en (c). Ce type d'état Chat de Schrödinger du moment cinétique correspond véritablement à la superposition de deux orbites électroniques mésoscopiquement différentes qui interfèrent entre elles. Pour faire le lien avec les grandeurs introduites en début de chapitre, les valeurs moyennes des opérateurs quantiques $\hat{\vec{L}}$, $\hat{\vec{A}}$ et $\hat{\vec{J}}_1$ sont représentées par les vecteurs \vec{L} , \vec{A} et \vec{J}_1 pour les deux trajectoires électroniques, considérées séparément.

Ceci clôt la seconde partie de ce chapitre sur les outils de représentation d'un état de moment cinétique. Le lecteur familier avec l'optique quantique aura mesuré la grande similarité conceptuelle entre les outils présentés dans ce manuscrit pour décrire les états d'un moment cinétique et ceux développés pour l'oscillateur harmonique, avec certaines différences néanmoins qui s'estompent dans la limite où $j \gg 1$. Jusqu'ici, nous nous sommes attachés à décrire le modèle d'une échelle harmonique de niveaux, dont il convient maintenant de discuter les limites à la lumière de considérations plus fines sur la linéarité du modèle.

I.3 Déviations au modèle de l'échelle harmonique de niveaux Stark

L'harmonicité de l'échelle de spin constituée par n niveaux Stark n'est cependant pas tout à fait exacte et cela pour deux raisons principales (nous ne considérerons pas les effets relativistes²³).

La première déviation au modèle harmonique est que dans le calcul des niveaux de l'atome d'hydrogène en champ statique, nous avons procédé à un développement perturbatif en nous arrêtant en l'occurrence aux termes linéaires en champ électrique (effet Stark linéaire). Cette approximation est d'autant moins apte à décrire précisément les états du système que le champ électrique statique est élevé. En particulier dans les expériences de métrologie quantique où le champ électrique statique sera de l'ordre de 5,5 V/cm, les effets quadratiques seront notables sur la dynamique suivie par l'atome couplé à un champ radiofréquence polarisé et l'on considérera même l'effet Stark cubique pour une description plus précise. La seconde déviation provient de l'identité de notre système qui n'est pas dans nos expériences un atome d'hydrogène, mais un atome de rubidium dont le cœur n'est pas uniquement composé d'un proton. Le modèle phénoménologique dit du « défaut quantique » permet de traiter perturbativement les effets de cœur, importants pour les états de faible moment cinétique orbital, c'est-à-dire en bas de l'échelle de spin décrite plus haut.

Ces deux effets rendent cette « échelle de spin » quelque peu anharmonique ce qui va provoquer un désaccord entre les fréquences de l'atome et du champ radiofréquence dépendant de la valeur moyenne de l'opérateur \hat{J}_z . Néanmoins, les outils de représentation sur la sphère de Bloch sont préservés et on observera même l'influence des non-linéarités du modèle directement sur les fluctuations ΔJ_Θ et ΔJ_Φ .

23. Dans le cadre du modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène, un rapide calcul montre que l'électron de valence possède une vitesse $v = \alpha c/n \ll c$ où $\alpha = q^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$ est la constante de structure fine.

Finalement, en présence d'un champ statique extérieur, le hamiltonien du rubidium n'est pas diagonalisable de manière analytique. Nous présenterons à la fin de cette partie le calcul du spectre du rubidium dans les gammes d'énergie d'intérêt pour différentes valeurs du champ électrostatique.

I.3.1 Effet Stark d'ordres supérieurs

Le calcul de l'effet Stark linéaire permettait, d'après la théorie des perturbations au premier ordre, de diagonaliser le hamiltonien perturbé restreint à une sous-couche n donnée ce qui n'est plus le cas dès que l'on s'intéresse aux ordres supérieurs où il faut alors considérer l'espace de Hilbert tout entier. Là où le bât blesse est que certains objets ou considérations ont été définis ou justifiés en invoquant justement la restriction à une unique multiplicité. Le vecteur de Laplace-Runge-Lenz réduit $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{-2\mu E}} \cdot \mathcal{A}$ en est un exemple. Par ailleurs, l'opérateur \hat{z} n'est plus diagonal dans la base des états paraboliques, car il existe des termes de cohérences inter-multiplicités. Ainsi, les états paraboliques ne sont plus états propres. Cependant, nous ne nous intéressons ici qu'aux corrections au deuxième ordre des niveaux d'énergie, qui n'impliquent qu'une correction au premier ordre des fonctions d'onde. Nous continuerons donc à utiliser les nombres quantiques paraboliques pour désigner les états propres perturbés au premier ordre et nous calculerons le déplacement en énergie des niveaux au deuxième ordre.

I.3.1.a Effet Stark quadratique

On interprète cette correction du deuxième ordre comme un effet de polarisabilité de l'atome, dont le dipôle est perturbé par le champ électrique statique, et c'est alors ce dipôle perturbé qui interagit avec le champ électrique. Dans le cadre de la théorie des perturbations de Rayleigh-Schrödinger, le second terme de la perturbation des niveaux d'énergie s'écrit :

$$W^{(2)}(n, n_1, n_2) = \sum_{n' \neq n, n'_1, n'_2} \frac{|\langle n', n'_1, n'_2 | \hat{W} | n, n_1, n_2 \rangle|^2}{E_{n, n_1, n_2} - E_{n', n'_1, n'_2}} . \quad (\text{I.150})$$

Comme on l'a déjà précisé, la donnée des trois nombres quantiques n , n_1 et n_2 laisse le signe de m indéterminé, mais la symétrie de Kramers naturellement encore vérifiée en champ statique assure que le déplacement Stark quadratique est le même pour les niveaux ayant pour seule différence le signe du nombre quantique magnétique m .

Le calcul conduit finalement à l'expression suivante [130, 141] :

$$W^{(2)}(n, n_1, n_2) = -\frac{1}{32} \left(17n^2 - 3(n_1 - n_2)^2 - 9m^2 + 19 \right) n^4 \frac{(qa_0 F_{st})^2}{E_1} \quad , \quad (\text{I.151})$$

où E_1 a été introduit dans la formule de Bohr (I.38) et où on rappelle que les nombres quantiques n , n_1 , n_2 et m sont liés par la relation $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$. L'effet Stark quadratique ne dépend pas seulement comme l'effet Stark linéaire des nombres n , n_1 et n_2 , mais aussi du nombre quantique magnétique m . Ceci lève au second ordre la dégénérescence qui persistait après la levée de dégénérescence due à l'effet Stark linéaire : seule demeure la symétrie de Kramers $m \leftrightarrow -m$. D'autre part, cette correction est inchangée sous la permutation de n_1 et n_2 , c'est-à-dire qu'elle est indépendante du signe du nombre quantique électrique $n_1 - n_2$ qui détermine l'asymétrie par rapport au plan $z = 0$ de la fonction d'onde. Il faut finalement noter que l'effet Stark quadratique résulte toujours en un décalage du spectre vers le rouge (en utilisant l'inégalité $n_1 - n_2 < n - m$, on montre que le terme dans la première parenthèse est positif) : tous les niveaux sont abaissés en énergie. Ceci peut s'interpréter par le fait que pour une multiplicité n donnée, il y a toujours un nombre plus grand de niveaux dans la multiplicité $n + 1$ du dessus, et plus petit dans la multiplicité $n - 1$ du dessous et qu'en sus la multiplicité $n + 1$ est plus proche²⁴ de la multiplicité n que la multiplicité $n - 1$ l'est de la multiplicité n . Les niveaux se repoussant, comme en témoigne le signe du dénominateur dans la formule (I.150), les niveaux sont « poussés » vers les basses énergies.

I.3.1.b Effet Stark cubique

Le développement jusqu'au second ordre de la théorie des perturbations est suffisant tant que la contamination entre multiplicités est faible. Pour un nombre quantique principal donné, les états les plus déplacés par effet Stark linéaire, l'un vers les énergies plus élevées l'autre vers les basses énergies, sont les états de nombres quantiques $(n_1 = n - 1, n_2 = 0)$ et $(n_1 = n - 1, n_2 = 0)$. La séparation maximale due à l'effet Stark au sein d'une multiplicité donnée vaut donc :

$$\Delta E = 3qa_0 F_{st} n(n - 1) \quad , \quad (\text{I.152})$$

variant, pour n suffisamment grand, comme n^2 . L'écart en énergie entre deux multiplicités consécutives étant en $1/n^3$, on obtient une condition de majoration sur l'amplitude du champ électrique F_{st} en $1/n^5$. De manière plus quantitative, la suffisance d'un développe-

24. En effet, en calculant la différentielle de la formule de Bohr, on voit que la distance en énergie entre deux multiplicités consécutives varie comme $1/n^3$.

ment au deuxième ordre est donnée par la condition dite *limite de Inglis-Teller* [31, 142] :

$$F_{st} \ll \frac{2E_1}{3qa_0n^5} \quad , \quad (\text{I.153})$$

majoration qui, pour la valeur de n la plus grande de tout ce manuscrit $n = 52$, vaut 4,5 V/cm. Or, dans le cadre des expériences d'électrométrie quantique, nous atteindrons des champs de l'ordre de 5,5 V/cm justifiant pour la simulation de ces expériences la prise en compte de l'effet Stark cubique.

Le développement par perturbation mené par Ishida et Hiyama [130, 143] jusqu'à l'ordre trois en champ électrique aboutit à l'expression suivante pour le déplacement en énergie du troisième ordre :

$$W_{(n,n_1,n_2,m)}^{(3)}(F_{st}) = +\frac{3}{128}(n_1 - n_2)(23n^2 - (n_1 - n_2)^2 + 11m^2 + 39)n^7 \frac{(qa_0F_{st})^3}{E_1^2} . \quad (\text{I.154})$$

On ne commentera pas en détail les différents termes de cette formule, et nous nous contenterons de l'inclure dans les simulations de la dynamique d'un atome de Rydberg couplé à un champ radiofréquence polarisé. L'inclusion de ce terme cubique dans les calculs a une influence très minime mais perceptible dans le cadre des expériences de métrologie.

I.3.1.c Influence sur la dynamique du moment cinétique

Dans le cas d'une échelle harmonique de niveaux équidistants, séparés par l'effet Stark linéaire $\hbar\omega_a = -\frac{3}{2}qna_0F_{st}$, le couplage de l'atome en champ statique extérieur à un champ radiofréquence polarisé σ_+ résonant avec la transition d'échelle donne lieu, dans le référentiel de la radiofréquence, à la rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ sur la sphère de Bloch généralisée par rapport à un axe contenu dans le plan équatorial. La rotation de l'état de moment cinétique maximal $|j, +j\rangle$ sous l'effet de l'opérateur $\hat{R}_{\Theta,\Phi}$ génère des états dits cohérents, aussi appelés quasi-classiques, dont la trajectoire électronique la plus probable correspond aux orbites semi-classiques de Sommerfeld. En référence aux orbites képlériennes, ces états sont souvent appelés *états elliptiques* et l'état $|j, +j\rangle$ *état circulaire*. La Figure I.17 représente ces états cohérents de spin obtenus par couplage de l'atome initialement dans l'état circulaire avec le rayonnement radiofréquence classique. Sur cette figure, l'action progressive de l'opérateur $\hat{J}_{1,x} = \frac{1}{2}(\hat{L}_x - \hat{A}_x)$ est double : rotation du plan orbital conjuguée à une augmentation de l'ellipticité de l'orbite.

Si le champ électrique est important et que l'effet Stark d'ordre supérieur (quadratique, cubique, ...) n'est plus négligeable, l'échelle de niveaux n'est plus harmonique. En effet, le déplacement relatif de deux niveaux consécutifs de l'échelle de spin $n_1 = 0$ dû à l'effet

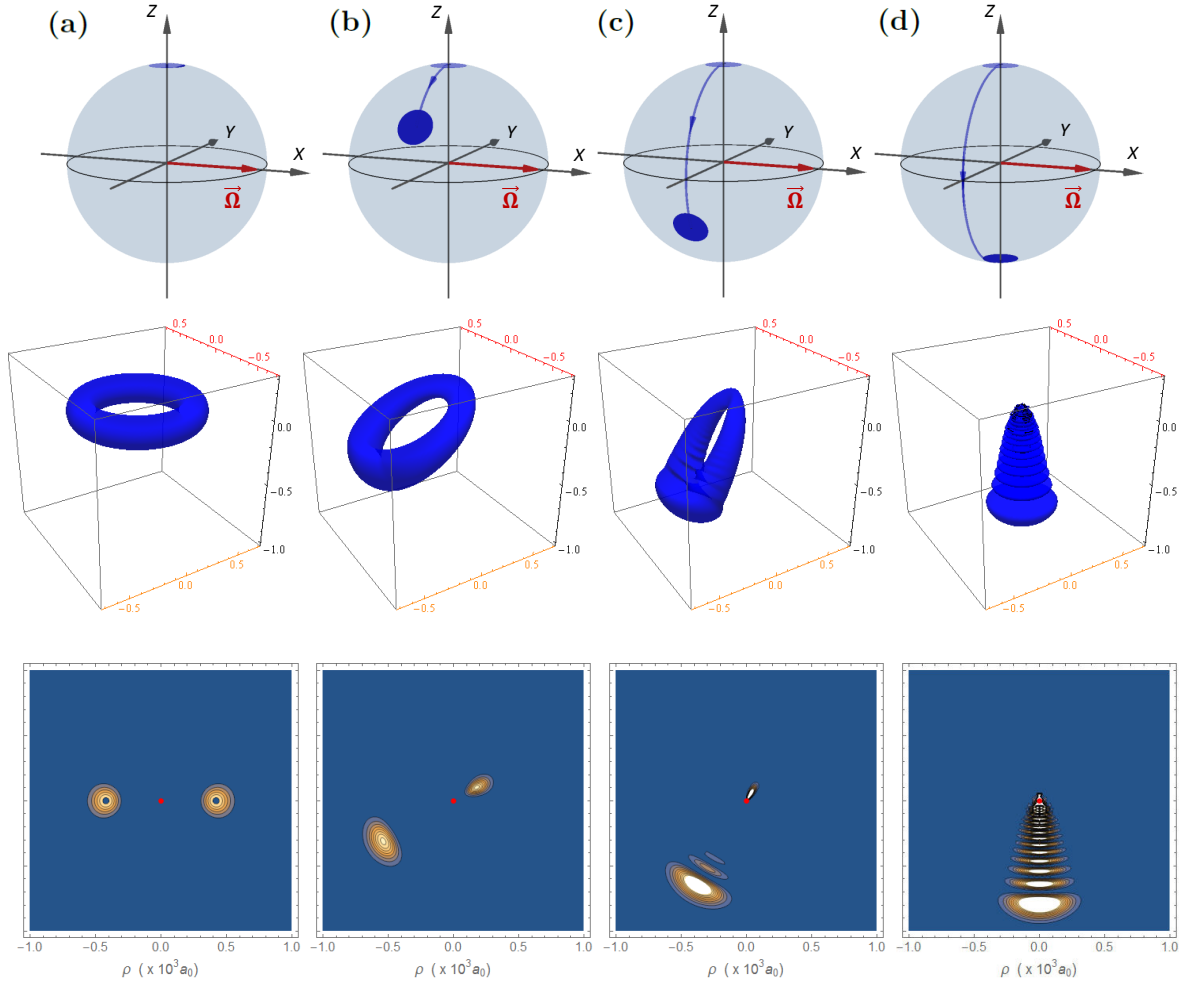


FIGURE I.17 – Fonctions d’onde des états cohérents de spin, engendrés par l’action de \hat{J}_{1x} . (a) État $|\Theta = 0, \Phi = 0\rangle = |j, +j\rangle$. (b) État $|\pi/3, 0\rangle$. (c) État $|2\pi/3, 0\rangle$. (d) État $|\pi\rangle = |j, -j\rangle$. Sur la première ligne est schématisée la fonction Q de l’état cohérent représentée sur la sphère de Bloch généralisée. La deuxième et la troisième ligne représentent les fonctions d’onde à travers la densité électronique respectivement en trois dimensions et selon une coupe dans le plan (xOz) . Les seuils sont identiques à ceux de la Figure I.4 page 34.

Stark quadratique vaut, pour tout n :

$$W^{(2)}(n, n_1 = 0, n_2) - W^{(2)}(n, n_1 = 0, n_2 - 1) = \hbar\omega_{a'} - n_2 \hbar\omega_b \quad , \quad (\text{I.155})$$

où l’on a défini les deux pulsations $\omega_{a'}$ et ω_b comme suit :

$$\hbar\omega_{a'} = -\frac{3}{16}(3n-1)n^4 \frac{(qa_0 F_{st})^2}{E_1} \quad \text{et} \quad \hbar\omega_b = -\frac{3}{4}n^4 \frac{(qa_0 F_{st})^2}{E_1} \quad . \quad (\text{I.156})$$

Finalement, en prenant en compte l’effet Stark linéaire, l’écart en énergie entre deux niveaux consécutifs de l’échelle de spin vaut :

$$\hbar\omega_{at} = E_{(n, n_1=0, n_2)} - E_{(n, n_1=0, n_2-1)} = \hbar(\omega_a + \omega_{a'}) - n_2 \hbar\omega_b \quad . \quad (\text{I.157})$$

L'effet Stark quadratique fait donc varier linéairement cette transition d'échelle. Ainsi, si le champ radiofréquence polarisé σ_+ est résonant avec une de ces transitions d'échelle, il ne l'est plus avec toutes les autres. Pour un état cohérent $|\Theta, \Phi\rangle$, réparti sur plusieurs états de Dicke, la fréquence « moyenne » du moment cinétique associé changeant avec l'angle Θ , sa trajectoire sur la sphère de Bloch sera complexe. A chaque instant le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ porté par l'atome précesse autour d'un vecteur rotation moyen qui dépend lui-même de l'état de l'atome $\langle \mathbf{\Omega} \rangle_{at} = (\Omega_{RF}, 0, \langle \omega_{at} \rangle - \omega_{RF})$! La composition de rotations infinitésimales autour d'axes différents n'étant plus une rotation, ceci rend la paramétrisation de la trajectoire de l'état du moment cinétique sur la sphère de Bloch plus ardue. Par ailleurs, un état cohérent de spin étant une superposition d'états de Dicke, les différentes fréquences d'échelle entre ces niveaux de Dicke vont faire que toutes les composantes de la superposition n'auront pas la même phase. Chacune des composantes va donc tourner à sa vitesse propre ce qui va déformer la forme circulaire des représentations Q et W de l'état cohérent de spin sur la sphère de Bloch. Cet effet quadratique est l'analogue d'un effet Kerr en optique quantique.

La Figure I.18 présente une série d'arrêts sur image de la dynamique d'un moment cinétique $j = 25$ représenté par sa fonction de Wigner sur la sphère de Bloch généralisée. L'atome initialement dans l'état circulaire, au pôle Nord, est placé dans un champ électrique statique $F_{st} = 2,348 \text{ V/cm}$, ce qui fixe la fréquence de la première transition entre l'état circulaire et le premier état elliptique $|n = 51, n_1 = 0, m = 50\rangle \rightarrow |n = 51, n_1 = 0, m = 49\rangle$ à 230 MHz. A ce champ électrique, la contribution de l'effet Stark quadratique est de $\omega_b/2\pi = 13,8 \text{ kHz}$ par transition d'échelle²⁵. L'atome est soumis à un champ radiofréquence polarisé σ_+ résonant à la fréquence de la première transition atomique. La pulsation de Rabi de la radiofréquence est de $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 0,225 \text{ MHz}$. Au départ $t = 0$, l'axe de rotation moyen $\langle \mathbf{\Omega} \rangle_{at}$ est aligné avec l'axe (Ox) . Le moment cinétique initiant sa rotation, le désaccord $\delta(n_2) = \omega_{at}(n_2) - \omega_{RF}$ n'est plus nul et l'axe de rotation moyen $\langle \mathbf{\Omega} \rangle_{at}$ sort progressivement du plan de l'équateur. En particulier lorsque l'atome atteint l'équateur, cet axe de rotation moyen $\langle \mathbf{\Omega} \rangle_{at}$ est incliné de $-\arctan\left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma_+}}{\omega_b}\right) = -66^\circ$ par rapport à l'axe (Ox) dans le plan de l'équateur²⁶. Le vecteur de rotation moyen sortant progressivement du plan de l'équateur, l'atome n'atteint plus l'état $|j, -j\rangle$ au pôle Sud.

D'une manière générale, que ce soit dans le cadre de la dynamique Zénon quantique ou des expériences de métrologie quantique, nous verrons que l'effet Stark quadratique est assez délétère. Pour la dynamique Zénon quantique, cette distorsion de l'échelle harmonique est très limitée car la dynamique est justement confinée par effet Zénon dynamique

25. Dans le cadre des expériences de métrologie quantique, nous travaillerons à $5,505 \text{ V/cm}$, telle que la première transition d'échelle depuis le niveau circulaire soit à 530 MHz. La contribution de l'effet Stark quadratique est alors fortement accrue : $\omega_b/2\pi = 76,4 \text{ kHz}$.

26. L'axe de rotation moyen est donc dans l'hémisphère sud. En effet, $\hbar\omega_{at}$ décroît avec n_2 comme le prouve l'équation (I.157) et le désaccord $\delta(n_2) = \omega_{at}(n_2) - \omega_{RF}$ initialement nul devient donc négatif quand n_2 augmente.

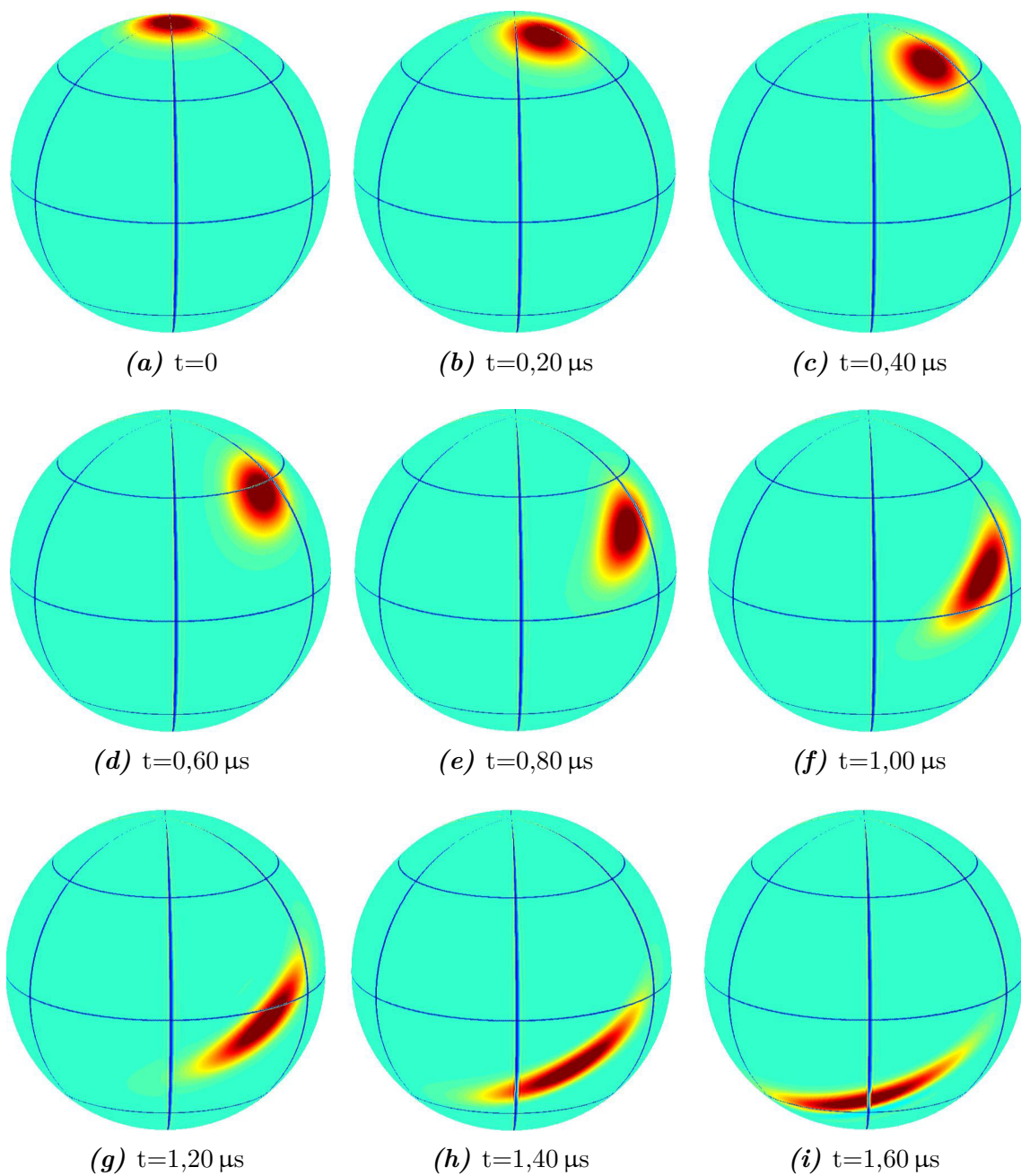


FIGURE I.18 – Rotation du moment cinétique en présence d'effet Stark quadratique. L'atome initialement dans l'état circulaire, au pôle Nord, est placé dans un champ électrique statique $F_{st} = 2,348 \text{ V/cm}$, ce qui fixe la fréquence de la première transition entre l'état circulaire et le premier état elliptique $|n = 51, n_1 = 0, m = 50\rangle \rightarrow |n = 51, n_1 = 0, m = 49\rangle$ à 230 MHz. A ce champ électrique, la contribution de l'effet Stark quadratique est de $\omega_b/2\pi = 13,8 \text{ kHz}$ par transition d'échelle. L'atome est soumis à un champ radiofréquence polarisé σ_+ résonant à la fréquence de la première transition atomique. La pulsation de Rabi de la radiofréquence est de $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 225 \text{ kHz}$.

dans un sous-espace correspondant à une calotte au pôle Nord de la sphère de Bloch généralisée. Sur ces premiers niveaux de l'échelle, l'effet Stark quadratique est quasiment négligeable²⁷.

I.3.2 Rubidium en champ nul : un atome hydrogénoïde

A la différence de l'atome d'hydrogène dont le cœur est constitué d'une charge unique positive, l'électron de valence de l'atome de rubidium interagit à la fois avec les $Z = 37$ charges positives du noyau et les $Z - 1 = 36$ charges négatives du nuage atomique. En champ nul et pour les états de Rydberg, ayant de grands nombres quantiques n , cet électron de valence est suffisamment éloigné du noyau pour que l'atome de rubidium ait un comportement hydrogénoïde. Loin du noyau, l'électron alcalin « voit » donc par phénomène d'écrantage la charge moyenne du noyau et des électrons des couches inférieures. Le cœur des alcalins étant constitué de couches complètes isotropes, l'électron de valence baigne donc dans un potentiel coulombien similaire au problème de l'atome d'hydrogène. Pour les états de faible moment cinétique orbital l pour lesquels l'orbite électronique semi-classique passe près du noyau, le caractère hydrogénoïde de l'atome de rubidium est très approximatif mais il est tout de même possible de décrire les états de Rydberg du rubidium par un modèle phénoménologique dérivé de la théorie de l'atome d'hydrogène : le modèle du défaut quantique.

I.3.2.a Pénétrabilité et polarisabilité du cœur d'un état de Rydberg

Pour les états de faible moment cinétique orbital l , la probabilité de présence de l'électron de valence près du noyau n'est pas négligeable²⁸ et il n'est plus alors possible de décrire le noyau comme une charge ponctuelle « vue » par cet électron de valence. En effet, les autres électrons du nuage n'écrantent plus les Z charges positives du noyau. Dans le cœur, le potentiel est beaucoup plus profond, passant de $-e^2/r$ loin du noyau à une limite de $-Ze^2/r$ sous le nuage électronique du cœur. Lors de son approche du cœur, l'énergie cinétique de la particule radiale croît et la fonction d'onde radiale oscille plus vite²⁹. Ainsi, comme on peut se le représenter sur la Figure I.2 page 31, afin de maintenir la condition de résonance aux bords, l'énergie de l'état diminue légèrement. La vitesse de l'électron près du cœur dépendant très peu de l'énergie de la particule mais surtout du

27. *A fortiori*, nous verrons que la micro-onde Zénon produit un déplacement lumineux sur les niveaux adjacents et peut, pour un certain réglage fin de l'amplitude de cette micro-onde, compenser les effets quadratiques dans le sous-espace de confinement Zénon.

28. On peut se convaincre de cela en observant que le potentiel centrifuge en compétition avec le potentiel coulombien, qui prend la forme $l(l+1)/r^2$, est alors faible et que l'électron de valence subit principalement l'attraction coulombienne.

29. En effet, la longueur d'onde de l'oscillation de la fonction d'onde radiale Figure I.3 page 33 est de l'ordre de \hbar/p où p désigne l'impulsion radiale classique.

moment cinétique orbital l , ce déplacement en énergie est (au premier ordre) uniquement dépendant de l [144].

Par ailleurs, de manière générale et même lorsque l'électron de valence est très éloigné du noyau, l'approximation de champ moyen conduisant à l'existence d'un potentiel coulombien de charge nette $+e$ néglige la possibilité qu'a le cœur atomique de se déformer par interaction avec l'électron de valence. Perdant sa symétrie sphérique³⁰, le cœur se polarise et cette polarisabilité du cœur atomique induit aussi des déplacements pour les niveaux de faible moment cinétique orbital, mais qui, de l'ordre de la fraction de l'intervalle de structure fine, seront ici négligés.

I.3.2.b Modèle du défaut quantique

Afin d'inclure de manière phénoménologique la levée de dégénérescence due à la pénétration du cœur atomique, qui ne dépend au premier ordre que du nombre quantique l , on écrit la position des niveaux d'énergie sous la forme suivante :

$$E_{n,l_j} = -\frac{E_1}{(n - \delta_l)^2} \quad . \quad (\text{I.158})$$

Dans ce modèle dit « du défaut quantique », les effets de pénétrabilité et polarisabilité du cœur atomique se traduisent donc par la définition d'un nombre quantique principal effectif $n_{\text{eff}} = n - \delta_l$, non entier, qui se mesure expérimentalement par spectroscopie en champ nul. Si au premier ordre le déplacement en énergie ne dépend que du moment cinétique orbital l , les effets d'ordres supérieurs où la dépendance en n apparaît, sont pris en compte par les coefficients constants $\alpha_l^{(i)}$, $i = 2, 4, \dots$, dans le développement limité suivant [145, 146] :

$$\delta_{n,l} = \alpha_l^{(0)} + \frac{\alpha_l^{(2)}}{(n - \alpha_l^{(0)})^2} + \frac{\alpha_l^{(4)}}{(n - \alpha_l^{(0)})^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad . \quad (\text{I.159})$$

Pour $n > 20$, seuls les deux premiers termes sont suffisants pour décrire la correction en énergie dans une bonne approximation [31], et donc pour $n \sim 50$, les constantes $\alpha_l^{(0)}$ et $\alpha_l^{(2)}$ sont amplement suffisantes pour décrire à la précision qui nous intéresse les niveaux d'énergie de l'atome de rubidium.

30. Notons cependant que même si le cœur atomique perd sa symétrie sphérique, aucune direction de l'espace n'est privilégiée et le problème reste globalement isotrope, ce qui fait que m reste un bon nombre quantique et que les corrections introduites pour rendre compte de la pénétrabilité et de la polarisabilité du cœur atomique sont indépendantes de m .

Pour finir, il convient de préciser que pour les états de faible moment cinétique orbital $l < 4$ où l'électron de valence passe très près du noyau, il est nécessaire d'inclure les corrections dues aux effets relativistes, auxquels l'atome de rubidium est particulièrement sensible en comparaison à l'atome d'hydrogène. La prise en compte de la structure fine atomique implique la dépendance du défaut quantique au nombre quantique de moment cinétique total j associé à l'opérateur $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$, où $\hat{\mathbf{S}}$ correspond à l'observable du spin de l'électron. Le Tableau I.1 rapporte les valeurs des défauts quantiques $\delta_{n,l,j}(\alpha_l^{(0)}, \alpha_l^{(2)})$ pour des nombres quantiques l entre 0 et 7, ainsi que les déplacements en fréquence relativement aux niveaux non affectés par le défaut quantique de la multiplicité $n = 51$.

Moment cinétique	Défaut quantique $\delta_{n,l,j}$	Déplacement (n=51)
$l=0$	$\delta_{n,l,j} = 3,131145 + \frac{0,195}{(n-3,131145)^2}$	-170,79 GHz
$l=1$, $j=1/2$	$\delta_{n,l,j} = 2,65486 + \frac{0,280}{(n-2,65486)^2}$	-142,66 GHz
$l=1$, $j=3/2$	$\delta_{n,l,j} = 2,64165 + \frac{0,318}{(n-2,64165)^2}$	-141,82 GHz
$l=2$, $j=3/2$	$\delta_{n,l,j} = 1,34807 - \frac{0,603}{(n-1,34807)^2}$	-69,563 GHz
$l=2$, $j=5/2$	$\delta_{n,l,j} = 1,34642 - \frac{0,545}{(n-1,34642)^2}$	-69,476 GHz
$l=3$, $j=5/2$	$\delta_{n,l,j} = 0,0165192 - \frac{0,085}{(n-0,0165192)^2}$	-817,71 MHz
$l=3$, $j=7/2$	$\delta_{n,l,j} = 0,0165437 - \frac{0,086}{(n-0,0165437)^2}$	-818,90 MHz
$l=4$	$\delta_{n,l,j} = 0,004$	-198,32 MHz
$l=5$	$\delta_{n,l,j} = 0,001$	-49,576 MHz
$l=6$	$\delta_{n,l,j} = 0,0006$	-29,745 MHz
$l=7$	$\delta_{n,l,j} = 0,0003$	-14,873 MHz

TABLE I.1 – Défaut quantique au second ordre du rubidium 85. Les valeurs entre $l = 0$ et $l = 3$ sont des valeurs expérimentales. Elles sont extraites entre $l = 0$ et $l = 2$ de Meschede [147], pour $l = 3$ de Han et al. [145] et pour $l = 4, 5, 6, 7$ de Nussenzveig [148].

On retrouve que plus le nombre quantique associé au moment cinétique orbital l est grand, moins la probabilité de présence de l'électron près du cœur atomique est grande, plus l'on se rapproche alors du potentiel coulombien et plus $n_{eff} \rightarrow n$ ($\delta_{n,l,j} \rightarrow 0$). Pour $l \geq 4$, la structure fine n'est plus prise en compte, le coefficient $\alpha_l^{(2)}$ devenant négligeable. Grâce à ces valeurs et en prenant finalement en compte la masse réduite de l'électron de l'atome de rubidium, on est en mesure de calculer le spectre de l'atome de rubidium en champ nul et constater l'ordre de grandeur de ces corrections en énergie. La Figure I.19

représente les différents niveaux présents dans le voisinage (± 50 GHz) de la multiplicité $n = 51$. Les déplacements dus aux défauts quantiques sont considérables pour les niveaux s , p et d , dépassant l'écart intermultiplicités. Pour les niveaux g et de l supérieurs, la levée de dégénérescence est très limitée et ces niveaux ne sont donc pas représentés sur ce graphique par souci de lisibilité.

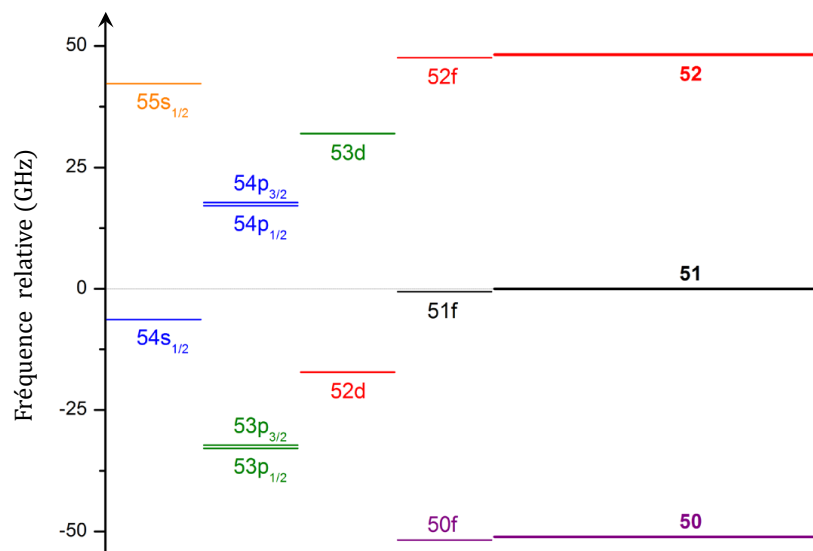


FIGURE I.19 – Spectre du rubidium 85 en champ nul dans le voisinage (± 50 GHz) de la multiplicité $n = 51$. Les défauts quantiques sont représentés jusqu'à $l = 3$, car la différence d'énergie n'est plus visible - à cette échelle - pour des niveaux de moment cinétique orbital plus élevé. La référence d'énergie est la multiplicité $n = 51$. Dès $l = 2$, le défaut quantique induit des variations d'énergie supérieures à l'écart entre deux multiplicités.

I.3.2.c Non-invariance du vecteur de Laplace-Runge-Lenz

Nous avons vu la place centrale qu'occupait l'invariance du vecteur de Laplace-Runge-Lenz dans la description de la structure des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Remarquons ici que pour les états de faible moment cinétique orbital pénétrant le cœur atomique formé de $Z - 1$ électrons des couches intérieures complètes, le potentiel s'écarte de sa forme coulombienne et le vecteur de Laplace-Runge-Lenz n'est plus une constante du mouvement, ou autrement dit, l'opérateur réduit $\hat{\mathbf{A}}$ ne commute plus avec le hamiltonien du système. Reliée à la direction du grand-axe de l'orbite képlérienne elliptique (voir équation (I.11)), l'invariance de \mathbf{A} signifie que ce grand-axe garde une direction constante et que l'orbite est donc fermée. Dans le cas de non-invariance, les orbites de Sommerfeld précessent et la dégénérescence des états d'un même n ayant des l différents est levée. La fréquence de précession de l'axe de l'orbite devient une nouvelle fréquence caractéristique du problème.

I.3.3 Rubidium en champ électrostatique

En champ nul, la non-invariance du vecteur de Laplace-Runge-Lenz ainsi que le rôle central du moment cinétique $\hat{\mathbf{L}}$ dans les considérations sur la pénétrabilité du cœur atomique, font de la base sphérique une base privilégiée. Le hamiltonien en champ nul \hat{H}_0 n'étant plus diagonal dans la base des états paraboliques, le calcul de l'effet Stark par diagonalisation « brutale » du hamiltonien $\hat{H}_0 - q\mathbf{F}_{st} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ s'effectuera par le calcul des éléments de matrice de l'opérateur dipôle atomique $\hat{\mathbf{d}}$ dans la base des états propres $|n, l, j, m_j\rangle$. En effet, nous avons introduit avec le modèle du défaut quantique la structure fine de l'atome qu'il convient de prendre en compte pour les états de très faible moment cinétique orbital, d'où l'ajout d'un quatrième nombre quantique dans l'« étiquetage » des niveaux atomiques associé à la projection de \hat{J}_z .

L'opérateur moment cinétique total $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ commutant avec le hamiltonien, on peut toujours comme en (I.33) séparer la fonction d'onde ψ_{n,l,j,m_j} en une dépendance radiale et une dépendance angulaire. On obtient pour l'élément de matrice :

$$\langle n, l, j, m_j | \hat{\mathbf{d}} | n', l', j', m'_j \rangle = q \langle n, l, j, m_j | r \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} | n', l', m', m'_j \rangle \quad (\text{I.160})$$

$$= q \langle l, j, m_j | \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} | l', j', m'_j \rangle \int r^2 dr R_{n,l}^*(r) r R_{n',l'}(r) \quad (\text{I.161})$$

La partie angulaire, qui prend en compte cette fois-ci le spin de l'électron, se calcule grâce aux coefficients de Clebsch-Gordan. Quant à la partie radiale, elle diffère de celle calculée pour l'atome d'hydrogène à cause de la modification du potentiel « vu » par l'électron de valence près du cœur atomique. Le calcul numérique de cette dépendance radiale s'effectue par une méthode dite *de Numerov* [31, 141] qui consiste à considérer qu'au-delà d'un rayon r_0 le potentiel reste coulombien. L'électron étant avec une grande probabilité³¹ hors de ce rayon r_0 , on néglige pour le calcul de l'élément de matrice la contribution où le potentiel n'est pas coulombien et on cherche les solutions convergentes à l'équation de Schrödinger radiale (I.34), avec la même condition limite en $r \rightarrow \infty$, mais dont l'énergie est celle fixée par le défaut quantique.

Grâce au calcul de ces éléments de matrice, on peut alors pour chaque valeur champ électrique - toujours dirigé suivant l'axe (Oz) - écrire la matrice du hamiltonien total $\hat{H}_0 - q\mathbf{F}_{st} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ et la diagonaliser numériquement afin d'obtenir les expressions des vecteurs propres et des valeurs propres correspondant aux niveaux d'énergie de l'atome de rubidium. Par ailleurs, le champ électrique \mathbf{F}_{st} étant selon l'axe (Oz), le hamiltonien Stark ne couple que les états de même m_j ou de même m . Ainsi, la diagonalisation du hamiltonien total s'effectue à m donné. Un niveau de faible moment cinétique orbital l affecté par le défaut quantique est donc $2l + 1$ fois dégénéré.

31. En effet, comme précisé dans l'analyse de la Figure I.3 page 33, la fonction d'onde est essentiellement localisée loin du cœur atomique.

I.3.3.a Calcul numérique des niveaux d'énergie de l'atome de rubidium

Une conséquence du défaut quantique est de diminuer le degré de dégénérescence d'une multiplicité n , les niveaux de faible moment cinétique orbital $l \leq 4$ étant repoussés vers le rouge. Ainsi, même s'il n'affecte en champ nul que les niveaux de faible moment cinétique orbital, il a tout de même une influence sur les autres niveaux, moins nombreux dans la multiplicité.

La Figure I.20 représente les spectres Stark pour l'atome d'hydrogène **(a)** et pour l'atome de rubidium **(b)**, tous deux obtenus par diagonalisation du hamiltonien pour différentes amplitudes du champ électrique statique F_{st} entre 0 et 0,3 V/cm. C'est en effet la gamme de champ électrique d'intérêt pour l'excitation laser des atomes de Rydberg qui sera présentée au chapitre suivant, pour laquelle il est essentiel de bien connaître le spectre Stark.

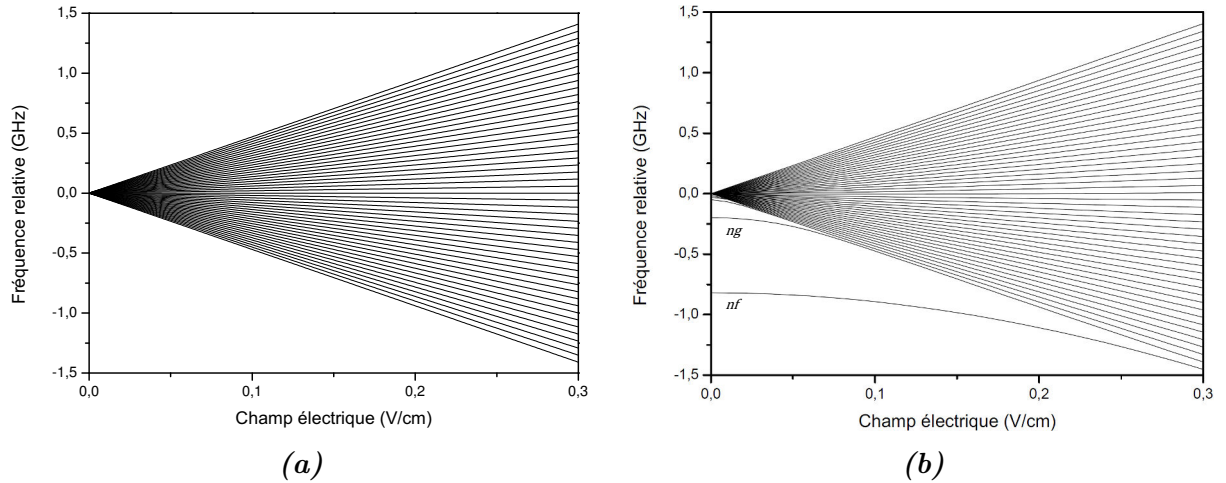


FIGURE I.20 – Ouverture de la multiplicité Stark $n = 51$ pour les niveaux $m = 2$ dans le cas de l'atome d'hydrogène **(a)** et de l'atome de rubidium **(b)** où les défauts quantiques sont pris en compte jusqu'aux niveaux $l = 7$ pour la diagonalisation du hamiltonien $\hat{H}_0 - q\mathbf{F}_{st} \cdot \hat{\mathbf{r}}$.

Sur le spectre Stark de l'atome d'hydrogène, on observe, dû au degré élevé de dégénérescence de la multiplicité égal à n^2 , un effet Stark linéaire dès de très faibles champs électriques statiques. On remarque au contraire sur le spectre du rubidium, un départ quadratique pour les niveaux affectés par le défaut quantique qui sont exclus de la multiplicité. L'ouverture de la multiplicité Stark demeure, elle, linéaire. Ainsi, cette différence de courbure provoque un rapprochement des niveaux en bordure de multiplicité, poussés vers le rouge par effet Stark, et des niveaux $|n, g\rangle$ et $|n, f\rangle$ ³², qui rejoignent progressive-

32. Pour les niveaux $5 \leq l \leq 7$, l'effet du défaut quantique est si faible qu'il produit une levée de dégénérescence en champ nul négligeable devant l'effet Stark dès lors que le champ électrique n'est plus nul.

ment la multiplicité. Les niveaux $|n, s\rangle$, $|n, p\rangle$ et $|n, d\rangle$ sont trop éloignés de la multiplicité en champ nul pour présenter de tels comportement vis-à-vis de la multiplicité du même n . Avec l'augmentation du champ électrique statique, les niveaux f et g rejoignent la multiplicité - les effets du défaut quantique se gommant relativement à l'effet Stark croissant. A partir de ce champ, les états $m \geq 3$ sont hydrogénoïdes. Pour les états $m \leq 2$, il manquera - pour ces champs électriques de quelques V/cm - trois niveaux $m = 0$, deux niveaux $m = 1$ et un niveau $m = 2$ dû à l'effet du défaut quantique bien supérieur sur les niveaux $|n, s\rangle$, $|n, p\rangle$ et $|n, d\rangle$. Le spectre Stark pour ces valeurs de m demeurera pour tout champ électrique très irrégulier.

Remarque : Nous avons au cours de ce premier chapitre eu le souci d'insister sur les vertus complémentaires des bases des états sphériques et paraboliques. Ce spectre Stark est une nouvelle occasion d'entendre cette dialectique entre les états sphériques et paraboliques. Aux plus faibles champs électrostatiques, le modèle du défaut quantique fait des états sphériques une base de choix. A plus fort champ, l'effet Stark favorise la base des états paraboliques et les états propres sont alors (aux contaminations induites par l'effet Stark quadratique près) les états paraboliques.

A champ électrique constant, on aime à classer les niveaux de la multiplicité par m croissants, $0 \leq m \leq n - 1$. La Figure I.21 représente schématiquement les niveaux pour un champ électrique tel que les niveaux $|n, f\rangle$ et $|n, g\rangle$ ont réintégré la multiplicité. Cette représentation permet de constater tout d'abord que les niveaux de plus basse énergie et de plus faible nombre quantique magnétique m ne sont pas, comme pour $m \geq 3$, des niveaux $n_1 = 0$. Par ailleurs, les transitions entre ces niveaux, c'est-à-dire $|n, n_1 = 3, m = 0\rangle \rightarrow |n, n_1 = 2, m = 1\rangle$ et $|n, n_1 = 2, m = 1\rangle \rightarrow |n, n_1 = 1, m = 2\rangle$, ne sont pas résonantes avec les transitions hydrogénoïdes entre deux niveaux voisins $\Delta m = \pm 1$ pour $m \geq 3$. Néanmoins, et cela malgré l'absence du niveau $n_1 = 0$ dans la colonne des niveaux $m = 2$, il est appréciable de constater que ces niveaux $m = 2$ en bord de multiplicité sont quasi-réguliers et en particulier que la transition $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle \rightarrow |n, n_1 = 0, m = 3\rangle$ est quasi résonante pour $n \sim 51$ avec les transitions d'échelle suivantes en bord de multiplicité. Cette heureuse quasi-résonance nous permet, pour la diagonale de niveaux la plus basse, de considérer le modèle de l'échelle quasi harmonique de spin valable depuis $m = 2$ jusque $m = n - 1$.

Conclusion

Après une approche quelque peu historique sur le modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène, qui fut l'occasion d'introduire un certain nombre d'outils et de considérations essentielles de symétrie, nous avons montré qu'un traitement quantique de l'atome d'hydrogène en champ nul faisait naturellement - par des arguments de symétrie associés à la séparabilité des équations de Schrödinger - émerger les bases des états propres sphé-

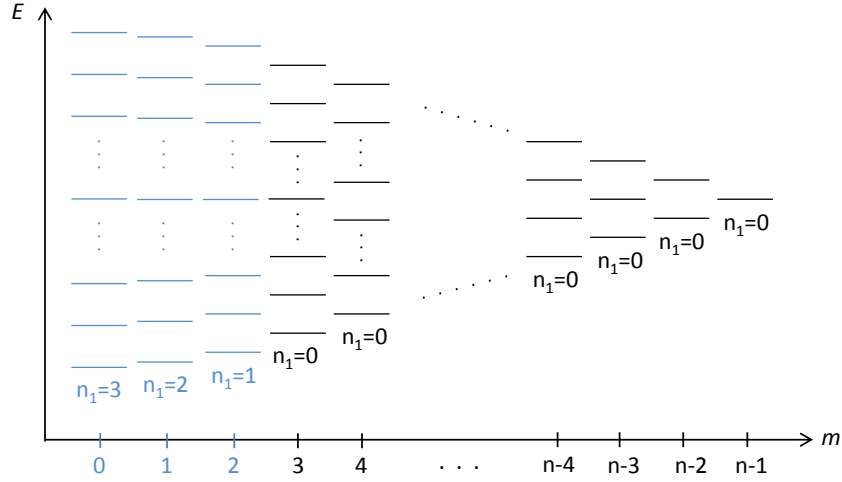


FIGURE I.21 – Représentation schématique des niveaux de la multiplicité $n = 51$ pour l'atome de rubidium en champ électrique statique tel que les niveaux $|51, g\rangle$ et $|51, f\rangle$ ont déjà rejoint la multiplicité. Au-delà de $m = 3$ (niveaux en noir), les niveaux ont un comportement hydrogénoïde et les transitions $\Delta m = \pm 1$ sont toutes dégénérées. Pour les $m \leq 2$ (en bleu), l'absence de certains niveaux due au défaut quantique modifie l'allure du spectre. Malgré l'absence d'un niveau, les niveaux d'énergie $m = 2$ en bord de multiplicité sont à peu près réguliers. La transition $|51, n_1 = 1, m = 2\rangle \rightarrow |51, n_1 = 0, m = 3\rangle$ est ainsi sensiblement dégénérée avec les transitions d'échelle suivantes.

riques et paraboliques. L'utilisation de la base parabolique découplée permet de montrer que les états atomiques, au sein d'une certaine multiplicité associée au nombre quantique principal n , peuvent être décrits par deux nombres quantiques m_1 et m_2 , valeurs propres (à un facteur \hbar près) de deux opérateurs $\hat{J}_{1,z}$ et $\hat{J}_{2,z}$, associés à deux moments cinétiques de même norme.

La symétrie cylindrique du problème de l'atome d'hydrogène en champ électrique statique extérieur fait de cette base des états paraboliques une base de choix pour traiter perturbativement la levée de dégénérescence des n^2 niveaux d'une même couche n par effet Stark. Au premier ordre, la structuration linéaire des niveaux Stark d'une multiplicité permet d'identifier différentes échelles harmoniques finies de niveaux, sur lesquelles on peut alors, à partir des composantes des opérateurs $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$, définir des *opérateurs d'échelle*, de montée \hat{J}^+ et de descente \hat{J}^- . On montre alors que la composante σ_+ d'un rayonnement radiofréquence couplé à l'atome en champ électrique statique ne se couple qu'à l'opérateur $\hat{\mathbf{J}}_1$ - l'autre composante de la polarisation σ_- se couplant à l'autre opérateur moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2$. Ceci permet par un réglage de la polarisation du champ radiofréquence de confiner la dynamique de l'atome dans un sous-espace formellement identique aux états propres d'un unique moment cinétique qui serait « porté » par l'atome. Nous pouvons donc utiliser les outils de représentation des moments cinétiques pour décrire l'état de notre atome. Ainsi, l'état atomique peut être représenté sur une sphère de Bloch dite généralisée par la fonction Q associée ou de manière équivalente par sa distribution de Wigner - les deux représentations contenant toute l'information incluse dans l'opérateur densité.

Finalement, nous avons présenté les limites de cette description du problème en introduisant les déviations au modèle linéaire dues tout d'abord à la prise en compte des effets Stark d'ordres supérieurs au sein de l'atome d'hydrogène, puis des déviations dues aux effets de pénétrabilité et de polarisabilité³³ du cœur atomique des états de Rydberg de l'atome de rubidium. Les résultats de la diagonalisation complète du hamiltonien en champ électrostatique, prenant en compte les défauts quantiques des niveaux de faible moment cinétique orbital, ont ensuite été présentés. Outre la description de l'atome couplé, en champ électrostatique, à un champ radiofréquence polarisé σ_+ par un moment cinétique « porté » par celui-là, ces résultats nous sont en particulier utiles pour deux choses essentielles dans ce manuscrit :

- i. Ils nous permettent de connaître précisément la position en énergie des états de faible moment cinétique orbital à faible champ électrostatique pour l'excitation laser des états de Rydberg, puis pour l'optimisation de la préparation des atomes de Rydberg circulaires à partir des niveaux de faibles m , procédés qui seront décrits au chapitre suivant.
- ii. La prise en compte des effets Stark linéaire, quadratique et cubique seront aussi essentiels afin de décrire les dynamiques de l'état de l'atome initialement dans l'état circulaire couplé à un champ radiofréquence polarisé en champ électrique élevé, dans le cadre des expériences de métrologie quantique. Lors de la manipulation des atomes de Rydberg depuis le niveau circulaire d'une multiplicité fixée, ces données nous confirment donc le comportement hydrogénoïde de l'atome depuis le niveau circulaire jusqu'aux niveaux $m \geq 3$, permettant ainsi de considérer la rotation du moment cinétique $j = 25$ pour $-23 \leq m \leq 25$.

33. Les déviations dues aux effets de polarisabilité du cœur atomique ont été négligées.

Chapitre II

Génération d'états de Rydberg circulaires

Le tact dans l'audace, c'est de savoir jusqu'où on peut aller trop loin.

Jean Cocteau, Le Coq et l'Arlequin (1918)

Sommaire

II.1 Montage expérimental	89
II.1.1 Environnement cryogénique	89
II.1.2 Four à atomes de rubidium	92
II.1.3 Montage mécanique du cœur expérimental	94
II.1.4 Contrôle du champ électrique statique	100
II.1.5 Lasers d'excitation des niveaux de Rydberg	107
II.1.6 Champs radiofréquences	110
II.2 Génération d'états de Rydberg circulaires	116
II.2.1 Excitation optique des états de Rydberg	116
II.2.2 Rotation de l'axe de quantification	119
II.2.3 Préparation d'atomes de Rydberg circulaires par passage adiabatique	121
II.2.4 Séquence expérimentale	125
II.3 Réglage de la polarisation des champs radiofréquences	127
II.3.1 Limites expérimentales d'un réglage purement électronique . .	127
II.3.2 Réglage de la polarisation du champ RF à 230 MHz	128
II.3.3 Réglage de la polarisation du champ RF à 530 MHz	131
II.3.4 Signaux d'ionisation	131
II.3.5 Polarisation du champ RF et optimisation du passage adiabatique	133

Les états de Rydberg circulaires sont véritablement « l'outil de base » de l'ensemble de nos travaux. Si notre équipe possède une longue expérience dans la génération et la manipulation de ces états si particuliers [149,150], la méthode ici utilisée est récente et a en particulier été décrite très en détail dans un chapitre entier de la thèse de doctorat de mon collègue Adrien Signoles [103]. Le principe de leur génération est résumé Figure II.1.

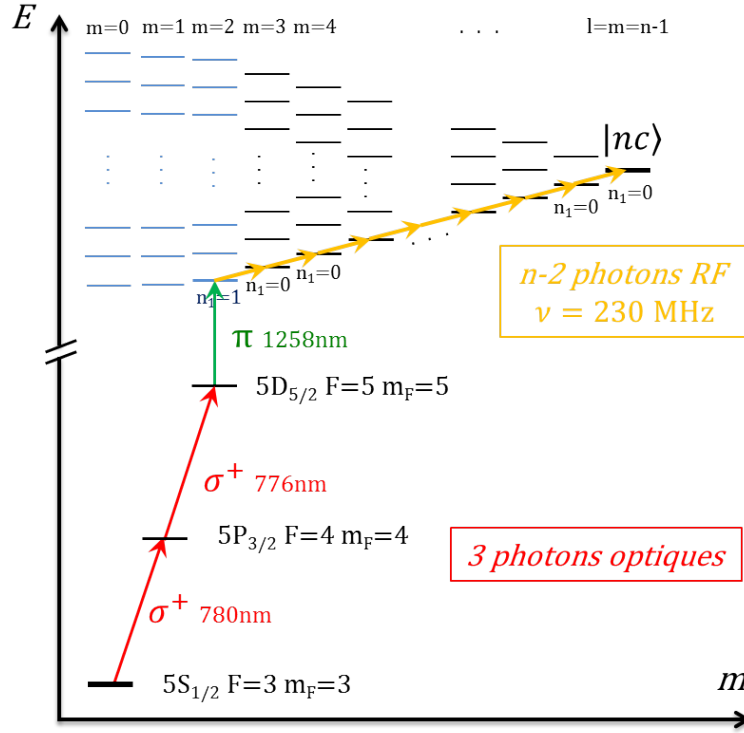


FIGURE II.1 – Principe de génération d'atomes de Rydberg circulaires. A une première phase d'excitation optique depuis le niveau fondamental du rubidium vers le niveau $|nf, m=2\rangle$ d'une couche n , suit un passage adiabatique où l'atome absorbe $n-2$ photons radiofréquences polarisés afin de gagner le niveau circulaire $|nc\rangle$.

La méthode se décompose en deux étapes principales, que nous ne ferons ici qu'esquisser afin de motiver les éléments du montage expérimental. La première étape consiste en une excitation optique à trois photons, qui porte l'atome depuis le niveau fondamental du rubidium vers le niveau $|nf, m=2\rangle$ d'une couche n . La seconde étape consiste en l'absorption de $n-2$ photons radiofréquences à 230 MHz, afin que l'atome gagne en *quanta* de moment cinétique orbital et que la trajectoire semi-classique de l'électron de valence devienne effectivement circulaire. Durant cette seconde phase, l'atome est couplé, à champ électrique statique non nul, à un rayonnement radiofréquence polarisé qui permet à l'atome d'atteindre adiabatiquement le niveau circulaire $|nc\rangle$. Les ingrédients majeurs de nos expériences sont donc les lasers d'excitation, ainsi que le champ radiofréquence polarisé, le tout associé à un bon contrôle du champ électrique statique.

L'objet de ce chapitre est de présenter dans un premier temps le dispositif expérimental dans son ensemble, puis d'exposer plus en détail le réglage de la polarisation des champs radiofréquences à 230 MHz et à 530 MHz. La pureté de la polarisation des champs radiofréquences est un élément clé de la manipulation des états de spin. Elle est en particulier importante pour la génération d'atomes de Rydberg circulaires par passage adiabatique. Cette méthode sera décrite plus précisément dans la troisième partie du chapitre. Trois annexes sont associées à ce chapitre. L'annexe B décrit en détail le montage optique dans son ensemble ainsi que les méthodes d'asservissement des trois lasers utilisés pour l'excitation optique des états de Rydberg. L'annexe C traite de la génération de champs micro-ondes au sein du montage expérimental, ainsi que la temporisation (temps d'allumage et d'extinction) des impulsions micro-ondes. Finalement, l'annexe D présente le montage électronique relatif à la génération de champs radiofréquences à 230 MHz, utilisé dans le cadre des expériences sur la dynamique Zénon quantique.

II.1 Montage expérimental

La pièce maîtresse du montage expérimental est le cryostat à hélium 4, autour duquel s'articulent différents éléments, comme le four à atomes, les lasers, les champs micro-ondes et radiofréquences, la haute tension, etc. Le montage mécanique placé au cœur du cryostat est le lieu même de l'expérience. Cette section s'attache à présenter ces différents constituants et montages, mécaniques et électroniques.

II.1.1 Environnement cryogénique

Le cryostat fut à l'origine construit par notre équipe afin de disposer d'un cryostat dédié à la caractérisation des nouvelles cavités supraconductrices usuellement utilisées dans nos expériences d'électrodynamique en cavité, avant de les insérer au sein des cryostats où ces expériences en elles-mêmes ont lieu. Ce « cryostat de test » a changé de destinée, tout au moins pour le moment : en son sein se sont déroulées les expériences de physique atomique (sans cavité supraconductrice) décrites dans ce manuscrit.

II.1.1.a Description du cryostat

Le cœur du montage mécanique est constitué de pièces de cuivre massives qu'il convient de conserver à basse température pour deux raisons principales :

- l'obtention d'un vide très inférieur à 10^{-7} mbar par cryo-pompage, limitant ainsi les collisions des atomes de Rydberg avec le gaz résiduel ;

- l'obtention d'un faible champ thermique à 51 GHz, afin que le temps de vie des niveaux de Rydberg soit grand devant le temps de vol des atomes.

Le cryostat, représenté Figure II.2 page 91, est donc constitué de deux réservoirs, d'azote et d'hélium, qui constituent une réserve d'énergie frigorifique, que l'on doit réapprovisionner fréquemment. A l'intérieur de l'enceinte à vide du cryostat, l'isolation thermique est étagée : le réservoir d'azote liquide constitue un premier écran thermique à 77 K, protégeant le réservoir d'hélium liquide à 4,2 K. On trouve au fond du réservoir d'hélium une plaque de cuivre thermalisée à la température de l'hélium sur laquelle sont fixés trois interrupteurs thermiques au bout desquels est accroché le montage mécanique (électrodes, détecteur, etc.). Les interrupteurs thermiques sont des cylindriques interdigités en cuivre à l'intérieur de tubes en acier inoxydable remplis d'hélium gazeux et contenant des charbons actifs qui permettent d'isoler thermiquement le montage mécanique en dessous d'une certaine température afin de descendre en dessous de 4,2 K. Pour cela, on dispose d'une boîte en cuivre appelée « boîte 1K » qui peut être alimentée en hélium par le biais d'un capillaire et pompée. Ce cryogénérateur à hélium 4 permet¹ d'atteindre 1 K.

Tous les éléments qui descendent dans le cryostat (câbles micro-ondes, câbles radiofréquences, haute tension) sont thermalisés au niveau des différents points d'ancrage thermiques, afin de répartir au mieux les pertes thermiques entre les différentes sources de puissance frigorifique. Par ailleurs, sur la hauteur du réservoir d'hélium cylindrique sont placés quatre écrans thermiques en cuivre pour limiter le rayonnement thermique entre le haut de ce réservoir à la température ambiante et le fond rempli d'hélium liquide à 4,2 K.

Sur la Figure II.2, les écrans hélium et azote dans la partie basse du cryostat, aussi appelés *jupes* hélium et azote, sont respectivement percés de trous de 5 mm et 3 mm afin de disposer d'accès optiques jusqu'au cœur du cryostat. Quant à l'enceinte extérieure, elle dispose de hublots étanches.

II.1.1.b Contraction et stabilité thermiques

Au cours des expériences de métrologie décrites dans ce manuscrit, nous avons décidé de ne pas pomper sur la « boîte 1K » afin d'atteindre cette température symbolique du Kelvin. Par sécurité, nous avons en effet pour pratique d'éteindre en fin de journée le

1. A l'époque des expériences sur la dynamique de Zénon quantique, le cryostat présentait une légère fuite au niveau de la « boîte 1K » qui pouvait être contenue par pompage sur le tube central, atteignant dès lors la température du Kelvin, non absolument nécessaire pour ces expériences.

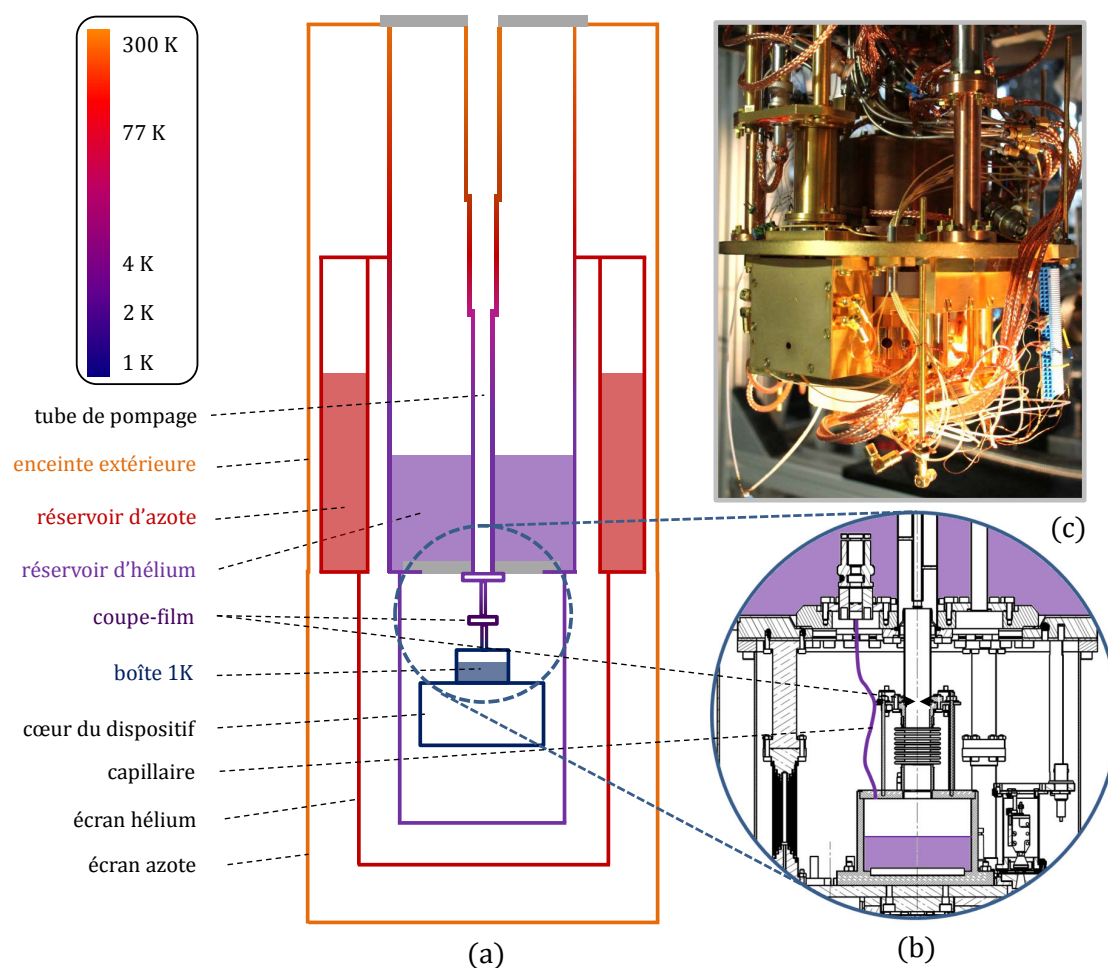


FIGURE II.2 – Structure du cryostat. **(a)** Schéma général de l'enceinte. Les couleurs des différentes parois indiquent localement leurs températures. **(b)** Zoom sur le capillaire qui alimente en hélium liquide « la boîte 1K » en prélevant l'hélium dans le réservoir. La « boîte 1K » est ensuite pompée par le tube central à mi-hauteur duquel se trouve une pièce à arêtes tranchantes, le coupe-film, empêchant l'hélium superfluide de remonter. **(c)** Photo du cœur du dispositif. Les pièces mécaniques sont recouvertes d'or pour garantir un bon contact thermique et augmenter leur albédo.

cryogénérateur à ^4He , ce qui a pour conséquence de remplir la « boîte 1K » de son hélium liquide à 4,2 K et de faire remonter le montage mécanique à la température de 4,2 K. Ceci risquant d'occasionner des contraintes mécaniques répétées à chaque allumage et extinction du pompage, nous avons préféré disposer d'une température constante et très stable à 4,2 K, atteinte dès lors que se trouvent quelques millimètres d'hélium liquide au fond du réservoir.

Par ailleurs, il est flagrant au regard de la Figure II.3 que la hauteur de cryostat est très grande à l'échelle de l'écartement entre les électrodes générant le champ électrique statique au cœur de l'expérience. Comme décrit précédemment, le montage mécanique est « accroché » au bas du réservoir d'hélium, qui ne dispose que d'une autonomie d'une

cinquantaine d'heures. Ainsi, la carte de températures des parois de ce réservoir évolue en fonction de la quantité d'hélium contenue dans le réservoir et modifie différentiellement les contractions thermiques dudit réservoir en inox. Nous avons vérifié que les contractions différentielles entre un réservoir d'hélium vide et ce même réservoir plein étaient négligeables par rapport à la section du jet atomique collimaté de l'ordre du millimètre.

II.1.2 Four à atomes de rubidium

Nous disposons d'un jet thermique horizontal d'atomes de rubidium issus d'un four dont le principe est simple : au cœur d'une enceinte percée, du rubidium liquide est chauffé afin de former une vapeur atomique générant par collimation, grâce à une succession de diaphragmes dès la sortie de l'enceinte, un jet atomique horizontal. Le modèle de four traditionnellement utilisé dans l'équipe a été cependant légèrement repensé afin de pouvoir recharger le four en rubidium sans occasionner de modifications notables sur l'alignement de ce four avec le cryostat. Toute modification de l'alignement du jet atomique par rapport à l'axe de l'expérience nécessite un réglage *ab initio* des champs radiofréquences et une nouvelle calibration des champs électriques à l'intérieur de la structure, qui nuisent à la continuité des résultats. Les expériences de métrologie présentées dans ce manuscrit ont été effectuées à l'échelle de l'année et le montage fut assez robuste pour résister à un renouvellement de la cellule de rubidium.

Le modèle du four actuel est représenté Figure II.4 page 95. La partie de gauche constitue le four proprement dit : c'est dans ce volume formant une croix, prolongé sur la droite par un tube de diamètre moindre et percé en son extrémité par un trou de 0,7 mm, que réside la vapeur atomique. Une cellule de cinq grammes de rubidium est ainsi insérée par le dessous du dispositif au niveau du tombac vertical tout à gauche exactement entre la pique et le tube creux représenté en blanc. Une fois la cellule insérée et l'ensemble du dispositif pompé, on brise la cellule de verre par compression du tombac. L'ensemble de l'enceinte est alors chauffé à près de 200°C à l'aide de colliers chauffants de manière à générer une vapeur atomique à une pression de vapeur saturante de l'ordre de 5 Pa garantissant un flux atomique suffisant. Dans cet équilibre liquide-vapeur, le liquide reste confiné au bas du tombac alors que la vapeur remplit l'enceinte.

La différence avec l'ancien modèle [151] est d'avoir placé la réserve de rubidium en bas du dispositif (et pas au-dessus de l'axe atomique horizontal), ce qui d'une part n'occasionne aucune coulée de rubidium liquide et d'autre part permet une évacuation des débris de verre par voie basse en ouvrant simplement le bouchon placé au bas du tombac. Par ailleurs, en plaçant le four en surpression d'azote, évitant ainsi l'oxydation du rubidium déposé à l'intérieur de l'enceinte, cette ouverture du bouchon peut se faire avec

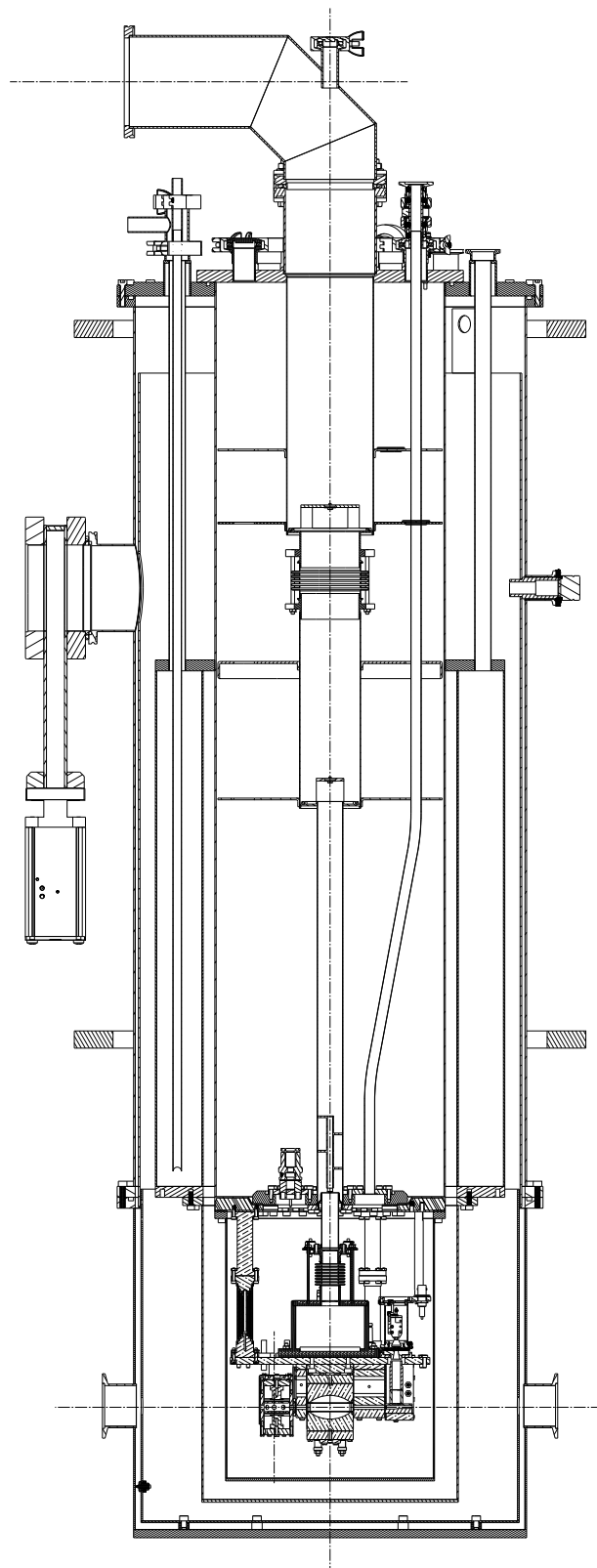


FIGURE II.3 – Plan du cryostat. L'expérience atomique prend place tout en bas. La majeure partie du cryostat est constituée des réservoirs d'azote et d'hélium.

l'ensemble du dispositif en place permettant ainsi l'évacuation de la cellule brisée usagée et le remplacement par une nouvelle cellule juste au prix d'un nouveau joint en cuivre ! Si la procédure est effectuée rapidement et délicatement afin de ne pas modifier l'orientation de l'axe du four, cette méthode a l'intérêt, tout au moins pour une itération, de rendre l'épuisement bisannuel du four moins pénalisant pour la continuité des expériences. Ce type de four est en effet de durée de vie relativement courte, car seul un angle solide d'environ 10^{-4} stéradian conduit les atomes à traverser l'ensemble du dispositif jusqu'au détecteur, ce qui est très faible devant le cône d'émission du trou [151]. Tous les six mois, le four du cryostat devait être déconnecté et démonté dans son intégralité, afin d'extraire les débris de verre et la cellule. Il fallait ensuite laver les pièces recouvertes de rubidium oxydé, puis remonter le four et finalement l'aligner de nouveau.

Le reste du dispositif est sans nouveauté. A l'issue du tube mince percé à l'extrémité de l'enceinte se trouve un cône percé afin de précollimater le jet atomique qui passe ensuite à travers quatre diaphragmes successifs thermalisés à la température de 80 K par contact thermique avec un réservoir d'azote liquide, réduisant ainsi les sources secondaires autour de l'axe du jet atomique. Le réservoir d'azote sur le dessus de cette seconde chambre permet d'atteindre par cryopompage un vide de quelques 10^{-7} mbar comparable à celui régnant à l'intérieur du cryostat. Ainsi, le four peut être directement connecté au cryostat par l'intermédiaire d'un tombac et d'une vanne à tiroir permettant la manipulation indépendante des deux entités. Le tombac souple donne la possibilité, grâce à un jeu de vis de réglage, d'orienter finement l'axe du four avec l'axe du montage au sein du cryostat. A cette fin, sur la bride tout à gauche de la croix du four est fixé un hublot permettant d'aligner à l'aide d'une lunette optique ces deux axes.

II.1.3 Montage mécanique du cœur expérimental

Le montage mécanique placé au sein du cryostat avait à l'origine pour objectif d'être une étape intermédiaire avant la mise en service future d'une nouvelle expérience, dite « expérience fontaine », dans laquelle des atomes lents sont préparés dans les états de Rydberg circulaires directement au centre de la cavité, et non plus en amont de la cavité, au sein d'une « boîte à circulariser », comme dans le montage historique de notre groupe.

Pour cette étape intermédiaire, nous avons intégré au montage un jeu de huit électrodes, entourant une cavité en cuivre non recouverte de niobium, permettant de générer un champ radiofréquence polarisé.

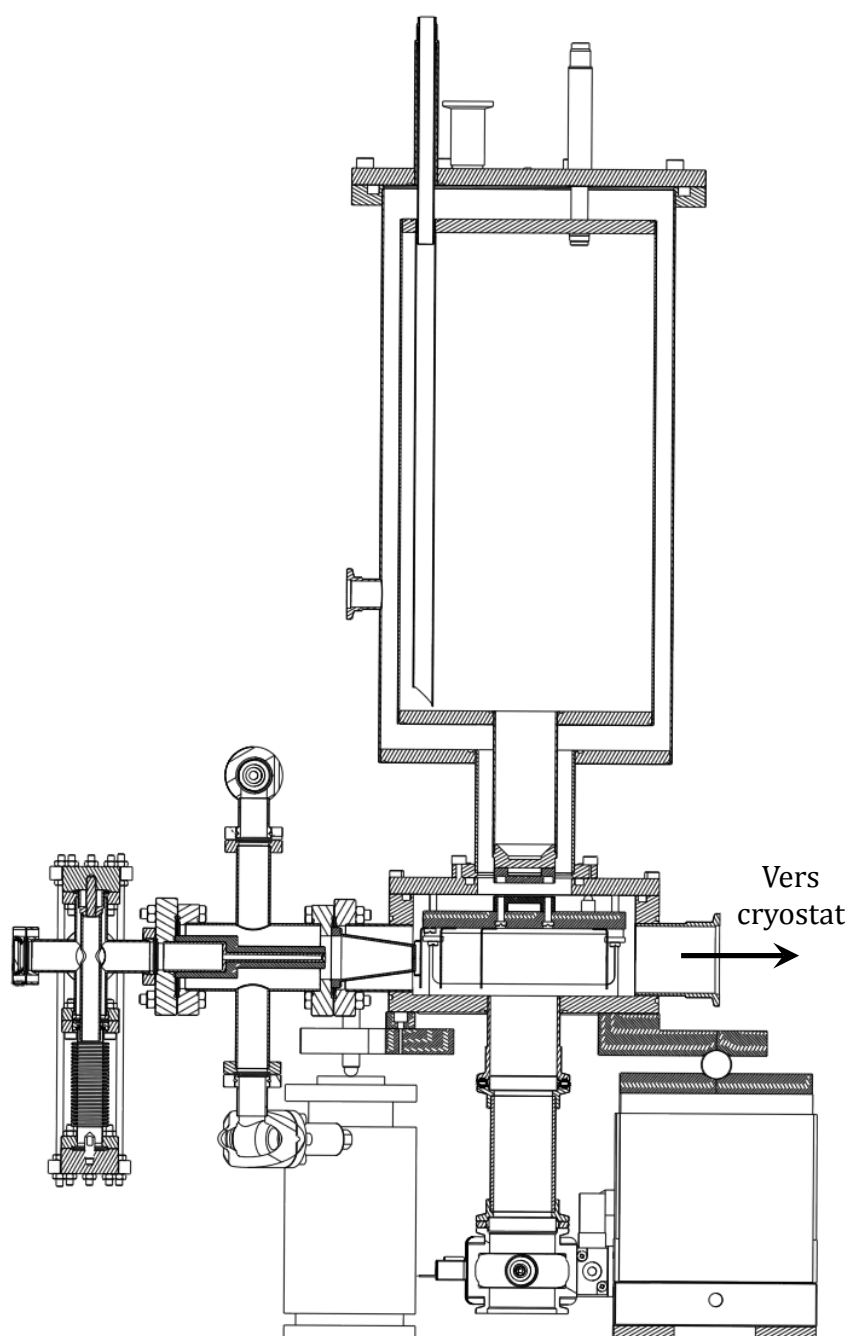


FIGURE II.4 – Plan de la source atomique. La croix à l'extrémité gauche du dispositif constitue la chambre primaire du four dans laquelle est insérée au niveau du tombac vertical bas la cellule en verre de rubidium, qui sera brisée une fois le dispositif clos et étanche. Des colliers chauffants placés en divers endroits bien choisis permettent d'élever la température aux environs de 200°C . Les atomes sortant de cette première enceinte percée au niveau du tube de diamètre moindre placé à la droite de la croix passent ensuite successivement par le trou d'un cône puis de quatre diaphragmes thermalisés par conduction à la température de l'azote liquide, permettant ainsi de réduire les sources secondaires émettant dans l'angle solide utile à l'expérience. Le réservoir d'azote est positionné au dessus de la seconde chambre qui est pompée par une pompe turbomoléculaire par le dessous. Le support est monté sur des vis de réglage permettant d'orienter finement l'axe du jet atomique. Le four est connecté au cryostat par l'intermédiaire d'un tombac et d'une vanne à tiroir.

II.1.3.a Description du montage expérimental

Comme décrit précédemment, un four produit un jet horizontal d'atomes de rubidium collimaté par une succession de diaphragmes. Ce four est directement connecté au cryostat et les atomes issus du four traversent alors le dispositif représenté Figure II.5. Les atomes traversent dans un premier temps la « boîte à circulariser », qui permettait historiquement de préparer en amont de la cavité les atomes dans les états de Rydberg circulaires par application simultanée d'un champ radiofréquence et d'un champ magnétique statique [148, 152]. Cet élément nous a servi lors des premiers essais de génération d'atomes de Rydberg circulaires avec les électrodes radiofréquences à nous assurer que la détection d'atomes circulaires (produits au sein de cette boîte) était fonctionnelle. Elle nous a permis de différencier les problèmes de préparation d'atomes de Rydberg circulaires des problèmes de détection. Cette boîte à circulariser est restée en place au sein du montage actuel, mais n'a plus d'utilité. Lors de toutes les expériences présentées dans ce manuscrit, elle ne sera jamais utilisée.

Puis les atomes pénètrent une structure qui préfigure la future « boîte à photons » de l'expérience *Fontaine* : deux électrodes massives en cuivre se font face et sont entourées d'un jeu de huit électrodes sur lesquelles on peut appliquer un champ radiofréquence. Toutes ces pièces du montage sont recouvertes d'une fine couche d'or afin que la surface de ces électrodes ne s'oxyde pas et donne lieu à un potentiel plus « propre ».

Dès la sortie de cette structure, les atomes atteignent le détecteur constitué de deux électrodes qui produisent un champ électrique ionisant arrachant l'électron de valence de l'atome ensuite guidé par des lentilles électrostatiques vers un *channeltron*, où un phénomène d'avalanche transforme l'électron unique en un signal électrique mesurable par notre électronique. La valeur du champ ionisant nous renseigne sur le niveau d'excitation électronique de l'atome juste avant ionisation, et permet plus précisément de distinguer le nombre quantique principal de l'état atomique.

II.1.3.b Montage des électrodes « radiofréquences »

La structure des électrodes permettant de manipuler l'état interne des atomes de Rydberg doit constituer une sorte de cocon au sein duquel règne un champ électromagnétique idéalement stable et homogène. Un certain nombre d'accès latéraux sont cependant nécessaires afin de faire pénétrer les atomes au sein de la structure ainsi que les lasers d'excitation, ce qui constitue en soi des sources de variation du champ régnant au centre de la structure. Ainsi, deux accès sont nécessaires pour l'entrée et la sortie des atomes traversant la structure, ainsi que deux axes optiques perpendiculaires afin d'exciter avec

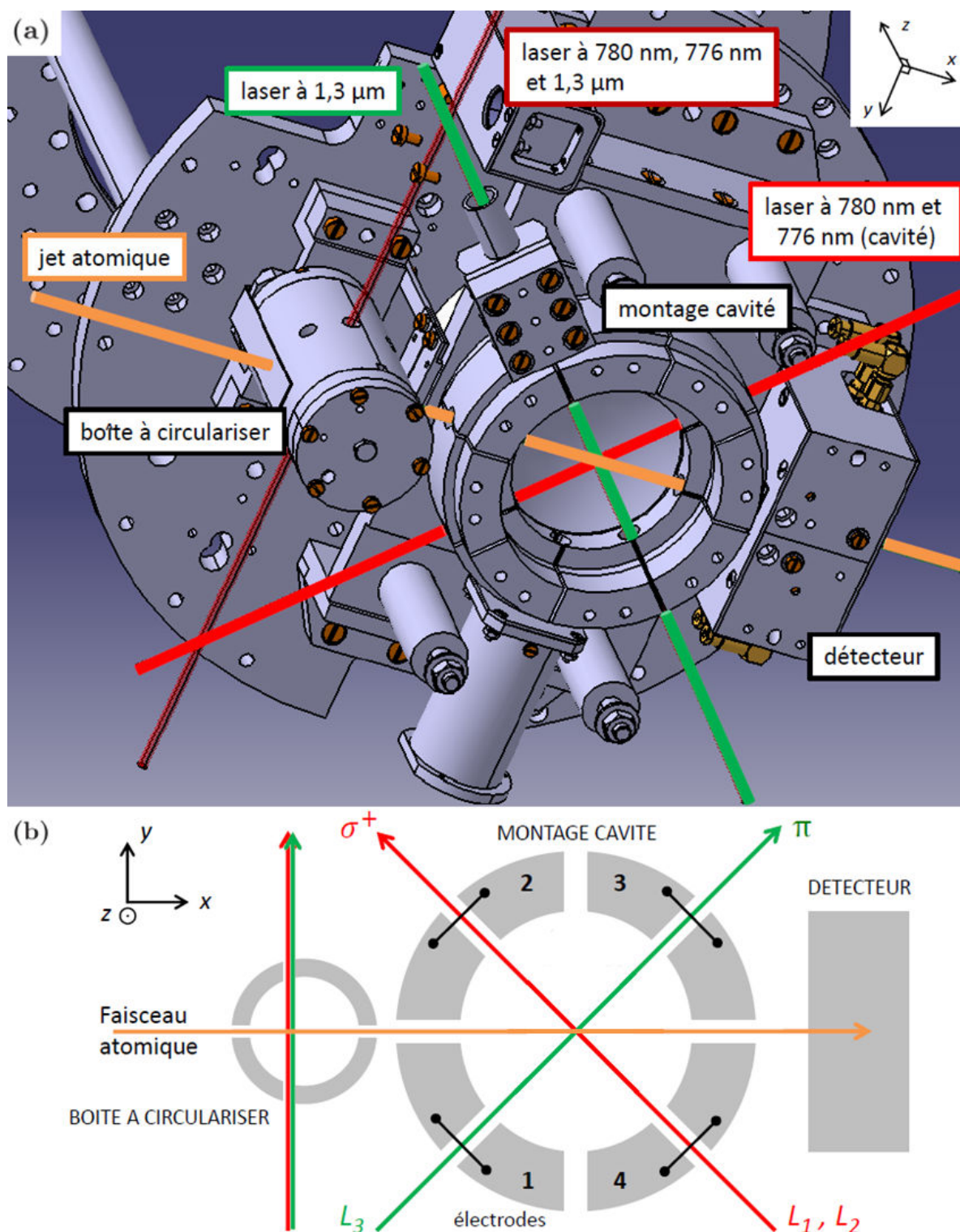


FIGURE II.5 – Schéma du montage expérimental. (a) Vue de dessous du montage mécanique. Assemblé sur une plaque en contact thermique avec la boîte 1K, il est traversé par le jet atomique et les lasers d'excitation au niveau de « la boîte à circulariser » ou des électrodes. Pour respecter les polarisations σ^+ des lasers rouges et π du laser infrarouge, les lasers se propagent dans des directions orthogonales. (b) Coupe en vue de dessus. L'axe de quantification est orienté le long des lasers rouges pour l'étape de circularisation.

les polarisations laser idoines les atomes vers des états de Rydberg de faible moment cinétique orbital.

De ce cahier des charges est née la structure présentée Figure II.6. Les électrodes radiofréquences représentées en bleu sont isolées électriquement les unes des autres par un espace d'un millimètre qui a pour but principal de réduire les effets capacitifs entre les électrodes (ainsi que d'éviter la génération d'arc électrique lors de l'utilisation de haute tension pour la détection des atomes intra-cavité dans le montage *Fontaine*). Un trou de diamètre 6 mm entre deux électrodes voisines permet le passage des lasers et des atomes. Pour absorber les contractions thermiques différentielles lors de la mise à froid entre le laiton des vis et l'araldite (1 cm d'épaisseur) sur laquelle elles reposent afin de les isoler capacitivement du support, les électrodes sont maintenues par le dessus à l'aide de ressorts (voir Figure II.6 (b)). La structure actuelle n'est donc pas symétrique. Cependant aucun effet parasite n'a été observé par rapport au montage symétrique (plus instable mécaniquement) où les électrodes sont encadrées par le haut et par le bas par deux couches d'araldite. En particulier, aucun couplage handicapant entre les deux électrodes horizontales et les huit autres électrodes radiofréquences n'a été constaté.

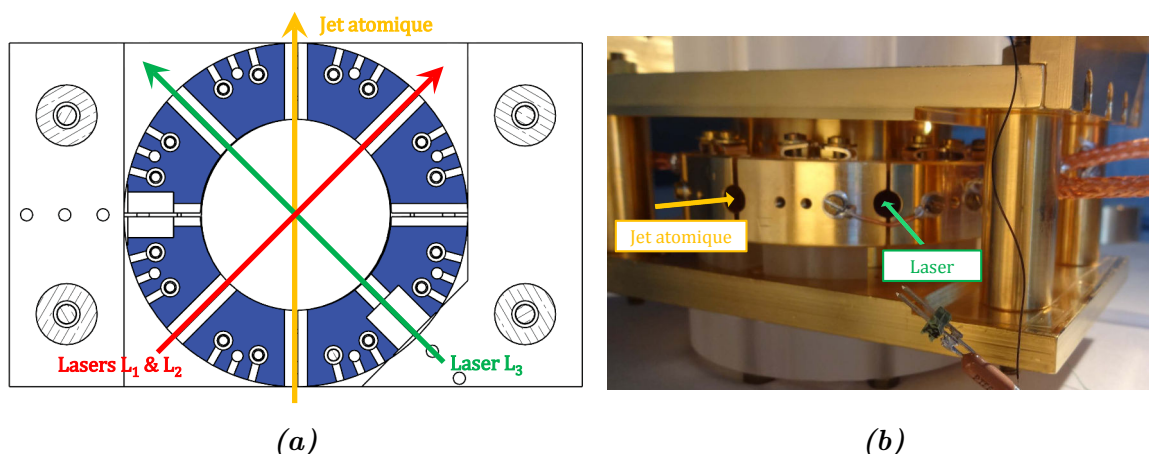


FIGURE II.6 – Plan des électrodes montées sur leur support. (a) Coupe vue de dessus. Les huit électrodes sont représentées en bleu. On note les quatre accès latéraux permettant la traversée des atomes et des lasers. (b) Photo du montage cavité. On peut noter la liaison entre deux électrodes voisines afin de former une paire. Ce bloc est fixé au dessous d'une plaque thermalisée à la température de l'hélium liquide. Elle s'insère entre la « boîte à circulariser » et le détecteur.

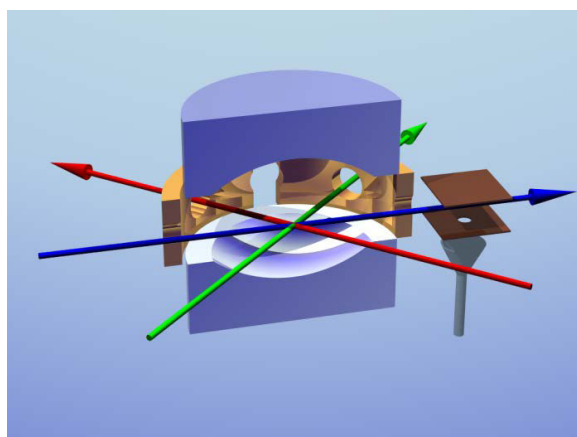
Des simulations ont par ailleurs montré qu'un jeu de quatre paires d'électrodes suffit pour produire un champ radiofréquence d'une polarisation très pure au centre de la structure. Nous avons donc opté pour un synthétiseur quatre voies et relié les huit électrodes pour former quatre paires. Dorénavant, lorsque nous parlerons d'« une électrode » dans ce manuscrit le terme désignera en fait une de ces paires d'électrodes.

Ces électrodes dites « radiofréquences » servent aussi malgré leur dénomination à la création d'un champ électrique statique dans le plan horizontal du montage. Ce champ directeur contenu dans le plan horizontal de ces électrodes est primordial pour l'excitation des atomes dans les niveaux de Rydberg de faible moment cinétique orbital. En effet, l'excitation optique en trois échelons nécessite pour des raisons que nous préciserons plus tard deux excitations optiques σ^+ et une excitation π , d'où la nécessité d'avoir un champ directeur dans le plan des lasers, aligné avec les lasers polarisés σ .

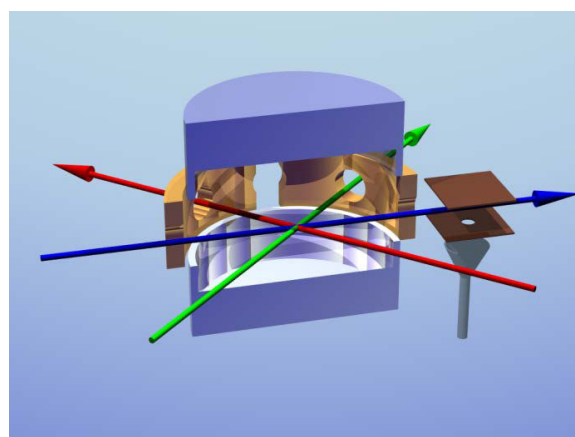
II.1.3.c Montage des électrodes « miroirs »

Ces deux électrodes, positionnées l'une au dessus de l'autre et entre lesquelles passe le jet atomique horizontal, servent à générer le champ électrique statique vertical, nécessaire en particulier à la génération d'un champ radiofréquence polarisé σ par les quatre électrodes radiofréquences latérales. Ces deux « miroirs » sont électriquement isolés des autres électrodes et pour garantir le contact thermique, ils sont fixés sur des supports en saphir (visibles Figure II.6 (b)), qui est un bon isolant et qui possède néanmoins une bonne conduction thermique.

Deux formes d'électrodes « miroirs » ont été utilisées dans nos expériences. La Figure II.7 représente la géométrie des deux montages correspondants, ainsi qu'une photographie des deux versions d'électrodes. Les électrodes concaves dites « sphériques » ont l'intérêt de reproduire de très près la forme toroïdale des véritables miroirs supraconducteurs qui seront à terme utilisés au sein du montage « Fontaine ». Ces électrodes furent utilisées dans les expériences de dynamique Zénon quantique, commentées au troisième chapitre de ce manuscrit. Ces électrodes sphériques ont l'inconvénient de générer un champ non homogène sur le trajet des atomes. Les électrodes planes tendent à résoudre ce problème en réduisant les gradients de champ électrique vus par les atomes lors de leur propagation, ce qui aura pour conséquence d'accroître le temps de cohérence de nos états quantiques. Le fond des électrodes planes a été choisi à même hauteur que le fond des électrodes sphériques, ceci afin de prévenir l'effet délétère d'une éventuelle poussière électrostatique sur une des électrodes, qui créerait un champ dont l'amplitude au centre du montage diminue avec la distance entre les électrodes planes. Ces électrodes planes ont été utilisées dans le cadre des expériences de métrologie quantique décrites aux chapitres IV et V.



(a) Montage avec électrodes sphériques



(b) Montage avec électrodes planes



(c) Photo des électrodes sphériques



(d) Photo des électrodes planes

FIGURE II.7 – Électrodes sphériques / Électrodes planes. On présente un schéma du montage ainsi qu'une photo des électrodes dans le cas des électrodes de forme sphérique, simulant les futur miroirs supraconducteurs ((a) et (c)) et dans le cas des électrodes planes qui seront utilisées pour les expériences de métrologie ((b) et (d)).

II.1.4 Contrôle du champ électrique statique

Il va de soi que le fait d'envisager des expériences de métrologie quantique et en particulier d'électrométrie réclame une attention aigüe et constante portée au contrôle du champ électrique intra-cavité et autant que faire se peut à sa stabilité à long terme. Ceci relève de la gageure au sein d'un montage macroscopique traversé par des atomes à près de 250 m/s, le tout dans un contexte cryogénique.

II.1.4.a Trois paires d'électrodes DC

Le cœur de l'expérience *ie* le volume entre les électrodes est cependant bien isolé de l'extérieur et ces mêmes électrodes permettent d'avoir un contrôle précis du champ électrique, au centre de la structure particulièrement. La disposition des électrodes permet de générer un champ électrique de n'importe quelle direction et intensité (les potentiels sont limités à 10 V sur les électrodes) : les quatre électrodes « radiofréquences » contrôlent le champ électrique dans le plan horizontal et les deux électrodes « miroirs » la composante verticale du champ. En s'appuyant sur la numérotation des électrodes de la Figure II.5 page 97 **(b)**, on crée un champ électrique aligné avec les lasers L_1 et L_2 dans le plan horizontal en appliquant des potentiels uniquement sur les électrodes 2 et 4. Pour générer un champ statique vertical, il convient de n'appliquer des potentiels que sur les électrodes « miroirs ». Pour des raisons de symétrie, nous avons décidé d'appliquer des potentiels opposés sur les électrodes se faisant face. Par exemple, afin de générer un champ statique vertical de 1 V/cm, il nous faut d'après nos calibrations appliquer des potentiels d'environ $\pm 1,35$ V sur les électrodes « miroirs ».

II.1.4.b Profil de champ électrique et gradients

Les caractéristiques du champ électrique statique produit par les électrodes « miroirs » sont capitales. En effet, les manipulations clés que nous ferons subir aux atomes de Rydberg au sein de la cavité s'effectueront par couplage de ces atomes à un champ radiofréquence polarisé σ_+ généré par les quatre électrodes dites à ce titre « radiofréquences ». Afin que ces électrodes puissent générer un champ d'une telle polarisation, l'axe de quantification se doit d'être vertical et les potentiels nécessaires seront donc portés par les électrodes « miroirs ». L'analyse du profil de champ électrique et des gradients « vus » par les atomes lors de leur traversée de la cavité est essentielle.

Quelle que soit la géométrie des électrodes « miroirs », la propagation des atomes de Rydberg sur une certaine distance dans la cavité engendre inévitablement des variations du champ électrique « vu » par les atomes durant leur temps de vol. Tous les éléments clés du montage étant précisément positionnés à l'aide de pions, il est possible de calculer très précisément la carte de champ électrique effective à l'intérieur de la structure. La Figure II.8 représente la valeur du champ électrique F sur l'axe du jet atomique lorsqu'un potentiel de ± 1 V est appliqué sur les électrodes « miroirs » dans les géométries sphérique **(a)** et plane **(b)** présentées précédemment Figure II.7 page 100. Pour ce calcul, l'ensemble de la géométrie du montage est prise en compte, fixant ainsi les conditions aux bords.

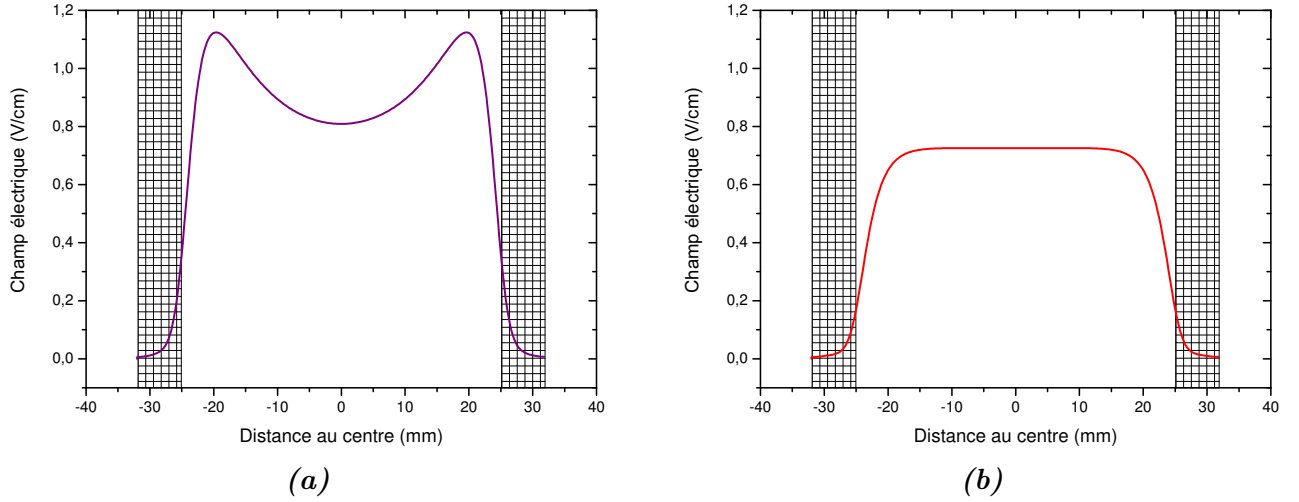


FIGURE II.8 – Profil de champ électrique F le long de la trajectoire atomique lorsqu'un potentiel de $\pm 1V$ est appliqué sur les électrodes « miroirs » dans les géométries sphérique (a) et plane (b) présentées précédemment Figure II.7 page 100. Les zones hachurées représentent l'espace inter-électrodes « radiofréquences » à l'entrée et à la sortie de la « cavité ».

Naturellement, avec les électrodes planes le profil du champ électrique dans la cavité le long de l'axe atomique est globalement plus plat ! Mais finalement, seul le profil local au centre de la cavité nous importe. En effet, l'ensemble des manipulations effectuées sur les atomes auront lieu autour du centre de la cavité durant un temps de l'ordre de $30 \mu s$. Les inhomogénéités de champ électrique vues par les atomes traversant la cavité à une vitesse de $v_0 = 250 \text{ m/s}$ sont donc au maximum à intégrer sur une distance de 8 mm . *A fortiori*, si l'on considère les instants où l'atome est dans une superposition d'état - durant 400 ns au maximum dans les expériences de métrologie quantique - la distance utile où les inhomogénéités de champ électrique sont à intégrer se réduit à $250 \text{ m/s} \times 400 \text{ ns} = 0,1 \text{ mm}$! Finalement, c'est la dispersion spatiale du paquet atomique excité par le laser L_3 de $0,5 \text{ mm}$ de diamètre qui est le paramètre limitant.

La Figure II.9 présente le calcul du gradient longitudinal de champ électrique $\Delta_{\parallel} F/F$ sur la trajectoire balistique des atomes traversant la structure dans les géométries sphérique (a) et plane (b). Sur les graphiques en insert, qui sont des zooms sur le centre de la cavité entre $\pm 8 \text{ mm}$, on voit que la valeur des gradients dans les zones utiles de l'expérience est deux ordres de grandeur plus faible avec les électrodes planes. Ainsi, dans l'esprit des expériences de métrologie quantique où l'idée est de préparer des superpositions d'état de taille maximale, le choix des électrodes planes est essentiel.

Ce calcul ne traite pas des inhomogénéités suivant l'axe perpendiculaire au jet atomique contenu dans le plan horizontal, qui sont, par symétrie, identiques à celles présentées le long de l'axe de propagation, ni même des inhomogénéités suivant l'axe vertical, qui sont, pour le compte, légèrement plus élevées que celles présentées plus haut mais sont

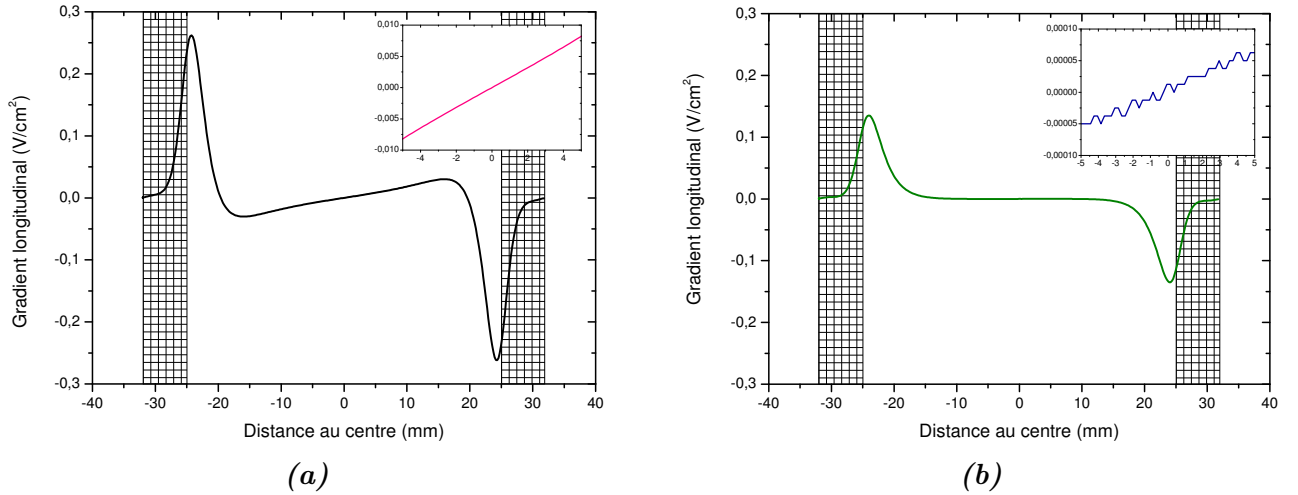


FIGURE II.9 – Gradient de champ électrique longitudinal $\Delta_{\parallel} F/F$ le long de la trajectoire atomique dans les géométries sphérique (a) et plane (b) présentées précédemment Figure II.7 page 100. Les zones hachurées représentent l'espace entre les électrodes d'entrée et de sortie de la « cavité ». Les graphiques en insert sont des agrandissements sur le centre de la cavité entre ± 8 mm. L'aspect accidenté de la courbe bleue en insert (b) est un artefact de discrétisation.

largement structurées par les électrodes dites « radiofréquences » et très peu sensibles à la forme des électrodes sphériques ou planes. Dans le détail, il conviendrait, afin d'évaluer numériquement le temps de cohérence d'une certaine superposition d'état du moment cinétique, de prendre en compte les gradients de champ électrique suivant toutes les directions et de calculer la forme précise de l'intersection des trois cylindres formés par les lasers et le jet atomique à convoluer avec la section gaussienne des faisceaux lasers et la distribution des atomes au sein du jet.

Néanmoins, il en ressort que l'utilisation de miroirs plan réduit considérablement ces inhomogénéités dans le plan horizontal et permettent d'envisager la réalisation d'expériences métrologiques. La réduction d'un facteur 100 de la valeur des gradients horizontaux de champ électrique au centre de la structure offre une marge de manœuvre appréciable.

II.1.4.c Champ parasite et dérive à long terme

Afin de mesurer un champ résiduel parasite, rien de tel que la spectroscopie micro-onde d'une transition en champ nul très sensible à l'effet Stark différentiel. La transition $|n, f\rangle \rightarrow |n \pm 1, g\rangle$ est une bonne candidate. En effet, le défaut quantique du niveau f étant plus élevé que celui du niveau g , le niveau f est toujours plus bas en énergie que le niveau g (pour un n donné), comme on le voyait Figure I.20 page 82. Plus rapproché de la multiplicité, le niveau g possède une énergie qui s'en trouve d'autant plus courbée à faibles champs électriques (effet Stark quadratique) comparativement à celle du niveau

f . Ceci fait que cette transition possède un effet Stark différentiel important. Ainsi, pour une transition montante $|n, f\rangle \rightarrow |n+1, g\rangle$ par exemple, la fréquence de la transition micro-onde, bien connue théoriquement, sera maximale en champ nul, ce qui nous fournit un critère simple de l'existence d'un champ parasite.

Expérimentalement, on porte par absorption de trois photons optiques les atomes dans l'état de Rydberg désiré, prenons ici par exemple le niveau $|52f, n_1 = 1, m = 2\rangle$. A la suite de cette étape de préparation effectuée à champ électrique statique nonnul permettant de distinguer spectralement le niveau $|52f, n_1 = 1, m = 2\rangle$ visé ($F = 0, 236 \text{ V/cm}$), on décroît en $1 \mu\text{s}$ le potentiel des électrodes jusqu'à une valeur qu'on estime correspondre à un champ intra-cavité nul, puis on effectue une impulsion micro-onde dont on balaye la fréquence. Si l'on mesure de manière hebdomadaire le spectre de la transition $|49f\rangle \rightarrow |50g\rangle$ pour un réglage des potentiels sur les six électrodes identiques, on observe les résultats présentés Figure II.10.

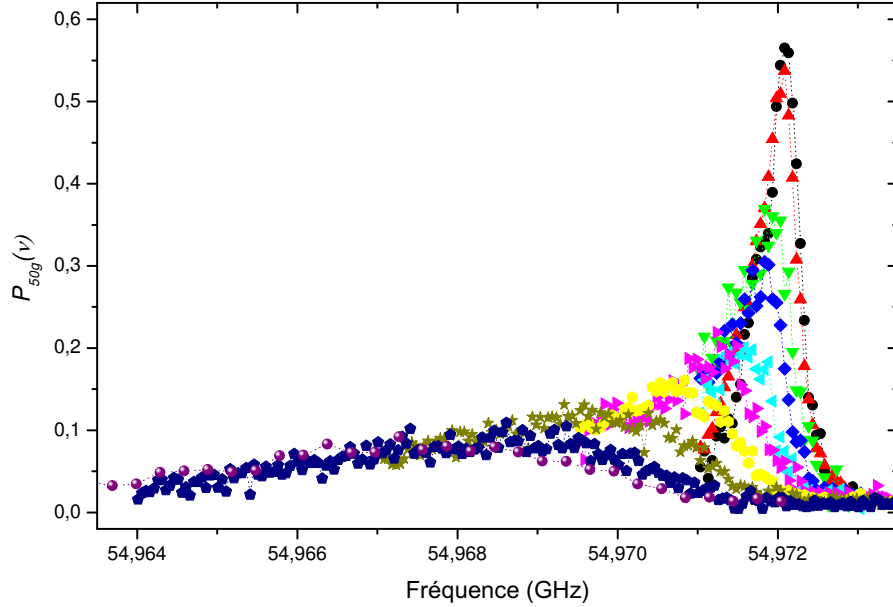


FIGURE II.10 – Dérive du champ électrique observée par spectroscopie micro-onde de la transition $|49f\rangle \rightarrow |50g\rangle$. Les spectres sont mesurés en dates du 29 septembre 2014 (noir); 2 (rouge), 10 (vert), 14 (bleu), 23 (cyan) et 30 (magenta) octobre 2014; 5 (jaune) et 28 (jaune foncé) novembre 2014; 19 décembre 2014 (bleu foncé) et 5 janvier 2015 (violet).

On constate alors une dérive du champ électrique à hauteur de $1,2 \mu\text{V/cm}$ par jour, ce qui témoigne de l'existence de champs parasites lentement variables dans le temps. Cette dérive de la valeur absolue du champ électrique statique, du même ordre de grandeur que les petits champs électriques que nous désirons mesurer par électrométrie quantique, n'est pas néfaste. Nous présenterons en effet au dernier chapitre une méthode permettant de mesurer différentiellement un incrément de champ électrique de l'ordre du $\mu\text{V/cm}$ sur un temps de l'ordre de la centaine de microsecondes, très court devant la journée.

En sus de la valeur de la dérive journalière de champ électrique, ce suivi hebdomadaire d'un même signal spectroscopique a permis de constater que le champ électrique correspondant dérivait linéairement avec le nombre de jours calendaires, et non avec le nombre de jours de travail. En effet, entre le 29 septembre 2014 (courbe noire Figure II.10 et le 5 janvier 2015 (courbe bleue foncé), certaines journées ont été consacrées à des simulations. Durant ces journées, la température du four n'a pas été élevée à haute température, la vanne entre le four et le cryostat était fermée et aucun atome de rubidium n'a donc traversé le cryostat. Ceci semble indiquer que cette dérive n'est pas due à un dépôt de rubidium causé par le jet atomique traversant l'expérience, mais à un phénomène à l'intérieur du cryostat. L'hypothèse d'un dégazage des parties chaudes de l'enceinte interne du cryostat est donc très probable. En particulier, les hublots d'accès laser dégazent dans un angle solide pénétrant l'intérieur de la « cavité ». Une solution serait de placer des hublots thermalisés au niveau des jupes azote et hélium afin d'avoir un accès optique, empêchant la pénétration de particules, susceptibles ensuite de se charger. Dans le cryostat *Fontaine*, ce choix technologique a été retenu.

II.1.4.d Annulation des champs parasites

Afin de contenir cette dérive, nous compensons de manière hebdomadaire ce champ électrique parasite à l'aide des six électrodes, qui permettent de générer un champ électrique de direction arbitraire, donc de compenser un champ parasite suivant n'importe quelle direction, en n'importe quel point de l'espace intra-cavité. L'objectif est de compenser un champ résiduel à l'endroit de la structure où le couplage de l'atome à un champ radiofréquence polarisé σ_+ va permettre la préparation d'atome de Rydberg circulaire. Cette annulation des champs parasites en particulier horizontaux permet de définir proprement l'axe de quantification qui définira la polarisation du champ radiofréquence. Pour cela, nous nous appuyons de nouveau sur la spectroscopie micro-onde de la transition $|n, f\rangle \rightarrow |n \pm 1, g\rangle$. Pour une transition descendante $|n, f\rangle \rightarrow |n - 1, g\rangle$, la minimisation du champ électrique résiduel correspondra à un minimum de la fréquence des spectres micro-ondes.

Expérimentalement, à la suite de l'excitation laser des atomes de Rydberg à $F = 0$, 236 V/cm, on décroît le potentiel des électrodes jusqu'à une valeur qui tend à compenser le champ résiduel, puis l'on effectue une impulsion micro-onde dont on balaye la fréquence. Cette impulsion micro-onde d'une durée de 4 μ s s'effectue à l'instant même où les atomes subiront, lors des séquences expérimentales finales, le passage adiabatique permettant de générer les états de Rydberg circulaires. Cette méthode permet donc d'annuler un champ parasite au centre de la cavité et donc de régler le « zéro du champ électrique ». La Figure II.11 illustre cette méthode, en proposant différents spectres réalisés à six champs électriques différents, correspondant à divers potentiels sur les deux électrodes dans l'axe

des lasers L_1 et L_2 . Pour cette figure, l'optimisation du zéro du champ le long de l'axe vertical et le long de l'axe du laser L_3 a déjà été réalisée.

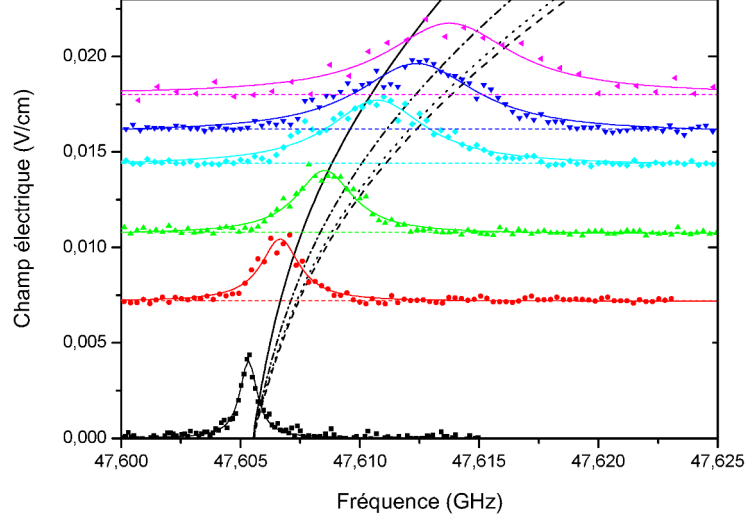


FIGURE II.11 – Annulation des champs parasites par spectroscopie de la transition $|52f\rangle \rightarrow |51g\rangle$. Après avoir annulé les composantes du champ électrique parasite résiduel le long de l'axe vertical et le long de l'axe aligné avec L_3 , la procédure d'obtention du « zéro » du champ électrique est réalisée dans la direction de L_1 . Des voltages symétriques sont imposés aux deux électrodes se faisant face. Les potentiels en question sont 0 mV (magenta), ± 50 mV (bleu), ± 100 mV (cyan), ± 200 mV (vert), ± 300 mV (rouge), ± 500 mV (noir). Le spectre avec potentiels nuls (magenta) indique que le champ résiduel est d'environ 18 mV/cm. En lignes pleines colorées figurent les ajustements gaussiens des signaux spectroscopiques. Par ailleurs, on superpose les simulations numériques calculant la valeur de la transition en fonction du champ électrique (lignes noires).

La fréquence de la transition $|52f\rangle \rightarrow |51g\rangle$ passe bien par un minimum (la courbe est symétrique pour des valeurs du champ électrique négatives²) qui correspond bien à la valeur théorique attendue. L'élargissement du pic de spectroscopie avec l'écart au champ nul est dû à la levée de dégénérescence en m du niveau $|51g\rangle$, non résolue spectralement par notre impulsion micro-onde de 4 μ s. Ainsi, les valeurs pour les différents potentiels sur les électrodes compensant le champ résiduel dans toutes les directions correspondent à la situation où le pic de spectroscopie est le plus fin.

Tout cela nous permet donc d'annuler un champ électrique parasite au sein de la structure. Il convient finalement de noter que cette procédure a pour vertu de réaliser localement le zéro du champ électrique. Ainsi, en effectuant l'impulsion micro-onde à l'instant de la préparation des atomes de Rydberg circulaires lors de la séquence expérimentale, l'objectif est de compenser très précisément un champ résiduel à cet endroit dans la structure et ainsi de définir proprement l'axe de quantification qui définira la po-

2. Notons qu'à cause de ce champ résiduel, la courbe n'est pas symétrique avec le potentiel sur les électrodes. La fréquence de la transition $|52f\rangle \rightarrow |51g\rangle$ est modifiée si l'on échange les potentiels sur les deux électrodes : $\pm V \leftrightarrow \mp V$.

larisation du champ radiofréquence. Cependant, il faut admettre que cette spectroscopie et ce recentrage de la fréquence hebdomadaire ont surtout le statut d'un contrôle, car la dérive est si faible qu'elle n'affecte véritablement que très peu l'orientation de l'axe de quantification et donc la préparation des atomes de Rydberg.

Au terme de cette partie consacrée au contrôle du champ électrique statique, nous avons donc vu à quel point notre montage, constitué de deux électrodes « miroirs » entourées de quatre électrodes « radiofréquences », nous offrait un contrôle pointu de la valeur absolue du champ électrique statique en un point de la cavité. L'insertion du montage dans un environnement cryogénique et la nécessité de présenter quelques ouvertures permettant la pénétration des atomes et des lasers constituent des sources inévitables d'instabilités, comme nous l'avons constaté en mesurant une dérive à long terme du champ électrique statique. Cette dérive étant de très faible ampleur, un contrôle régulier permet de compenser à la fois les champs parasites intra-cavité aux instants de la circularisation des atomes de Rydberg.

II.1.5 Lasers d'excitation des niveaux de Rydberg

Afin de préparer un atome de Rydberg circulaire, il convient tout d'abord d'exciter l'atome de rubidium 85 depuis son niveau fondamental jusqu'à des niveaux de Rydberg, *ie* des niveaux de grand nombre quantique principal n . Dans un second temps, l'atome sera porté dans le niveau de Rydberg circulaire sous l'effet d'un passage adiabatique depuis un état de Rydberg de faible moment cinétique orbital.

II.1.5.a Excitation optique des états de Rydberg

L'excitation des atomes vers les niveaux de Rydberg se fait par l'absorption de trois photons optiques. Cette excitation en trois échelons permet d'atteindre, en vertu des règles de sélection des transitions optiques, l'état $|49f, m = 2\rangle$ selon le processus suivant :

$$5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2} \quad : \lambda_{L_1} = 780,24 \text{ nm} \quad ; \quad (\text{II.1})$$

$$5^2P_{3/2} \rightarrow 5^2D_{5/2} \quad : \lambda_{L_2} = 775,97 \text{ nm} \quad ; \quad (\text{II.2})$$

$$5^2D_{5/2} \rightarrow 49f \quad : \lambda_{L_3} = 1259,19 \text{ nm} \quad . \quad (\text{II.3})$$

Les deux premiers échelons réalisent donc des transitions $\Delta m = +1$ grâce à deux photons σ^+ respectivement à $\lambda_{L_1} = 780,24 \text{ nm}$ et $\lambda_{L_2} = 775,97 \text{ nm}$. Pour ces deux premiers échelons, l'axe de quantification se doit d'être orienté dans la direction de propagation des lasers. Eu égard au montage expérimental reproduit plus avant Figure II.5 page 97, le

champ électrique statique pour l'excitation optique des atomes de Rydberg est généré par les électrodes dites « radiofréquences », qui créent ainsi un champ horizontal aligné avec L_1 et L_2 . Ce champ électrique statique d'excitation permet ensuite au troisième laser L_3 de résoudre spectralement par effet Stark le niveau $|49f, m = 2\rangle$. Pour ce troisième échelon, le photon infrarouge π induit une transition $\Delta m = 0$, qui ne peut être réalisée que par un laser se propageant perpendiculairement à l'axe de quantification, conformément à la configuration des différents lasers Figure II.5 page 97. Il est possible de choisir le niveau $|nf, m = 2\rangle$ dans lequel on souhaite porter l'atome, c'est-à-dire finalement la multiplicité $n \sim 50$ dans laquelle on désire travailler, par simple choix de la fréquence du laser L_3 .

La Figure II.12 reproduit la structure hyperfine du rubidium 85 ainsi que le schéma d'excitation optique des états de Rydberg jusqu'au niveau $|49f\rangle$. La description détaillée du montage laser permettant la réalisation de ces trois échelons est reportée en annexe B.

II.1.5.b Position de l'intersection des lasers

Pour des raisons de symétrie des champs à l'intérieur de la structure et donc d'homogénéité, les manipulations atomiques ont intérêt à se dérouler au centre de la cavité. Les lasers pénétrant dans le cryostat en traversant successivement un hublot, un trou de diamètre $d_1 = 3$ mm au niveau de la jupe azote, et finalement un trou de diamètre $d_2 = 6$ mm formé par deux électrodes voisines reliées entre elles, comme on peut le visualiser sur la Figure II.13 (à gauche), nous avons donc une légère marge de manœuvre sur la position des faisceaux. La manipulation des états de Rydberg suivant dans le temps l'excitation laser, il faut parvenir à ce que l'intersection des lasers et du jet atomique se fasse un peu avant le centre de la cavité.

Comme le schématise la Figure II.13 (à droite), à la limite où les faisceaux rasant le trou de $d_2 = 3$ mm percé dans la jupe azote (traits pleins), l'intersection a lieu $\frac{d_2}{2} \times \sqrt{2} = 2,12$ mm plus avant sur l'axe du jet atomique. Cette situation est idéale, car les atomes à $v_0 = 250$ m/s, étant excités environ 2 mm avant le centre de la cavité, arrivent au centre de la cavité 8 μ s plus tard. Or cet intervalle de temps est exactement le temps nécessaire afin de porter les atomes dans l'état de Rydberg circulaire $|51c\rangle$ et d'être prêt à débiter une expérience de dynamique Zénon quantique ou des manipulations métrologiques par exemple. Par ailleurs, des simulations qui seront présentées plus loin dans le manuscrit (Figure II.15 page 115) montreront que les champs radiofréquences σ_+ générés par deux ou quatre électrodes sont de polarisation plus pure au centre de la cavité. Finalement, et cela est de haute importance pour les expériences de métrologie, le champ créé par les électrodes planes est moins inhomogène au centre de la cavité, comme nous l'avons vu Figure II.8 page 102.

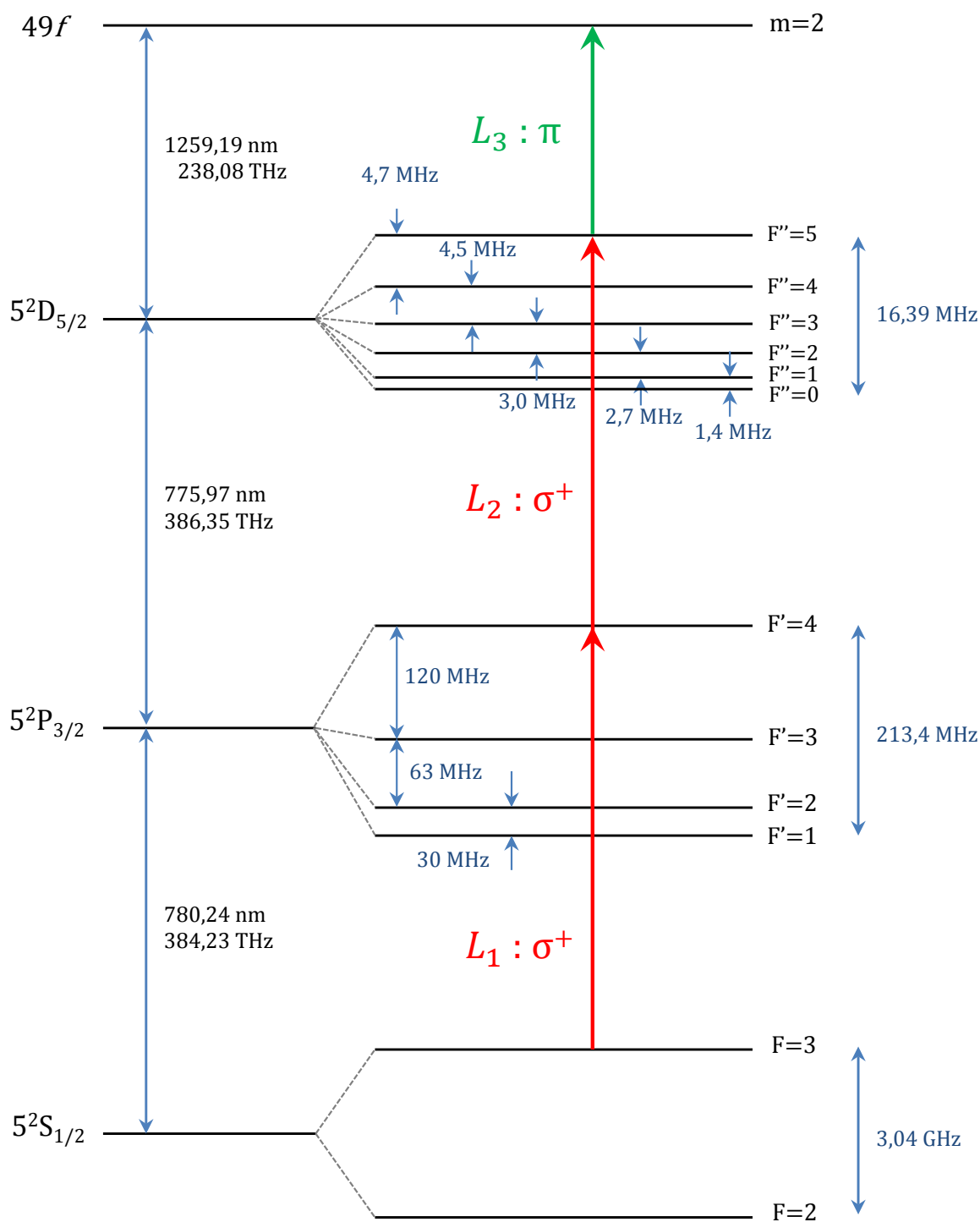


FIGURE II.12 – Schéma d'excitation optique des états de Rydberg, du niveau fondamental $5^2S_{1/2}$ vers le niveau $49f$. L'excitation des atomes vers le niveau de Rydberg $|49f, m = 2\rangle$ se fait par absorption de deux photons optiques σ^+ à 780 nm et 776 nm et d'un photon optique π à $1,3 \mu\text{m}$. Les valeurs des transitions sont extraites de Arimondo et al. [153] et de X. Maître [154]. La position relative des niveaux n'est pas à l'échelle.

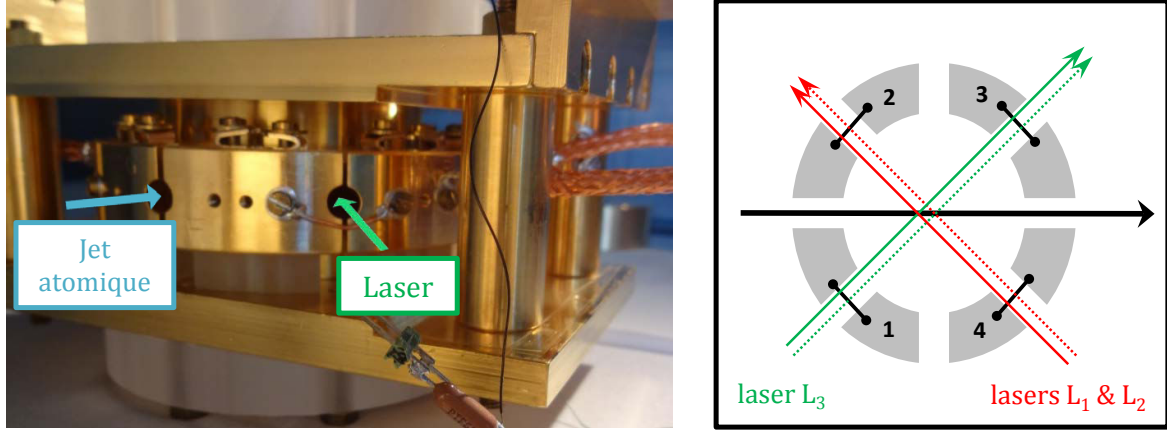


FIGURE II.13 – Insertion des lasers au cœur du montage. Les lasers traversent un trou de diamètre $d = 6$ mm entre deux électrodes reliées entre elles par un fil de cuivre soudé sur des cosses visées sur les électrodes. Nous avons réglé la position des lasers afin qu'ils rasent les électrodes (flèches pleines) et qu'ils s'intersectent plus avant sur l'axe du jet atomique, que s'ils passaient par le centre du trou (flèches en pointillé).

En conclusion, plusieurs arguments présentés plus haut nous incitent à régler l'intersection des lasers à l'intérieur de la cavité le plus en amont de la trajectoire atomique. La marge de manœuvre due aux diamètres des trous que traversent les lasers nous permet d'envisager une manipulation des atomes véritablement au centre de la cavité.

II.1.6 Champs radiofréquences

Deux montages électroniques différents ont été utilisés dans les expériences présentées dans ce manuscrit. Dans le cadre des expériences sur la dynamique de Zénon quantique qui seront décrites au chapitre III, les champs radiofréquences, permettant la génération d'atomes de Rydberg circulaires et la manipulation du moment cinétique \hat{J}_1 en présence d'une mesure Zénon, sont à une fréquence unique de 230 MHz. Les quatre électrodes sont donc connectées au synthétiseur qui génère un rayonnement à cette fréquence sur chacune de ces voies. La description de ce montage est reportée en annexe D. Dans le cadre des expériences de métrologie quantique décrites aux derniers chapitres de ce manuscrit, la génération d'atomes de Rydberg circulaires nécessite toujours un rayonnement radiofréquence à 230 MHz, mais les manipulations du moment cinétique permettant d'obtenir un signal métrologique s'effectueront par couplage à un champ radiofréquence à 530 MHz. Le montage permettant la génération de ces champs radiofréquences polarisés σ_+ à ces deux fréquences fait l'objet de cette partie.

II.1.6.a Montage électronique

Pour les états de Rydberg de nombre quantique principal n proche de 50, si les transitions inter-multiplicités appartiennent au domaine micro-onde, les transitions entre niveaux Stark voisins d’une même multiplicité appartiennent, elles, pour des champs électriques statiques de quelques V/cm au domaine radiofréquence. La géométrie des électrodes « radiofréquences » à l’intérieur du cryostat a été présentée plus haut (Figure II.6 page 98). On présente dans ce paragraphe la version finale du montage électronique hors-cryostat permettant la génération de champ radiofréquence. Ce montage est passé par de nombreuses versions au cours de nos tentatives d’obtention d’un signal métrologique robuste approchant la limite de Heisenberg. Il est à noter que toute modification d’un composant sur la *ligne RF* occasionne des déphasages qui impliquent un nouveau réglage de la polarisation du champ radiofréquence. C’est pourquoi l’ensemble des câbles dans lesquels se propage un signal radiofréquence sont des câbles coaxiaux semi-rigides afin d’obtenir une bonne stabilité des phases.

Un schéma complet du montage électronique est présenté Figure II.14. Le montage électronique associé au champ radiofréquence se décompose en deux *lignes RF* associées aux deux fréquences dont on désire disposer (230 MHz et 530 MHz). La nécessité de disposer de ce jeu de deux fréquences RF dans les expériences de métrologie quantique apparaîtra clairement à la section IV.2 du chapitre IV page 207. Nous nous contentons dans cette partie de décrire le montage électronique nécessaire à la génération des champs radiofréquences polarisés à ces deux fréquences.

i) Ligne RF à 230 MHz

Le champ radiofréquence à 230 MHz est utile à la génération d’états de Rydberg circulaires depuis les états de Rydberg de faible moment cinétique orbital, couramment appelée « circularisation ». Cette circularisation par passage adiabatique proposée initialement par Hulet et Kleppner dès le début des années 80 [155] nécessite, dans le cadre de notre montage expérimental, la génération d’un champ radiofréquence σ_+ de polarisation très pure. Dans le cadre des expériences de dynamique Zénon quantique, comme rapporté dans la thèse de doctorat d’Adrien Signoles [103], ce champ radiofréquence polarisé à 230 MHz fut généré par un jeu de quatre électrodes. Néanmoins, au prix d’un léger compromis sur la pureté du champ radiofréquence, ce champ tournant peut être produit par seulement deux électrodes, numérotées 1 et 2 sur la Figure II.14, en réglant finement le déphasage entre les champs radiofréquences de polarisation linéaire produits par ces deux électrodes une à une.

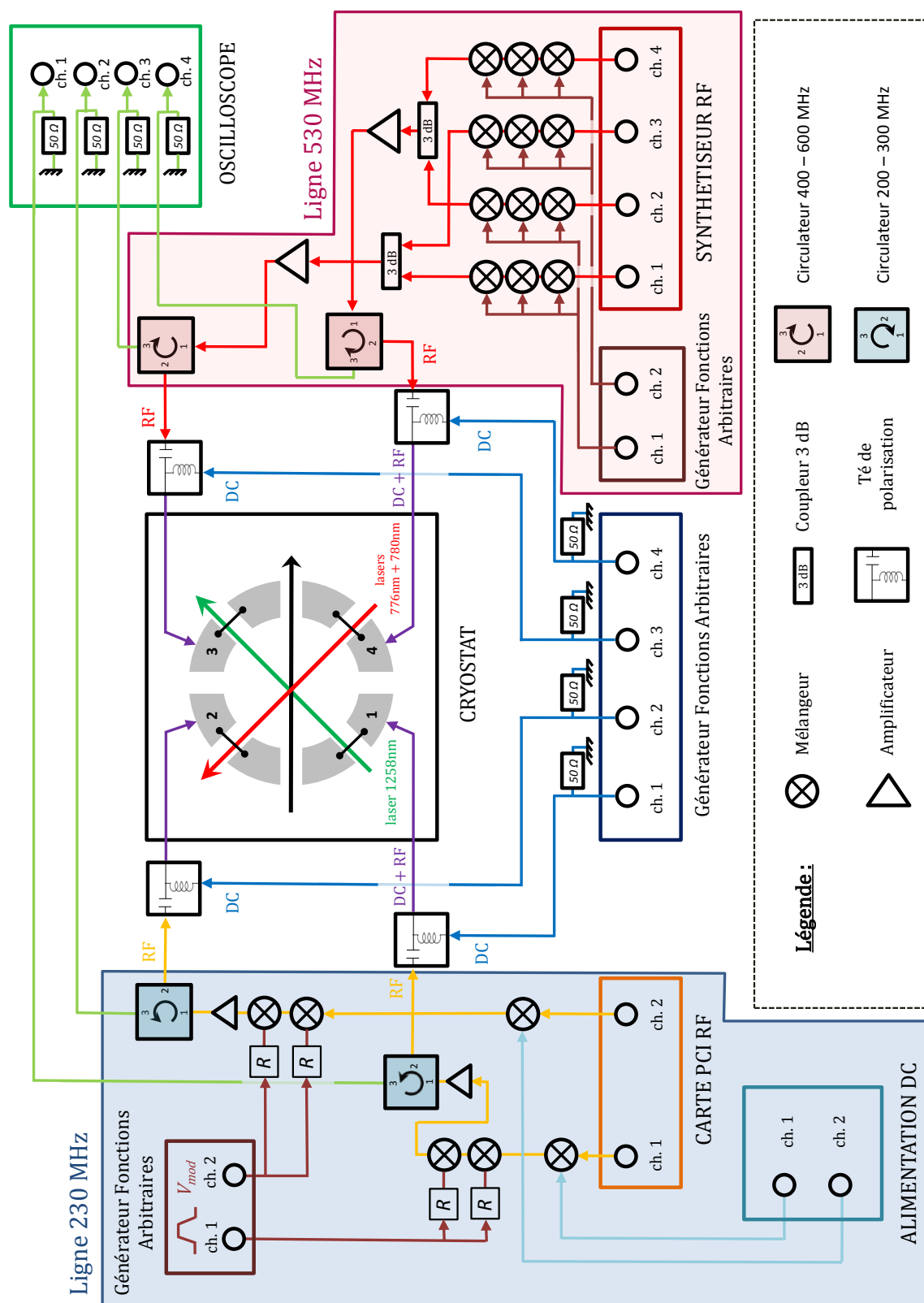


FIGURE II.14 – Schéma du montage électronique radiofréquence.

Ainsi, le champ radiofréquence à 230 MHz est généré par une carte PCI (*Peripheral Component Interconnect*) RF à deux voies. La phase relative entre les deux voies de la carte PCI est réglable informatiquement. Les signaux des deux voies sont modulés indépendamment en puissance par un mélangeur sur chacune des voies. En aval, et sur chacune des voies, un jeu de deux mélangeurs supplémentaires, connectés à un générateur de fonctions arbitraires Agilent 33522 A (30 MHz de bande passante), permet de mettre en forme l'impulsion radiofréquence. Ce signal, une fois amplifié (Mini-Circuits ZHL-2-12), passe à travers un T de polarisation (Mini-circuits ZFBT-4R2G-FT+) et traverse le cryostat de haut en bas pour rejoindre les électrodes en cuivre 1 et 2. Des circulateurs dans la gamme de fréquence 200 MHz - 300 MHz permettent d'une part d'éviter toute interférence avec le signal réfléchi sur l'électrode d'impédance infinie (en renvoyant ce signal vers une résistance $50\ \Omega$) et d'autre part de visualiser sur un oscilloscope rapide de bande passante 1 GHz (Agilent InfiniiVision DS07104B) placé en parallèle de la résistance $50\ \Omega$, les signaux réfléchis par les électrodes 1 et 2 et ainsi de mesurer l'amplitude de la radiofréquence appliquée sur les électrodes, atténuée cependant lors de la remontée du cryostat.

ii) Ligne RF à 530 MHz

Le champ radiofréquence à 530 MHz permet la manipulation des états de Rydberg durant les séquences expérimentales des expériences de métrologie quantique. La complexité de ces manipulations fait qu'il est nécessaire de disposer de deux phases distinctes pour ce champ. Pour cela, nous disposons d'un synthétiseur quatre voies Holzworth HS9004A-316 qui offre la possibilité de contrôler indépendamment l'amplitude et la phase de chacune des voies. Les voies sont asservies en phase les unes aux autres de sorte que les phases relatives demeurent constantes. La radiofréquence est transportée dans des câbles coaxiaux semi-rigides afin de préserver la phase des signaux dans chaque voie.

Afin de générer des impulsions radiofréquences de polarisation déterminée, deux possibilités s'offrent à nous : utiliser l'entrée de modulation impulsionnelle du synthétiseur (*pulse modulation*) déclenchée par TTL grâce à notre séquenceur ADWin ou bien moduler le signal par un jeu de mélangeurs, alimentés par un signal carré issu d'un générateur de fonctions arbitraires Agilent 33250 A (80 MHz de bande passante). L'analyse de l'impulsion produite par ces deux méthodes montre que la forme des impulsions est bien plus propre grâce à la modulation de puissance utilisant trois mélangeurs (Mini-Circuits ZFM-2+) en série. En particulier, les flancs montants et descendants sont comparativement plus raides et l'établissement du régime stationnaire est beaucoup plus court avec l'utilisation de mélangeurs en série. Ceci permet de générer des impulsions carrées très propres de très courte durée, typiquement d'une dizaine de nanosecondes, qu'il est impossible d'envisager par l'autre méthode. Durant ces phases d'allumage et d'extinction, la phase relative entre deux voies du synthétiseur n'est pas maîtrisée ce qui produit une polarisation quelque peu

dégradée. Il est donc essentiel que les flancs des impulsions soient les plus raides possible. La première contrepartie de cette méthode est une réduction globale de l'amplitude du signal. La seconde contrepartie est l'impossibilité de balayer électroniquement la durée des impulsions générées par cette méthode. Les générateurs de fonctions arbitraires Agilent 33250 A sont en effet programmables, mais les caractéristiques de la fonction générée par celui-ci ne peuvent être modifiées par notre séquenceur.

Les voies 1 et 2 du synthétiseur sont réglées afin de générer un champ radiofréquence polarisé σ_+ à 530 MHz et sont envoyées sur les électrodes numérotées 3 et 4. Un coupleur 3 dB placé juste en aval des amplificateurs permet d'envoyer simultanément les voies 3 et 4 du synthétiseur sur les mêmes électrodes. La phase relative entre les voies (1 & 2) et (3 & 4) se fait électroniquement à partir du synthétiseur, ce qui permet de régler la phase relative entre les deux champs radiofréquences polarisés σ_+ . Finalement, deux circulateurs dans la gamme de fréquence 400 MHz - 600 MHz permettent de recueillir le signal à 530 MHz réfléchi sur les électrodes 3 et 4 au cœur du cryostat.

II.1.6.b Polarisation théorique du champ radiofréquence

Suite à la description des deux *lignes RF* indépendantes à 230 MHz et à 530 MHz, nous avons donc à notre disposition deux paires d'électrodes afin de générer un champ radiofréquence de polarisation σ_+ à ces deux fréquences. Théoriquement, en admettant qu'une électrode seule génère un champ radiofréquence de polarisation linéaire, il est possible de créer une polarisation σ_+ parfaite au centre de la structure à l'aide de deux électrodes par un simple réglage des phases relatives des champs produits par les électrodes seules. Néanmoins, le paquet atomique excité par les lasers et la vitesse de ces mêmes atomes font que nous ne pouvons limiter notre étude de la polarisation du champ au seul centre de la structure. Une étude de l'homogénéité spatiale du champ radiofréquence créé est nécessaire.

Pour cela, nous avons calculé sur le logiciel de simulation SIMION la pureté du champ radiofréquence dans l'ensemble du volume intra-cavité. La pureté du champ radiofréquence, notée η est définie par :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{\sigma_+}}{\mathcal{E}_{\sigma_+} + \mathcal{E}_{\sigma_-}} \quad , \quad (\text{II.4})$$

où \mathcal{E}_{σ_+} et \mathcal{E}_{σ_-} désignent respectivement les amplitudes des composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence. Les résultats de la simulation sont représentés Figure II.15. Dans le plan horizontal $z = 0$, on représente la pureté du champ radiofréquence généré soit par quatre électrodes (Figure II.15 (a)) soit par deux électrodes (Figure II.15 (b)), pour un réglage des déphasages idoine.

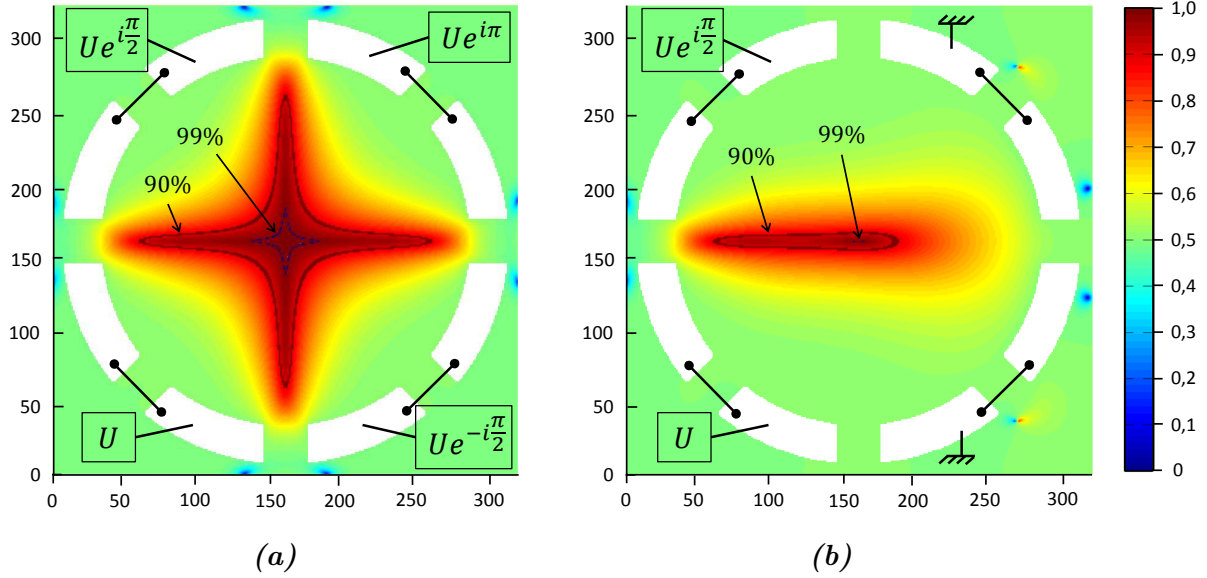


FIGURE II.15 – Simulation numérique de l'homogénéité de la radiofréquence. La pureté en amplitude η de la radiofréquence dans le plan horizontal $z = 0$ est calculée dans le cas de l'utilisation des quatre électrodes (a), ou de deux électrodes seulement (b). Les amplitudes complexes des champs produits par chacune des électrodes seules sont indiquées encadrées dans les coins des deux Figures. Les contours à 90% et 99% de pureté en amplitude sont indiqués par des lignes noires.

Le champ créé par quatre électrodes est nettement plus homogène. En effet, la pureté calculée est supérieure à 99 % sur près de 9 mm autour du centre de la structure, comparé à 1,25 mm dans le cas d'un champ généré par seulement deux électrodes. Dans les expériences de dynamique de Zénon quantique, où seule une fréquence sera utilisée (230 MHz), nous avons considéré que l'utilisation de deux électrodes seulement était suffisante. En effet, la durée du couplage d'un atome de vitesse $v_0 = 250$ m/s au champ radiofréquence polarisé dans le cadre de ces expériences est de l'ordre de $1,5 \mu\text{s}$, et la polarisation demeurera de bonne qualité durant ces manipulations. Disposant ainsi de deux paires d'électrodes, nous pouvons donc générer deux champs radiofréquences de phase relative ajustable. Le second jeu de phase permettra d'effectuer la tomographie des états générés par dynamique Zénon quantique (fonctions Q et de Wigner).

Pour les expériences de métrologie quantique, désirant disposer de deux fréquences distinctes, nous avons tout d'abord tenté de placer un commutateur *High Isolation Switch* (Mini-Circuits ZASWA-2-50DR+) permettant de générer sur une paire d'électrodes à la fois la radiofréquence à 230 MHz pour la circularisation et à 530 MHz. Cette première paire d'électrodes associée aux deux électrodes restantes permettait de générer un champ polarisé très homogène à 530 MHz. Cependant, ce *switch* semblait introduire un bruit électrique nuisible à la précision métrologique visée. Ainsi, afin de s'épargner l'utilisation de cet élément électronique, nous nous sommes contentés de l'utilisation de deux électrodes dans le cadre des expériences de métrologie quantique : deux étant dévolues à la circularisation à 230 MHz et les deux autres aux manipulations atomiques à 530 MHz à visées

métrologiques. Il convient de remarquer que dans ces expériences, un atome est couplé au champ radiofréquence au maximum durant un temps³ de l'ordre 500 ns. Durant ces 500 ns, l'atome n'a parcouru que 125 μm depuis le centre de la cavité où le couplage avec le champ radiofréquence débute, ce qui nous place très largement à l'intérieur du contour de pureté à 99 %, même avec deux électrodes.

II.2 Génération d'états de Rydberg circulaires

Suite à la description du montage expérimental, nous présentons dans cette section la méthode complète permettant la génération d'états de Rydberg circulaires. Porté dans l'état de Rydberg de faible moment cinétique orbital $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle$ par absorption de trois photons optiques, l'atome est transféré par passage adiabatique jusqu'au niveau circulaire $|n, n_1 = 1, m = n - 1\rangle$. Ces deux étapes seront présentées successivement dans cette section. Nous décrirons ensuite la séquence expérimentale complète permettant la génération de ces états circulaires, avant d'analyser les signaux d'ionisation atomiques, qui constituent - avec les mesures spectroscopiques - les principales informations qui nous sont données par les atomes au cœur du cryostat. Au terme de cette étude, une nouvelle méthode de réglage plus pragmatique de la polarisation du champ radiofréquence par optimisation du passage adiabatique sera présentée.

II.2.1 Excitation optique des états de Rydberg

Le système laser et son intégration au montage expérimental mécanique ont été présentés plus haut ainsi qu'en annexe B et nous permettent d'envisager une excitation optique des états de Rydberg en trois échelons, résumée schématiquement à la Figure II.12 page 109. Les états de Rydberg de faible moment cinétique orbital étant fortement sensibles au défaut quantique, il est souhaitable lors de cette excitation optique de faire acquérir à l'atome quelques quanta de moment cinétique orbital afin d'atteindre des niveaux quasi-hydrogénoïdes. Théoriquement, la polarisation des lasers permet en champ nul de porter l'atome dans un sous-niveau m bien défini du niveau $|nf\rangle$. Partant du niveau s , $|5^2S_{1/2}, F = 3\rangle$, la polarisation σ_+ des lasers L_1 et L_2 permet donc d'exciter l'atome dans un niveau $m = 2$. La polarisation linéaire du laser L_3 permet finalement d'exciter une transition π et donc de conserver le nombre quantique magnétique m . Cependant, afin de s'affranchir des imperfections expérimentales concernant la polarisation des lasers, nous effectuons l'excitation optique en champ électrique statique.

3. Ce couplage n'est pas continu mais consiste en l'application de deux impulsions radiofréquences successives séparées au maximum de la valeur annoncée plus loin.

Eu égard à la largeur spectrale des transitions constituant les deux premiers échelons, l'effet Stark est négligeable pour ces niveaux comme l'indiquent les valeurs des polarisabilités (scalaire et tensorielle) de ces niveaux, bien inférieures à celle du niveau $52f$ [31, 156]. Ainsi, quelque soit la direction du champ électrique directeur, l'axe de quantification privilégié demeure l'axe de propagation des lasers. L'intérêt de travailler à champ statique non nul est de lever par effet Stark la dégénérescence en m du niveau $|nf\rangle$ et ainsi discerner spectralement ces sous-niveaux. La fréquence du troisième échelon de l'excitation par le laser L_3 permet donc de viser spectralement un niveau m donné, en supplément des transitions autorisées par la polarisation.

Afin de choisir précisément le champ électrique d'excitation, nous avons mesuré un jeu de spectres lasers depuis le niveau intermédiaire $|5^2D_{5/2}, F'' = 5\rangle$ vers le voisinage de la multiplicité $n = 52$, cela pour différents champs électriques statiques. Le champ électrique d'excitation doit être suffisamment grand pour permettre de discerner spectralement les différents m du niveau $52f$, mais pas trop afin d'éviter que le niveau visé ait rejoint la multiplicité. La Figure II.16 reproduit verticalement les résultats des différentes spectroscopies autour de la multiplicité $n = 52$, pour des champs électriques statiques entre 0 V/cm et $0,4\text{ V/cm}$. Les courbes en pointillé correspondent au calcul théorique du déplacement de ces niveaux par effet Stark. Pour cette courbe, le champ électrique statique n'est pas appliqué le long de l'axe des lasers L_1 et L_2 , de sorte que les polarisations des lasers sont quelconques et permettent d'observer à la fois les niveaux $m = 0$, $|m| = 1$, $|m| = 2$ et $|m| = 3$. Tout cela est très bien compris :

- A champ nul, dû à l'effet des défauts quantiques, on distingue les niveaux $52f$ et $52g$ hors multiplicité. Le petit pic aux environs de -300 MHz est un artefact dû à la réflexion du laser L_3 sur le hublot de sortie du cryostat : le sens de propagation étant opposé au laser L_3 , le calcul de l'effet Doppler prédit pour ce faisceau un déplacement en fréquence de -283 MHz , ce qui est en accord avec l'expérience. Nous mesurons ici expérimentalement le défaut quantique du niveau $52g$, légèrement différent de la valeur obtenue par un développement en puissance de n à l'ordre 2 par Nussenzweig [150], correspondant au pointillé à $\sim -0,3\text{ GHz}$.
- Le calcul par perturbation de l'effet Stark dans le cas dégénéré prédit un déplacement linéaire des niveaux, que l'on observe effectivement au niveau de la multiplicité.
- Le calcul par perturbation de l'effet Stark dans le cas non dégénéré prévoit un déplacement quadratique des niveaux vers les basses énergies en accord avec l'évolution observée des niveaux $52f$ et $52g$ quand le champ électrique augmente.

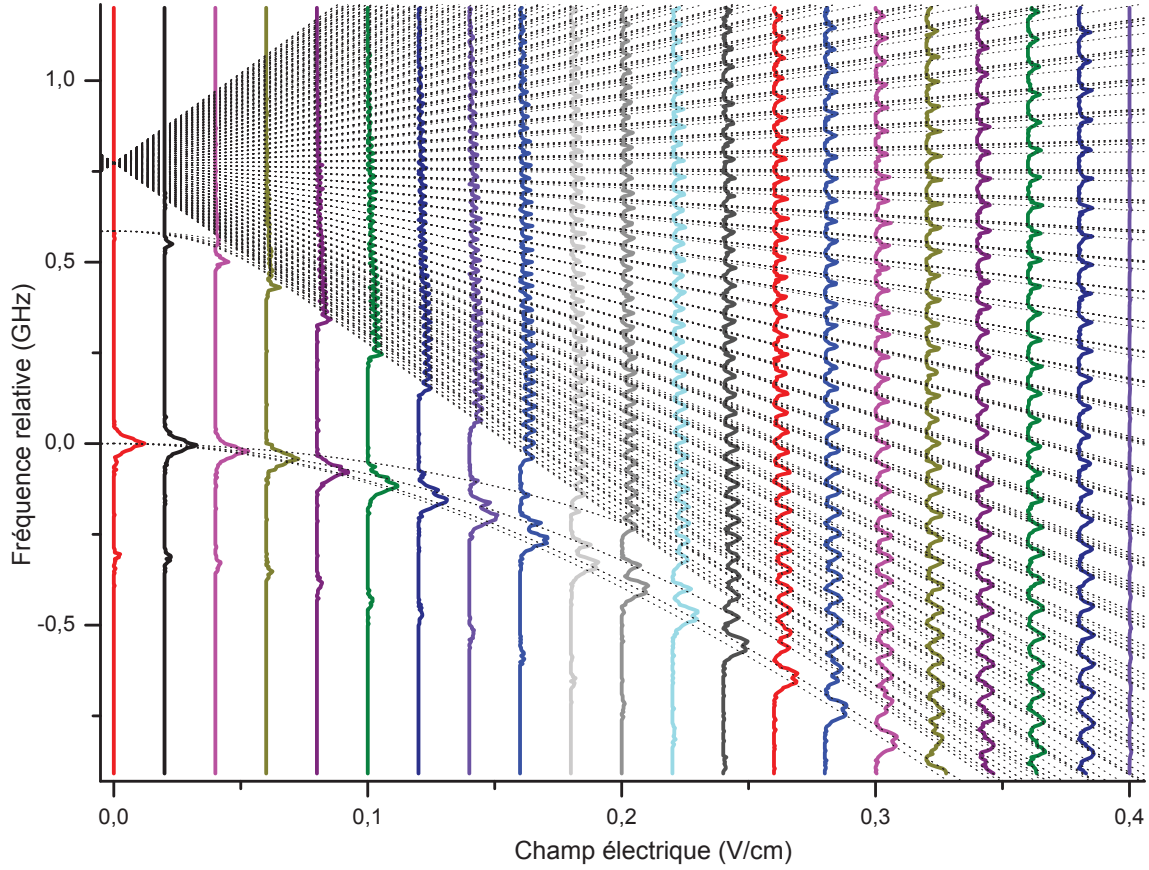


FIGURE II.16 – Spectres laser autour de la multiplicité $n = 52$ réalisés pour différentes valeurs du champ électrique statique. Les données, en traits pleins colorés, sont obtenues en balayant la fréquence du laser L_3 . Le champ électrique statique n'est pas appliqué le long de l'axe des lasers L_1 et L_2 , de sorte que les polarisations des lasers sont quelconques et permettent d'observer à la fois les niveaux $m = 0$, $|m| = 1$, $|m| = 2$ et $|m| = 3$. En pointillé est tracé le calcul théorique des énergies obtenues par diagonalisation complète du hamiltonien Stark sur une bande d'énergie de 600 GHz autour du niveau $52f$.

On observe alors qu'effectivement la dégénérescence du niveau $52f$ se lève avec l'augmentation du champ électrique statique, ce qui nous permet de distinguer spectralement les différents niveaux m . En particulier, pour un champ électrique entre 0,22 V/cm et 0,24 V/cm, on résout spectralement le niveau $|m| = 2$ et ce niveau n'a pas encore pénétré la multiplicité. C'est donc au voisinage de ces valeurs de champ électrique statique que le dernier échelon de l'excitation Rydberg aura lieu.

On répète alors la méthode de spectroscopie laser, pour des champs électriques dans la gamme visée, avec cette fois-ci un champ électrique directeur aligné avec les lasers L_1 et L_2 , ce qui oriente l'axe de quantification horizontalement de telle sorte que le laser L_3 excite effectivement des transitions π . On règle sur un tel signal la polarisation du laser L_3 afin d'optimiser le nombre absolu d'atomes excités dans le niveau $|m| = 2$. La Figure II.17 présente un spectre laser réalisé pour un champ électrique statique de 0,21 V/cm dirigé le long de l'axe des lasers L_1 et L_2 .

La symétrie de Kramers fait que l'effet Stark ne permet pas de distinguer le signe de m . La vérification de la bonne circularité (droite ou gauche) des lasers L_1 et L_2 s'effectue donc *in fine* sur les résultats du passage adiabatique permettant de générer des états de moment cinétique orbital plus élevé. Les détails de ce passage adiabatique seront exposés au paragraphe suivant. Cependant, si la polarisation de radiofréquence permettant d'effectuer ce passage adiabatique est σ_+ , on comprend bien que seul un atome dans le niveau $m = +2$ atteindra le niveau de moment cinétique orbital maximal : l'état circulaire⁴. De la sorte, on s'assure après coup du signe positif de m en vérifiant qu'on dépeuple effectivement par passage adiabatique tous les niveaux $|m| = 2$, indiquant que le signe de m est bien positif.

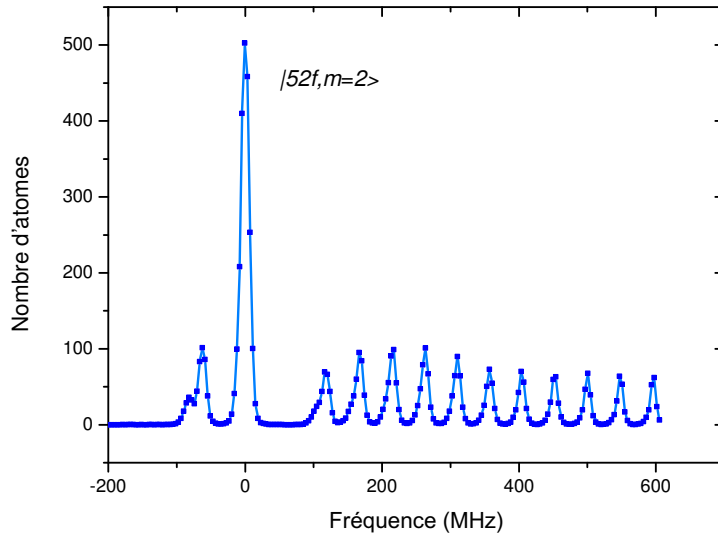


FIGURE II.17 – Spectre laser autour du niveau $|52f, m=2\rangle$ pour un champ électrique statique de 0,21 V/cm dirigé le long de l'axe des lasers L_1 et L_2 . La polarisation des lasers est finalement ajustée sur ce signal afin d'optimiser le nombre absolu d'atomes excités dans le niveau $m = 2$.

Nota : Nous avons ici expliqué en détail l'optimisation de l'excitation optique du niveau $52f$. L'excitation des atomes dans des niveaux de nombre quantique principal voisin est très similaire à la procédure décrite pour la multiplicité $n = 52$, seule change quelque peu la valeur du champ électrique d'excitation, permettant de résoudre spectralement le niveau $m = 2$, ainsi bien sûr que la fréquence du laser L_3 .

II.2.2 Rotation de l'axe de quantification

En sus de schématiser le montage électronique de génération des champs radiofréquences, la Figure II.14 page 112 représente aussi les éléments d'électronique permettant

4. La procédure est en fait auto-consistante car l'on règle la polarisation du champ radiofréquence en faisant l'hypothèse que l'on a excité optiquement des atomes dans le niveau $m = 2$.

l'application de potentiels statiques sur les quatre électrodes entourant la cavité. Un générateur de fonctions arbitraires Agilent 33522 A de bande passante 30 MHz permet d'appliquer des potentiels indépendants et programmables à ces quatre électrodes. Selon notre programmation, ces potentiels varient à l'échelle de la micro-seconde. En comparaison avec les champs radiofréquences, ces champs électriques sont donc quasi-statiques. On applique donc ce champ statique et le champ radiofréquence sur les électrodes à l'aide d'un T de polarisation (Mini-circuits ZFBT-4R2G-FT+) – dont les caractéristiques ont été adaptées à nos signaux –, qui couple inductivement le champ quasi-statique et capacitivement le champ oscillant. D'autre part, les potentiels appliqués sur les deux électrodes « miroirs » sont fournis par un générateur de fonctions arbitraires Agilent 33500 B de bande passante 30 MHz et directement guidés par des câbles *Quad-Twist* jusqu'aux électrodes.

Nous avons vu que l'excitation optique s'effectuait avec un champ directeur horizontal, aligné avec les lasers L_1 et L_2 . D'autre part, en raison de la disposition des quatre électrodes latérales, il est nécessaire pour générer un champ radiofréquence polarisé σ_+ que l'axe de quantification soit orienté verticalement. Ainsi, dès la fin de l'excitation débute une phase de « rotation » de l'axe de quantification (Figure II.18 (a)). Au cours de cette étape, le champ électrique doit être tourné adiabatiquement. On fait ainsi décroître le champ électrique horizontal, tout en augmentant le champ électrique vertical (Figure II.18 (b)) en appliquant des potentiels croissants sur les électrodes « miroirs ». Pour vérifier que l'atome suit bien adiabatiquement le niveau $m = 2$ et n'est pas contaminé par d'autres états de m différents, on s'assure par spectroscopie micro-onde vers la multiplicité du dessous, qu'aucun pic supplémentaire n'apparaît à l'issue de la rotation de l'axe de quantification. Si la rotation du champ électrique est effectuée en $1\ \mu\text{s}$, la fréquence de rotation est petite devant l'écart entre les niveaux Stark, de l'ordre de 50 MHz, et l'on s'attend à ce que la rotation soit adiabatique. Ceci est confirmé par comparaison des spectres vers la multiplicité adjacente inférieure lorsque les atomes préparés dans l'état $|52f, m = 2\rangle$ ne subissent pas de rotation de l'axe de quantification (courbe noire Figure II.18 (c)) et quand la rotation s'effectue en $1\ \mu\text{s}$ (courbe rouge Figure II.18 (c)). Par contre, si la rotation est trop rapide, on observe sur le spectre bleu l'apparition de multiples pics témoignant de la contamination du niveau $|52f, m = 2\rangle$. Nous garderons cette valeur de $1\ \mu\text{s}$ pour toutes les expériences présentées dans ce manuscrit, qui assure la non-contamination de l'état de Rydberg préparé par excitation optique quelle que soit la valeur du potentiel final appliqué sur les miroirs jusqu'à 10 V.

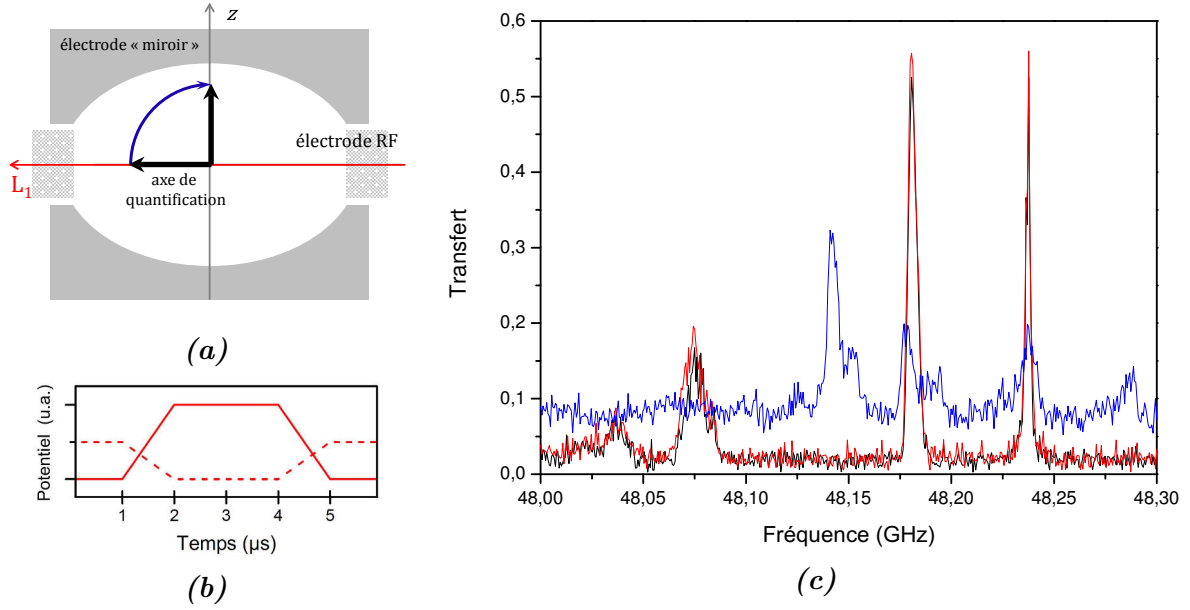


FIGURE II.18 – Rotation de l'axe de quantification, défini par la direction du champ électrique. **(a)** Vue en coupe du montage. Le champ électrique est aligné le long des lasers L_1 et L_2 pendant la phase d'excitation et aligné selon (Oz) pour les manipulations radiofréquences. **(b)** Séquence du champ électrique sur les électrodes (pointillé) et sur les miroirs (traits pleins) pour une rotation de l'axe de quantification en $1\ \mu\text{s}$. Le champ vertical à l'issue de la rotation est de $2,35\ \text{V/cm}$. **(c)** Spectres vers la multiplicité $n = 51$ après la préparation du niveau $|52f, m = 2\rangle$ suivi ou non d'une phase de retournement. On compare les courbes rouge (retournement lent en $1\ \mu\text{s}$) et bleu (variation brutale) à la courbe noire (sans retournement). Le retournement du champ en $1\ \mu\text{s}$ est adiabatique.

II.2.3 Préparation d'atomes de Rydberg circulaires par passage adiabatique

On rappelle ici une conclusion majeure du premier chapitre de ce manuscrit : l'atome en champ électrique couplé à un champ radiofréquence polarisé σ_+ peut être décrit comme un état du spin $\hat{\mathbf{J}}_1$ plongé dans un champ magnétique transverse. Dans le formalisme de l'atome habillé par le champ radiofréquence, on obtient par diagonalisation du hamiltonien, les n valeurs propres associées aux énergies suivantes :

$$E_p = -p \times \hbar\Omega, (-p+1) \times \Omega, \dots, p \times \Omega \quad \text{avec} \quad p = \frac{n-1}{2}, \quad (\text{II.5})$$

où $\Omega = \sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma_+})^2 + \delta^2}$ avec $\delta = \omega_{at} - \omega_{RF}$, le désaccord entre la pulsation atomique et celle du champ radiofréquence et $\Omega_{RF}^{\sigma_+}$ la pulsation de Rabi du champ radiofréquence polarisé σ_+ . Ces n énergies propres sont représentées en fonction du désaccord Figure II.19. Sur cette figure, on note pour chaque énergie propre l'état propre associé appartenant à la sous-famille des niveaux atomiques k habillés par $N - n + k$ photons radiofréquences ($N \gg 1$), couplés entre eux par le hamiltonien de couplage radiofréquence : $|k, N - n + k\rangle$ pour $k = 0, \dots, n-1$.

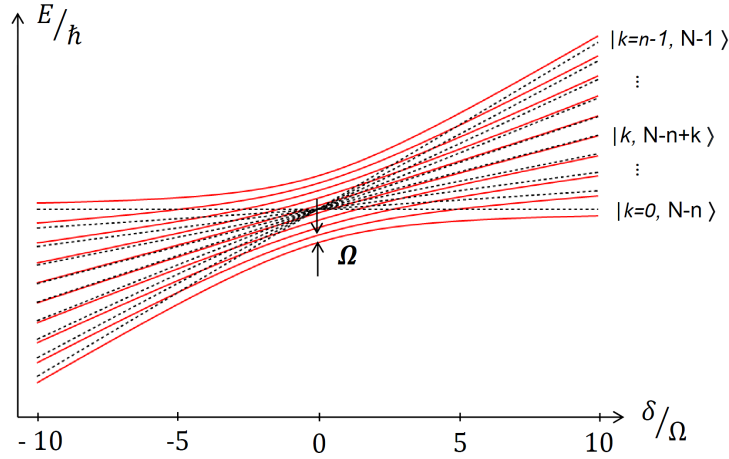


FIGURE II.19 – Énergies propres de l'atome à n niveaux habillés par le champ radiofréquence. Les énergies sont ici tracées pour $n = 10$. On note pour chaque énergie propre l'état propre associé appartenant à la sous-famille des niveaux atomiques k habillés par $N - n + k$ photons radiofréquences ($N \gg 1$), couplés entre eux par le hamiltonien de couplage radiofréquence : $|k, N - n + k\rangle$ pour $k = 0, \dots, n - 1$.

Nous sommes ainsi dans la configuration d'un anti-croisement des n niveaux habillés, qui sont, quel que soit le désaccord ou l'amplitude du champ habillant l'atome, équirépartis. A désaccord nul, on assiste à une levée de dégénérescence, les n états propres étant séparés deux à deux d'une quantité $\hbar\Omega_{RF}^{\sigma+}$, indépendamment de n ! Une inversion continue du signe du désaccord depuis $\delta \rightarrow -\infty$ produit - dans le cadre de l'approximation adiabatique - un branchement du niveau « nu » de plus basse énergie sur le niveau de plus grande énergie, du pénultième niveau de plus basse énergie sur le pénultième niveau de plus haute énergie, *et cætera*. Ainsi, partant du niveau $|k = n - 1, N - 1\rangle$ en $\delta \rightarrow -\infty$, l'atome sera transféré par passage adiabatique dans le niveau $|k = 0, N - n\rangle$ pour $\delta \rightarrow +\infty$.

Ce passage adiabatique s'interprète aisément sur la sphère de Bloch généralisée. Le passage adiabatique depuis $|j, -j\rangle$ au pôle Sud vers $|j, +j\rangle$ au pôle Nord correspond à la précession du moment cinétique moyen $\langle \hat{\mathbf{J}}_1 \rangle$ autour du vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$, qui réalise lui-même une rotation autour d'un axe contenu dans le plan équatorial, depuis le pôle Sud jusqu'au pôle Nord. La trajectoire du moment cinétique moyen $\langle \hat{\mathbf{J}}_1 \rangle$ durant cette évolution est représentée sur la Figure II.20.

La condition d'adiabaticité s'interprète dans ce cadre comme le fait que le vecteur de Bloch $\langle \hat{\mathbf{J}}_1 \rangle$ précède vite devant la rotation du vecteur $\mathbf{\Omega}$:

$$\frac{d\delta}{dt} \ll (\Omega_{RF}^{\sigma+})^2 \quad . \quad (\text{II.6})$$

En pratique, le désaccord ne pouvant être arbitrairement grand, il convient pour un désaccord grand mais fini de « brancher » le niveau nu $|j, -j\rangle$ au niveau habillé de plus basse énergie lors de l'allumage du champ et de même de « brancher » le niveau habillé final

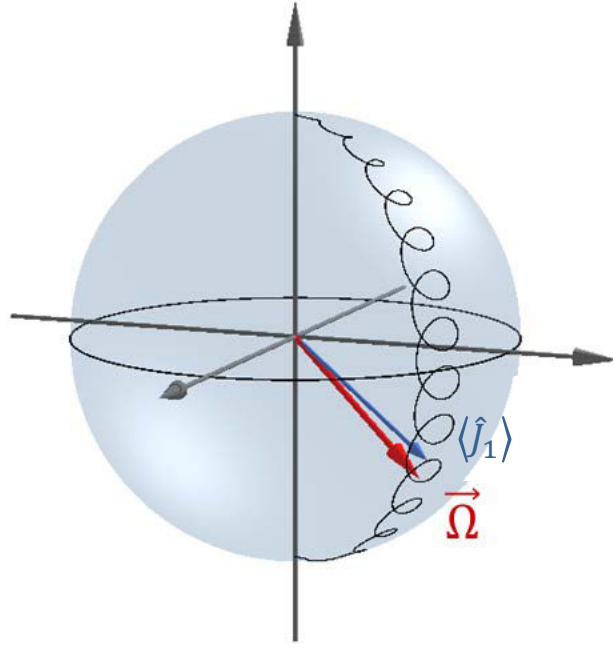


FIGURE II.20 – Représentation qualitative sur la sphère de Bloch généralisée du passage adiabatique dans un système à n niveaux. La condition d'adiabaticité peut s'interpréter géométriquement : la vitesse de rotation de $\vec{\Omega}$ doit être lente devant la vitesse de précession du moment cinétique moyen $\langle \hat{J}_1 \rangle$. La vitesse de précession minimale valant $\Omega_{RF}^{\sigma+}$ (pour $\delta = 0$) et le vecteur $\vec{\Omega}$ tournant de $2\pi \times d\delta/\Omega_{RF}^{\sigma+}$ en une durée dt , on trouve la condition d'adiabaticité II.6.

sur le niveau nu $|j, +j\rangle$ lors de l'extinction. De manière identique, ce branchement adiabatique est réalisé à la condition que la vitesse de précession du moment cinétique moyen $\langle \hat{J}_1 \rangle$ est grande devant la vitesse de rotation de $\vec{\Omega}$. Cette phase d'allumage et d'extinction du champ ayant lieu à grand désaccord (en valeur absolue), la vitesse de précession s'approche à δ . La vitesse de rotation du vecteur $\vec{\Omega}$ valant $d\Omega_{RF}^{\sigma+}/\delta dt$, on en déduit une seconde condition d'adiabaticité :

$$\frac{d\Omega_{RF}^{\sigma+}}{dt} \ll \delta^2 \quad . \quad (\text{II.7})$$

Un grand désaccord initial, associé à un allumage et une extinction lents du champ radiofréquence, concourront donc à l'adiabaticité du processus de branchement.

Dans le cadre d'une description plus précise et réaliste de l'atome de rubidium en champ électrostatique, deux déviations principales rentrent en jeu : l'effet du défaut quantique pour les niveaux de faible moment cinétique orbital et l'effet Stark quadratique. Le calcul numérique des énergies des états $n_1 = 1$, associés aux états du spin \hat{J}_1 , habillés par la radiofréquence polarisée σ_+ de fréquence fixée à 230 MHz, dans la multiplicité $n = 51$ du rubidium est présenté Figure II.21 avec un couplage nul **(a)**, et avec une radiofréquence telle que $\Omega_{RF}^{\sigma+} = 1$ MHz **(b)**.

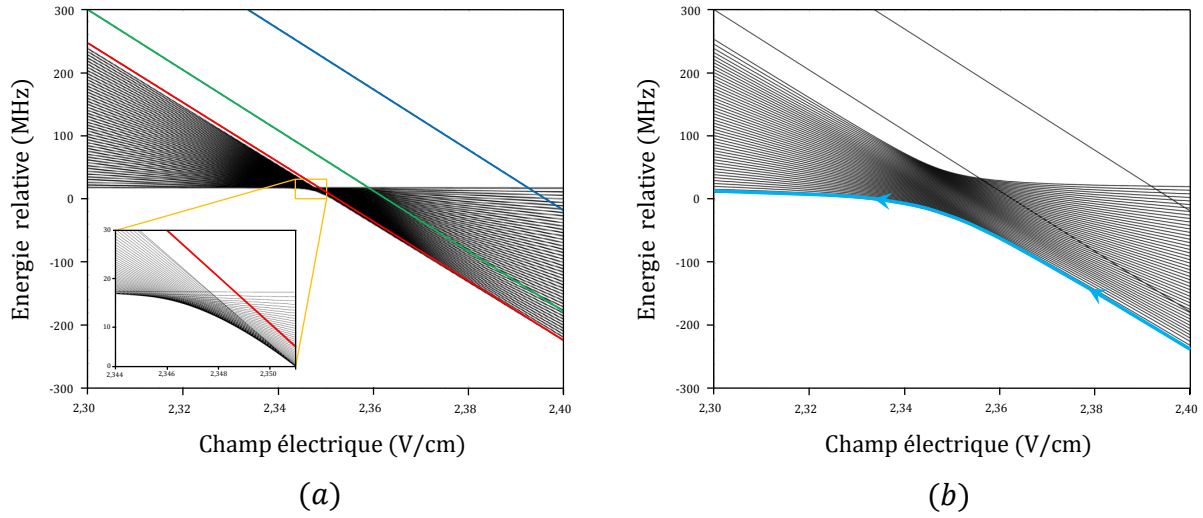


FIGURE II.21 – Énergies des états habillés par la radiofréquence dans la multiplicité $n = 51$ du rubidium avec un couplage nul (a), et avec une radiofréquence telle que $\Omega_{RF}^{\sigma+} = 1$ MHz (b). Les niveaux sont tracés en fonction du champ électrique. Les niveaux sensibles au défaut quantique sont représentés en couleur (bleu, vert et rouge pour les niveaux $|n, n_1 = 1, m = 0\rangle$, $|n, n_1 = 1, m = 1\rangle$ et $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle$). Exceptés les niveaux $|n, n_1 = 1, m = 0\rangle$ et $|n, n_1 = 1, m = 1\rangle$, tous les niveaux se croisent à un champ électrique voisin de 2,35 V/cm. On remarque sur l'agrandissement Figure (a) que l'effet Stark quadratique décale progressivement le croisement des niveaux.

Considérant l'échelle de spin des n niveaux tels que $n_1 = 1$, nous avons vu que les deux niveaux de plus basse énergie $|n, n_1 = 1, m = 0\rangle$ et $|n, n_1 = 1, m = 1\rangle$ ne sont pas équidistants des autres niveaux de l'échelle en raison du défaut quantique qui affecte les états de faible moment cinétique orbital. Le niveau $m = 2$ s'intègre lui plus ou moins au modèle hydrogénoïde. On observe clairement Figure II.21 (a) le comportement singulier joué par les niveaux $|n, n_1 = 1, m = 0\rangle$ (courbe bleue) et $|n, n_1 = 1, m = 1\rangle$ (courbe verte) dans le croisement des 48 niveaux représentés en noir. Le niveau $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle$ (courbe rouge), s'il n'est pas parfaitement hydrogénoïde, a cependant un statut moins « pathologique » et va pouvoir constituer le niveau initial d'un passage adiabatique vers l'état circulaire. En effet, l'élément de matrice de la transition du niveau $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle$ vers le niveau $|n, n_1 = 1, m = 3\rangle$ ne diffère que de 0,4 % de l'élément de matrice hydrogénoïde des transitions d'échelle. Les niveaux $|n, n_1 = 1, m = 0\rangle$ et $|n, n_1 = 1, m = 1\rangle$ croisant les autres niveaux pour des champs électriques plus élevés, il est par ailleurs pertinent de décrire un passage adiabatique en champ décroissant de façon à éviter ces croisements (bien que les éléments de matrice du couplage avec ces niveaux soient très faibles).

L'effet Stark quadratique, qui brise l'équidistance des niveaux de l'échelle, a pour conséquence principale le fait que tous les niveaux atomiques ne se croisent pas au même champ électrique. Ceci est manifeste sur l'agrandissement des niveaux de la Figure II.21 (a), autour de la résonance⁵. Un passage adiabatique en champ électrique décroissant

5. Strictement parlant, il existe maintenant cinquante résonances distinctes car aucune des 50 transi-

a cependant l'avantage « d'absorber » la non-harmonicité due à l'effet Stark quadratique et d'ordres supérieurs. En effet, en champ décroissant, le croisement des niveaux $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle$ et $|n, n_1 = 1, m = 3\rangle$ a lieu avant celui des niveaux $|n, n_1 = 1, m = 3\rangle$ et $|n, n_1 = 1, m = 4\rangle$ et ainsi de suite.

Un passage adiabatique depuis le niveau $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle$ jusqu'au niveau circulaire de la multiplicité n par une rampe décroissante de champ électrique (ligne fléchée bleue Figure II.21 (b)) est donc un procédé suffisamment robuste pour s'accommoder de la légère non-harmonicité des niveaux d'échelle introduite par l'effet Stark quadratique, ainsi que de la situation singulière des niveaux de faible moment cinétique orbital de l'atome de rubidium.

II.2.4 Séquence expérimentale

Toute séquence expérimentale débute par l'excitation optique des atomes par une impulsion du laser L_3 d'une micro-seconde et se termine par l'ionisation des atomes au niveau du détecteur à la sortie de la cavité à l'issue d'un temps de vol d'environ 230 μs . La Figure II.22 décrit la séquence d'un passage adiabatique aboutissant dès l'instant $t = 6 \mu\text{s}$ à la génération d'atomes de Rydberg circulaires. Il est d'ores et déjà flagrant que le temps de préparation des atomes de Rydberg circulaires est très court devant le temps de vol des atomes. Les manipulations du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ qui suivent cette préparation seront de durées encore plus courtes. Ainsi, dans nos expériences, plus de 99 % du temps est consacré à attendre que les atomes volent jusqu'au détecteur pour être ionisés. Le montage *Fontaine* où la détection sera déclenchée directement intra-cavité permettra de s'affranchir de ce temps de vol.

Durant l'excitation laser entre 0 μs et 1 μs (courbe noire), le champ électrique statique est aligné le long des lasers L_1 et L_2 dans le plan horizontal. Le champ vertical (courbe verte) est donc nul à cet instant puis augmente (en 1 μs) lors de la phase de rotation de l'axe de quantification. La valeur du plateau de champ électrique permet de se placer, sur la Figure II.21 page 124, à droite du croisement géant (mais à gauche du croisement avec le niveau $|n, n_1, m = 1\rangle$). Pendant la durée Δt_{RF} de ce plateau, le champ radiofréquence à 230 MHz est allumé en conformité avec la condition d'adiabaticité II.7. La courbe bleue représente la tension de commande des mélangeurs modulant la puissance du champ radiofréquence. La valeur du plateau atteinte à l'issue de la durée Δt_{RF} contrôle la puissance du champ radiofréquence nécessaire au passage adiabatique. Le champ électrique directeur est ensuite lentement diminué de manière linéaire durant un temps Δt_E de façon à passer adiabatiquement suivant la condition II.6 de l'autre côté des résonances et de

tions entre les 51 niveaux du spin \mathbf{J}_1 n'est de fréquence identique.

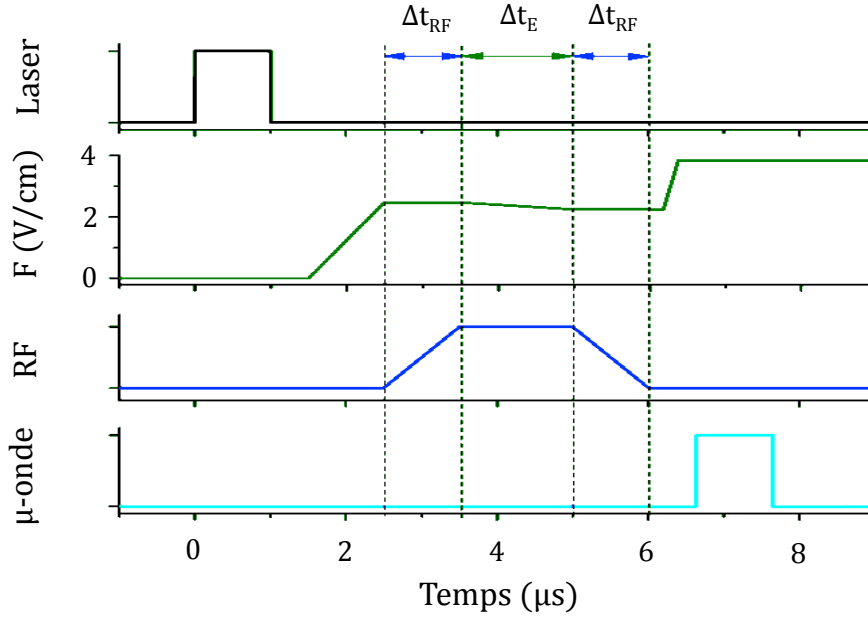


FIGURE II.22 – Séquences de circularisation par passage adiabatique. Nous avons représenté l'évolution temporelle (dans l'ordre) de l'impulsion laser, du champ électrique directeur vertical, du champ radiofréquence et de la micro-onde de sonde ou purification.

suivre ainsi l'anti-croisement depuis le niveau $|n, n_1, m = 2\rangle$ jusqu'au niveau circulaire $|n, n_1, m = n - 1\rangle$. Suit la phase d'extinction adiabatique du champ radiofréquence pendant une durée Δt_{RF} , durant laquelle le niveau habillé final se branche adiabatiquement sur le niveau atomique circulaire « nu ».

Finalement, dès l'extinction adiabatique achevée, le champ électrique est de nouveau augmenté afin de mettre à résonance la première transition d'échelle – entre le niveau circulaire et le premier niveau elliptique $|n, n_1, m = n - 2\rangle$ – avec le champ radiofréquence à 230 MHz pour les expériences de dynamique Zénon ou à 530 MHz pour les expériences de métrologie. Alors, on applique une impulsion micro-onde π , dite de *purification*, résonnante avec la transition entre l'état circulaire préparé par passage adiabatique et l'état circulaire d'une multiplicité voisine. Cette étape de purification permet de transférer dans une multiplicité donnée uniquement des atomes circulaires et d'écarter de la sorte les éventuels atomes elliptiques résiduels à l'issue du passage adiabatique. Dans le cas d'un passage adiabatique dans la multiplicité $n = 49$, l'étape de purification peut s'effectuer, par exemple, soit vers la multiplicité adjacente $n = 50$, soit vers la multiplicité $n = 51$ (transition à deux photons micro-ondes). Pour une impulsion micro-onde de purification suffisamment longue, afin qu'elle soit sélective spectralement avec le niveau circulaire, on mesure que les atomes circulaires $|50c\rangle$ ou $|51c\rangle$, qui résultent de cette purification, sont purs à $99,7 \pm 0,3\%$ [103].

Il ne reste maintenant plus qu'à expliquer comment le réglage de la polarisation σ_+ du champ radiofréquence, permettant de réaliser ce passage adiabatique, est réalisé. Ceci constituera la dernière section de ce chapitre.

II.3 Réglage de la polarisation des champs radiofréquences

La pureté de la polarisation σ_+ du champ radiofréquence est une propriété cruciale, tout d'abord pour la réalisation du passage adiabatique que nous venons de présenter, mais aussi pour les manipulations spécifiques du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ qui suivront. Nous proposons dans cette partie une méthode de réglage *ab initio* de la polarisation du champ radiofréquence à 230 MHz généré par deux électrodes. Nous verrons que deux électrodes seules permettent en pratique d'atteindre une pureté au centre de la cavité de plus de 98 %. Finalement, nous conclurons ce chapitre par la présentation de signaux d'ionisation des états de Rydberg lors du passage adiabatique et proposerons une méthode d'optimisation *in situ* de la polarisation du champ radiofréquence par optimisation du passage adiabatique.

II.3.1 Limites expérimentales d'un réglage purement électronique

Le réglage des polarisations est en pratique difficile et a occupé une longue partie de nos travaux. Tout d'abord, en raison de couplages de diverses natures entre les deux sous-électrodes reliées composant une même électrode, le champ généré par une électrode seule n'est pas linéaire. Le signal appliqué en théorie à une seule électrode peut même se coupler aux électrodes voisines. Ces diverses sources de déphasage compliquent singulièrement le réglage de la polarisation du champ et viennent nuancer les conclusions théoriques de la section précédente.

Par ailleurs, nous ne connaissons pas véritablement les amplitudes et phases de la radiofréquence au niveau des électrodes au cœur du cryostat. En effet, la propagation du signal RF dans les câbles qui descendent au fond du cryostat entraîne une première altération de ces signaux. De manière similaire, la mesure des phases et amplitudes des signaux radiofréquences sur l'oscilloscope en sortie du circulateur se heurte à des problèmes d'impédance, de déphasage et d'atténuation différentielles entre les différentes électrodes qui rendent illusoire la comparaison directe des électrodes par ce biais.

Les atomes seront donc nos « yeux » au cœur du montage. Comme outils de mesure, les atomes sont en effet les plus à même de nous fournir des informations sur la qualité de la polarisation de la radiofréquence. C'est donc par diverses méthodes de spectroscopie atomique que nous optimiserons la polarisation de nos champs radiofréquences.

II.3.2 Réglage de la polarisation du champ RF à 230 MHz

Le réglage de la polarisation du champ radiofréquence à 230 MHz généré par les électrodes numérotées 1 et 2 sur la Figure II.14 page 112 peut s'effectuer de deux manières différentes : soit par spectroscopie micro-onde depuis les niveaux de Rydberg de faible moment cinétique orbital soit directement par l'optimisation du processus de circularisation. Cette dernière méthode est plus rapide et s'appuie sur l'expérience que nous avons acquise depuis quelques années dans l'exercice de préparation d'atomes de Rydberg circulaires grâce à un champ radiofréquence polarisé σ_+ . Elle est cependant difficile à mettre en œuvre *ab initio* et ne permet pas d'évaluer quantitativement la pureté de la polarisation du champ radiofréquence généré. Dans cette section nous présenterons donc le réglage par spectroscopie micro-onde depuis les niveaux de Rydberg de faible moment cinétique orbital et reporterons à plus tard l'explication de la seconde méthode.

Cette méthode consiste à sélectionner deux transitions atomiques σ_+ et σ_- résonantes à 230 MHz afin d'avoir accès lors du couplage de l'atome au champ radiofréquence aux pulsations de Rabi associées à ces deux composantes. Ceci s'effectue en mesurant l'écartement du doublet dit de Autler-Townes, né du couplage résonant, par spectroscopie micro-onde vers un niveau auxiliaire d'une multiplicité adjacente. Il faut cependant trouver un « système à deux niveaux » isolé, dans le spectre hydrogénoïde de l'atome du rubidium. Comme le représente la Figure II.23 (a), les transitions hydrogénoïdes entre les niveaux Stark en trait gras pour $m > 2$ sont toutes à résonance avec le champ radiofréquence à 230 MHz, ce qui complique la situation. Il convient donc de chercher une transition isolée à 230 MHz entre deux niveaux de faible moment cinétique orbital d'une multiplicité n , qui ont un défaut quantique non négligeable. La transition $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle \rightarrow |n, n_1 = 3, m = 1\rangle$ par exemple n'est dégénérée avec aucune transition avoisinante. Comme le schématise la Figure II.23 (b) dans le cas particulier de la multiplicité $n = 52$, cette transition atomique est résonante avec le champ radiofréquence à 230 MHz pour un champ électrique de 1,76 V/cm aligné suivant l'axe (Oz). Correspondant à une transition $\Delta m = -1$, le couplage résonant de l'atome au champ radiofréquence donne accès à la composante σ_- du champ radiofréquence. Plus précisément, dans le modèle de l'atome habillé par le champ radiofréquence, les nouveaux états propres, appelés états habillés, forment un doublet de Autler-Townes dont l'écartement est proportionnel à la fréquence de Rabi de la composante associée. L'écartement du doublet peut-être mesuré par spectroscopie micro-

onde vers le niveau auxiliaire $|51, n_1 = 2, m = 1\rangle$ de la multiplicité inférieure, par exemple (flèche verte).

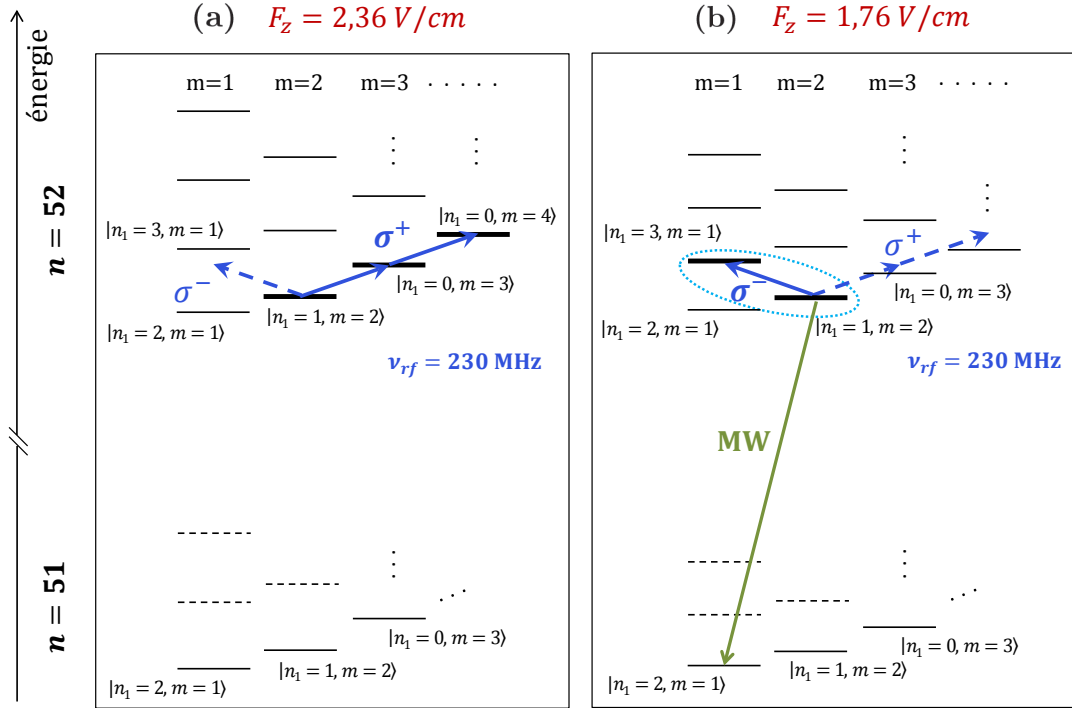


FIGURE II.23 – Mise en résonance de la radiofréquence avec un système à deux niveaux. (a) A $2,36 \text{ V/cm}$, la radiofréquence est résonante avec les niveaux du spin \mathbf{J}_1 . (b) En réduisant le champ à $1,75 \text{ V/cm}$, la transition entre les deux niveaux $|52, n_1 = 1, m = 2\rangle$ et $|52, n_1 = 3, m = 1\rangle$ devient résonante avec la radiofréquence. Le couplage peut être étudié par spectroscopie micro-onde vers le niveau auxiliaire $|51, n_1 = 2, m = 1\rangle$ de la multiplicité inférieure, par exemple.

Pour mesurer la pulsation de Rabi associée à la composante σ_+ du champ radiofréquence, il suffit de retourner adiabatiquement le sens du champ électrique et de l'aligner dans la direction $-(Oz)$. Ce retournement de l'axe de quantification change le signe du nombre quantique magnétique m et la transition atomique correspondante, résonante avec le champ radiofréquence, correspond désormais à $\Delta m = +1$. Selon le sens du champ électrique, on met donc en exergue deux systèmes à deux niveaux couplés de manière résonante aux composantes soit σ_- , soit σ_+ du champ radiofréquence.

Il est alors aisé de mesurer la fréquence de Rabi associée à la composante σ_- du champ radiofréquence, en fonction de la tension appliquée sur le mélangeur placé en aval de la carte PCI RF, cela pour les électrodes 1 et 2 individuellement. Grâce à cette calibration des électrodes individuelles, on égalise, en réglant la tension de modulation des mélangeurs, les amplitudes des composantes σ_- des deux électrodes. Finalement, en allumant désormais les deux électrodes simultanément, on réussit à réduire la composante σ_- du champ résultant en jouant sur la phase relative des champs radiofréquences créés

par les électrodes individuelles. La procédure d'optimisation s'effectue par répétition de la spectroscopie micro-onde susmentionnée : plus les deux pics du doublet de Autler-Townes sont proches, plus la composante σ_- du champ tend vers zéro. La Figure II.24 (a) présente les différentes valeurs des fréquences de Rabi mesurées en fonction du déphasage entre les deux voies de la carte PCI associées aux électrodes 1 et 2. La fréquence de Rabi minimale associée à la composante σ_- vaut $\Omega_{\sigma_-}^{min} = 0,44$ MHz.

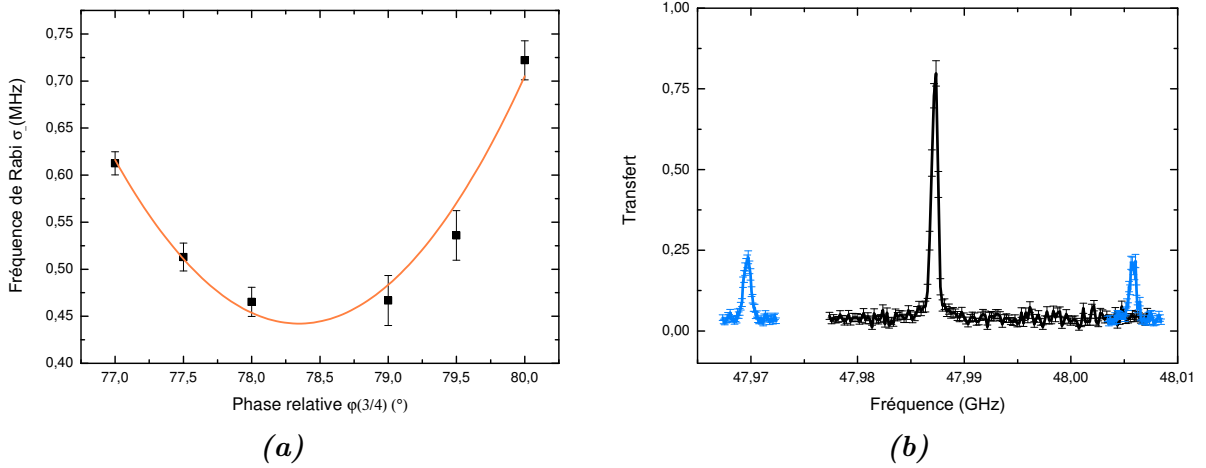


FIGURE II.24 – Mesure des fréquences de Rabi des composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence. (a) Mesure de la fréquence de Rabi Ω_{σ_-} en fonction de la phase relative entre les deux voies de la carte PCI associées aux électrodes 1 et 2. Le minimum vaut $\Omega_{\sigma_-}^{min} = 0,44$ MHz pour une phase relative de $\varphi(3 \rightarrow 4) = 78,4^\circ$. (b) Mesure de la fréquence de Rabi Ω_{σ_+} au terme de la procédure d'optimisation de la polarisation du champ radiofréquence. La courbe noire correspond au spectre micro-onde de la transition $|52, n_1 = 1, m = 2\rangle \rightarrow |51, n_1 = 1, m = 1\rangle$ en l'absence de couplage radiofréquence. La courbe bleue représente ce même spectre dans le cas où l'atome est cette fois-ci habillé par le champ radiofréquence de polarisation optimisé.

Nous ne rentrerons pas plus en détail dans l'analyse de ce réglage de la polarisation du champ radiofréquence. Une analyse plus poussée mentionnerait le fait que la composante σ_+ du champ radiofréquence augmentant, elle occasionne un déplacement lumineux du niveau $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle$ (dû par exemple à la transition voisine $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle \rightarrow |n, n_1 = 1, m = 3\rangle$). Il importe donc de réajuster au cours de l'optimisation de la polarisation la condition de résonance entre la radiofréquence et la transition $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle \rightarrow |n, n_1 = 3, m = 1\rangle$ en réajustant la valeur du champ électrique statique.

A l'issue de ce processus d'annulation de la composante σ_- , on peut alors mesurer les valeurs des pulsations de Rabi associées aux composantes σ_- résiduelle et σ_+ , et ainsi calculer la pureté de notre champ radiofréquence généré par deux électrodes. La Figure II.24 (b) présente le résultat des spectroscopies entre le niveau $|52, n_1 = 1, m = 2\rangle$, habillé par le champ radiofréquence (bleu) ou non (noir) et le niveau $|51, n_1 = 1, m = 1\rangle$ de la multiplicité adjacente inférieure. On mesure $\Omega_{\sigma_+} = 36,150$ MHz, d'où on calcule une pureté en amplitude de $\eta = 98.8\%$.

II.3.3 Réglage de la polarisation du champ RF à 530 MHz

De même, l'optimisation de la polarisation du champ radiofréquence à 530 MHz peut s'effectuer par spectroscopie depuis les niveaux de Rydberg de faible moment cinétique orbital. Cependant, afin de rendre résonant le système à deux niveaux $|n, n_1 = 1, m = 2\rangle \leftrightarrow |n, n_1 = 3, m = 1\rangle$ précédemment identifié avec le champ radiofréquence à 530 MHz, il faut dorénavant élever considérablement le champ électrique directeur jusqu'à une valeur de 3,97 V/cm. A ce champ électrique, la structure fine de certains niveaux apparaît et il convient alors d'apporter un grand soin à l'identification des niveaux et de sélectionner le spin des électrons afin de disposer de signaux simples et intelligibles. Le réglage de la polarisation du champ radiofréquence à 530 MHz par cette méthode ne sera pas décrit dans ce manuscrit.

Cependant, disposant déjà d'une radiofréquence polarisée σ_+ à 230 MHz réglée par la méthode que nous venons d'introduire, il est possible de régler directement la polarisation du champ radiofréquence à 530 MHz à partir du niveau de Rydberg circulaire. En analysant l'évolution des moments cinétiques \hat{J}_1 et \hat{J}_2 introduits au premier chapitre, se couplant sélectivement aux composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence, nous proposerons au chapitre IV une méthode d'optimisation simple et plus rapide. Cette méthode a de plus l'avantage de s'effectuer directement au champ final de travail dans le cadre des expériences de métrologie quantique et constitue donc véritablement un réglage *in situ* de la polarisation du champ radiofréquence à 530 MHz.

II.3.4 Signaux d'ionisation

Disposant d'un champ radiofréquence à 230 MHz polarisé σ_+ , il est alors possible de préparer des atomes de Rydberg circulaires suivant la séquence décrite précédemment à la Figure II.22 page 126. Les premiers signaux de préparation d'atomes de Rydberg circulaires ont été obtenus dans la multiplicité $n = 52$ et pour une durée $\Delta t_E = 9 \mu\text{s}$ plus longue que celle présentée dans la séquence Figure II.22. Pour une radiofréquence à 230 MHz, le champ électrique est rampé de 2,49 V/cm à 2,19 V/cm, ce qui correspond respectivement à des fréquences de 248 MHz et 219 MHz pour la première transition d'échelle depuis le niveau circulaire.

La Figure II.25 (a) présente les signaux d'ionisation obtenus pour différentes amplitudes du champ radiofréquence, la durée de l'impulsion étant maintenue constante. On modifie l'amplitude du champ radiofréquence en faisant varier la tension de modulation maximale des mélangeurs dans la séquence RF décrite Figure II.22. En l'absence de radiofréquence (courbe orange), les atomes s'ionisent en un pic centré en 53 V/cm. Plus

l'amplitude du champ radiofréquence augmente, plus les atomes, dont le passage adiabatique vers le niveau circulaire n'est pas achevé, s'ionisent pour des champs électriques élevés. On note que pour des amplitudes intermédiaires (courbes bleu foncé et rouge), l'état atomique est réparti sur plusieurs niveaux dont les seuils d'ionisation sont différents, ce qui élargit le pic d'ionisation global. Finalement, le pic d'ionisation s'affine et grandit⁶; l'augmentation de l'amplitude du champ n'a plus d'effet sur la position du pic (courbes noire et verte claire), ce qui laisse penser que l'atome a rejoint l'état final du passage adiabatique, soit l'état circulaire.

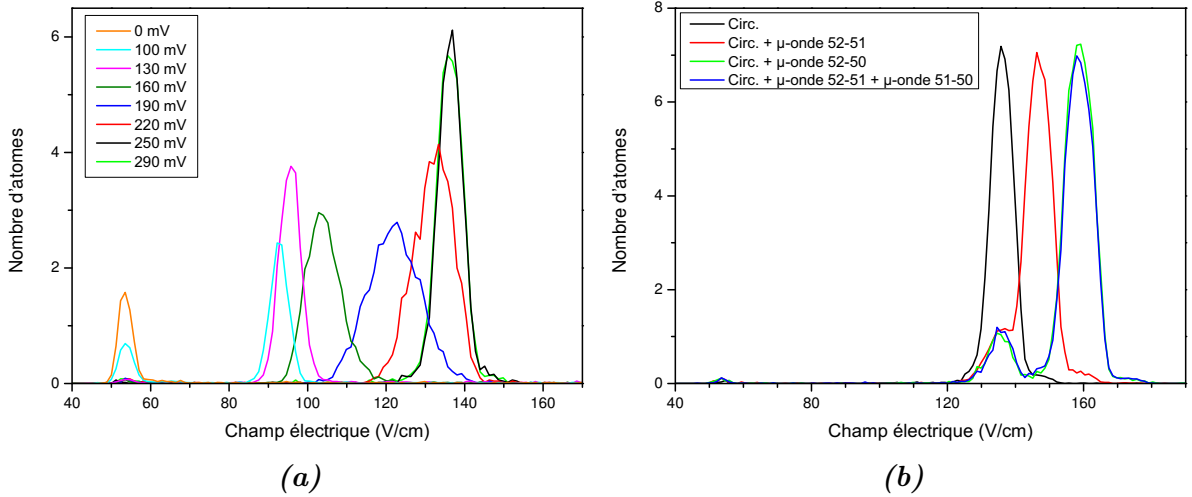


FIGURE II.25 – Signaux d'ionisation de la circularisation par passage adiabatique et de purification de l'état final. **(a)** Pics d'ionisation atomique pour différentes valeurs de l'amplitude du champ radiofréquence depuis l'état $|n = 52, n_1 = 1, m = 2\rangle$ (courbe orange). Le champ électrique d'ionisation est étalonné à partir de la valeur d'ionisation de l'état circulaire, égale à 136 V/cm [157]. L'augmentation apparente du nombre d'atomes entre l'état initial et l'état final est due à l'efficacité du détecteur qui a été optimisée pour le niveau circulaire, ajouté au fait que les atomes circulaires ont un temps de vie plus long. **(b)** Au terme du passage adiabatique dans la multiplicité $n = 52$ (courbe noire), une impulsion de purification transfère les atomes circulaires $|52c\rangle$ vers l'état $|51c\rangle$ (courbe rouge) ou vers l'état $|50c\rangle$ (courbe verte). La courbe bleue présente le signal d'ionisation correspondant à deux impulsions successives qui transfèrent en deux temps les atomes vers l'état $|51c\rangle$ puis vers l'état $|50c\rangle$.

Pour vérifier cette hypothèse, on applique dès l'extinction du champ radiofréquence une impulsion micro-onde π de fréquence égale soit à la transition $|52c\rangle \rightarrow |51c\rangle$, soit à la transition $|52c\rangle \rightarrow |50c\rangle$. Les signaux d'ionisation sont présentés Figure II.25 **(b)**. À l'issue du passage adiabatique avec 250 mV pour tension de modulation (courbe noire), les atomes circulaires $|52c\rangle$ sont donc transférés vers le niveau circulaire $|51c\rangle$ (courbe rouge) ou vers le niveau circulaire $|50c\rangle$ (courbe verte). On présente aussi le transfert des atomes $|52c\rangle$ dans le niveau $|50c\rangle$ par application successive de deux impulsions micro-ondes π à un photon (courbe bleue). À la suite de ces impulsions, on détecte environ un

6. Il faut noter que l'on détecte 6 atomes dans l'état final $|n = 52, n_1 = 1, m = 51\rangle \equiv |52c\rangle$ (courbe noire) alors que nous ne « disposons » que de 1,6 atomes dans l'état initial $|n = 52, n_1 = 1, m = 2\rangle$ (courbe orange). Ceci s'explique par l'efficacité de détection du *channeltron* dont les tensions des lentilles électrostatiques guidant les électrons ont été optimisées pour l'état circulaire.

atome au seuil d'ionisation du niveau $|52c\rangle$. Ceci peut s'expliquer par deux hypothèses. Première hypothèse : dû aux ventres et aux nœuds du champ micro-onde, il est possible de ne pas parvenir à effectuer une impulsion π transférant 100 % de la population lors de l'impulsion. Seconde hypothèse : les conditions du passage adiabatique ne sont pas pleinement et largement vérifiées (polarisation du champ radiofréquence, adiabaticité, etc.) et l'efficacité du transfert par passage adiabatique n'est pas parfaite, ce qui génère un certain nombre d'états elliptiques non désirés. Une analyse complète des produits du passage adiabatique depuis le niveau $|n = 52, n_1, m = 2\rangle$ a été présentée au chapitre III de la thèse de doctorat d'Adrien Signoles [103].

II.3.5 Polarisation du champ RF et optimisation du passage adiabatique

Toutes choses étant optimisées par ailleurs, l'efficacité de la procédure de circularisation dépend uniquement de la pureté de la polarisation du champ radiofréquence. La proportion d'atomes portés dans le niveau circulaire constitue donc un bon critère pour optimiser la polarisation du champ radiofréquence. Néanmoins, il convient de vérifier qu'au-delà de la qualité de la polarisation, l'amplitude du champ est suffisante. Pour cela, la tension de modulation des mélangeurs contrôlant l'amplitude du champ radiofréquence peut être variée afin de vérifier que seule la polarisation du champ réduit l'efficacité du passage adiabatique.

Reproduisons, cette fois-ci par la méthode d'optimisation du passage adiabatique, le réglage de la polarisation des électrodes 1 et 2. Nous nous plaçons dans la multiplicité $n = 49$. Les mélangeurs permettant de régler séparément l'amplitude des deux voies de la carte PCI sont alimentés pareillement avec 1 V. La Figure II.26 (a) représente le taux de transfert

$$\chi = \frac{P_{|49c\rangle}}{P_{|49c\rangle} + P_{|50c\rangle}} \quad , \quad (\text{II.8})$$

de la micro-onde de purification en fonction de la phase relative entre les deux voies RF. Le taux de transfert de l'impulsion de purification χ reflète la pureté en atomes circulaires des produits du passage adiabatique depuis le niveau $|n = 49, n_1, m = 2\rangle$, témoignant elle-même de la bonne pureté de la polarisation du champ radiofréquence. On commence tout d'abord par faire varier la phase relative entre les deux voies RF. Sur la Figure II.26 (a), on mesure que la phase relative optimale vaut $\varphi_{3/4} = \varphi_3 - \varphi_4 = 102,1^\circ$. Pour ce réglage de la phase relative, on peut alors optimiser l'amplitude relative des deux voies en faisant varier la tension de contrôle du mélangeur contrôlant l'amplitude de la voie 2. Sur la Figure II.26 (b), on constate que le taux de transfert est maximal avec une tension

de contrôle de 1,17 V. Finalement, on peut faire varier l'amplitude globale du champ radiofréquence en balayant la valeur maximale de la modulation sur le générateur de fonction arbitraire alimentant les mélangeurs contrôlant simultanément les deux voies de la carte PCI. On observe Figure II.26 (c) qu'à partir d'une certaine valeur de l'amplitude du champ radiofréquence, le taux de transfert atteint un plateau. A 340 mV, la valeur maximale est atteinte et on ne sature pas les mélangeurs. Il convient d'ajouter que la valeur relativement faible (70 %) du taux de transfert est imputable au fait que la sonde micro-onde $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ n'a pas été optimisée afin de générer une impulsion π . Ceci n'est pas l'objet de cette procédure qui s'attache uniquement et de manière rapide à optimiser le processus de circularisation par passage adiabatique.

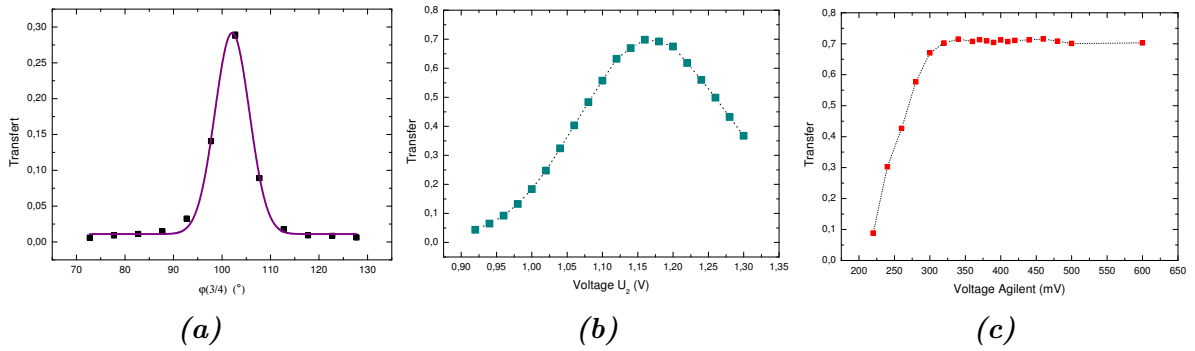


FIGURE II.26 – Optimisation de la polarisation du champ RF par optimisation du passage adiabatique dans la multiplicité $n = 49$. (a) Taux de transfert de la sonde micro-onde $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ en fonction de la phase relative des deux voies de la carte PCI alimentant les électrodes 1 et 2, les deux voies ayant une amplitude égale (1 V en tension de contrôle des mélangeurs individuels contrôlant séparément l'amplitude des deux voies RF). (b) Pour un réglage de phase optimisé, taux de transfert de la sonde micro-onde $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ en fonction de l'amplitude relative des deux voies de la carte PCI. (c) Pour un réglage optimisé de la phase et de l'amplitude relatives, taux de transfert de la sonde micro-onde $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ en fonction de l'amplitude totale du champ radiofréquence.

Cette méthode de réglage de la polarisation a le mérite d'être efficace et permet en outre de vérifier rapidement la qualité de la polarisation du champ radiofréquence à 230 MHz, qui n'a *in fine* pour vertu que de transférer efficacement les atomes de Rydberg jusqu'au niveau circulaire d'une multiplicité.

Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté l'environnement cryogénique et le montage expérimental en lui-même, nous avons détaillé la génération de ces atomes circulaires depuis le niveau fondamental $5s$ du rubidium par absorption de trois photons optiques

puis de 46 photons radiofréquences⁷ lors d'un processus adiabatique impliquant un champ radiofréquence à 230 MHz polarisé σ_+ . Deux méthodes ont été proposées dans ce chapitre afin d'optimiser la polarisation du champ radiofréquence 230 MHz : une première méthode par spectroscopie dans les états de Rydberg de faible moment cinétique orbital et une seconde par optimisation *in situ* du passage adiabatique dont le produit final sont les atomes de Rydberg circulaires.

Au terme de ce chapitre technique, nous disposons d'atomes de Rydberg circulaires pouvant interagir avec un champ radiofréquence polarisé σ_+ à 230 MHz ou à 530 MHz. Il convient de noter que les procédures d'optimisation de la polarisation du champ radiofréquence peuvent être longues à mettre en œuvre et qu'une attention constante a été portée à la stabilité (électrique, informatique, mécanique...) du dispositif. En particulier, tous les réglages du champ radiofréquence ont été effectués à fréquence fixe et un changement de ces fréquences impliquerait de reprendre toute la procédure. Dans le cadre des expériences sur la dynamique de Zénon quantique qui seront l'objet du chapitre III de ce manuscrit, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ interagira avec un champ radiofréquence σ_+ à 230 MHz. Dans le cadre des expériences de métrologie quantique présentées aux chapitres IV et V, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ sera manipulé par un champ radiofréquence σ_+ à 530 MHz. Dans les deux cas, nous avons vu sur les montages électroniques (en Figure II.14 ou en annexe D) que nous disposons grâce au synthétiseur d'un jeu de deux champs radiofréquences σ_+ , dont la phase relative est ajustable électroniquement.

7. Ceci dans le cas d'une circularisation dans la multiplicité $n = 49$ par passage adiabatique depuis le niveau de faible moment cinétique orbital $|n = 49, n_1 = 1, m = 2\rangle$ jusqu'au niveau circulaire $|n = 49, n_1 = 1, m = 48\rangle$.

Chapitre III

Dynamique Zénon quantique et métrologie

*Und der Haifisch, der hat Zähne
Und die trägt er im Gesicht
Und Macheath, der hat ein Messer
Doch das Messer sieht man nicht.*

Bertolt Brecht, L'Opéra de quat'sous (1928)

Sommaire

III.1 QZD : Principe théorique	139
III.1.1 Effet Zénon quantique	139
III.1.2 Dynamique Zénon quantique	141
III.1.3 Formulations alternatives	144
III.2 Dynamique Zénon quantique du moment cinétique \hat{J}_1	146
III.2.1 Espace des états	146
III.2.2 Mesure des populations	149
III.2.3 Représentation de la QZD par fonctions Q successives	154
III.3 Reconstruction complète d'un état du moment cinétique \hat{J}_1	158
III.3.1 Principe général	159
III.3.2 Reconstruction d'un état <i>Chat de Schrödinger</i> du moment cinétique	161
III.3.3 Résultat de la reconstruction - Fonction de Wigner	168
III.3.4 Paramètres de reconstruction par maximum de vraisemblance	170
III.4 Obtention directe d'une coupe de la fonction de Wigner	175
III.4.1 Analogie avec l'optique quantique	175
III.4.2 Approximation par une somme alternée tronquée	177
III.4.3 Mesure expérimentale de la fonction de Wigner	177

Le chapitre précédent a montré notre aptitude à manipuler l'état d'un atome de Rydberg par couplage à un champ radiofréquence classique. Au sein d'une multiplicité $n \sim 50$ donnée, la polarisation σ_+ du champ radiofréquence permet de restreindre l'évolution du système au sein d'un sous-espace composé d'un nombre fini de niveaux au premier ordre équidistants, séparés par l'effet Stark linéaire. Ce comportement hydrogénoïde nous a permis de décrire l'état atomique à l'aide d'un moment cinétique de grande taille $\hat{\mathbf{J}}_1$, dont la dynamique se représente commodément sur la sphère de Bloch généralisée. En particulier, le couplage d'un atome de Rydberg circulaire au champ radiofréquence polarisé engendre sur cette sphère une rotation du moment cinétique depuis le pôle Nord vers les régions méridionales, associées aux plus bas niveaux de l'échelle de spin, qui, affectés par le défaut quantique, sortent du modèle hydrogénoïde.

Le couplage de l'atome à un champ radiofréquence classique ne permet de générer que des états cohérents du moment cinétique, qui sont des états atomiques quasi classiques. Néanmoins, les premières propositions de réalisation de la dynamique Zénon quantique (QZD) sur le mode d'un champ électromagnétique [158,159] ont fait émerger l'idée de dynamiques nouvelles et très non classiques, pouvant être générées par couplage du champ à une source quasi classique en modifiant l'espace de Hilbert par une mesure. L'extrême similitude entre l'oscillateur harmonique et un moment cinétique, analogie développée en particulier dans l'annexe A, nous a invité ces dernières années à implémenter ces dynamiques originales sur nos atomes de Rydberg et ainsi à générer, par couplage à un champ pourtant classique, des états non classiques du moment cinétique [96,103]. Superpositions cohérentes de deux grands moments cinétiques pointant dans deux directions différentes, ces états non classiques ont permis d'envisager des expériences de métrologie quantique, qui seront décrites dans les prochains chapitres de ce manuscrit.

La dynamique de Zénon quantique a été décrite précédemment dans la thèse de doctorat d'Adrien Signoles [103]. Cette dynamique de Zénon quantique est envisagée dans ce manuscrit sous un angle différent. Au-delà des dynamiques nouvelles offertes à un moment cinétique de grande taille, cette méthode permet de générer des états non classiques, qui peuvent être utilisés comme sondes électrométriques. Ainsi, après avoir brièvement rappelé le principe théorique de la dynamique Zénon quantique et décrit son implémentation sur le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$, nous identifierons dans ce chapitre des motifs d'interférence pouvant constituer un signal de métrologie quantique. Ce signal métrologique est le fruit d'une méthode de reconstruction complète de l'état du moment cinétique qui, plus particulièrement développée par mes soins lors de notre travail commun avec Adrien Signoles et qui ne fut donc pas abordée dans son manuscrit de thèse, sera ici décrite théoriquement puis dans ses détails pratiques. Finalement, fort de la connaissance des états du type *Chat de Schrödinger* générés par QZD dont l'état fut complètement reconstruit, nous tenterons de nouveau d'obtenir par une méthode plus directe les franges d'interférence métrologiques précédemment identifiées.

III.1 QZD : Principe théorique

La dynamique de Zénon quantique fut proposée en 2000 par Facchi *et al.* [160]. Elle demeure aujourd'hui le sujet de nombreuses publications tant théoriques [161–163] que rapportant son observation expérimentale dans divers systèmes [96, 164–166], la plupart faisant ainsi suite à la proposition d'application à l'électrodynamique quantique en cavité par Raimond *et al.* [158] en 2010.

La dynamique Zénon quantique constitue une généralisation de l'effet Zénon quantique (QZE) [167, 168], qu'il convient donc de présenter tout d'abord. La grande similarité des concepts mis en jeu dans ces deux effets aide à penser l'un et l'autre et nous commencerons donc par introduire cet effet Zénon quantique.

III.1.1 Effet Zénon quantique

Le *postulat de la mesure*, traitant des issues possibles d'une mesure sur un système quantique, ainsi que le *postulat de réduction du paquet d'onde* occupent une position centrale dans les fondements de la mécanique quantique [169]. Le postulat de réduction du paquet d'onde énonce en particulier qu'immédiatement après une mesure d'une grandeur physique quelconque A sur un système physique $|\psi\rangle$ ayant donné la valeur a_α , le nouvel état du système $|\psi'\rangle$ correspond à la projection du vecteur d'état $|\psi\rangle$ sur le sous-espace propre associé à la valeur propre a_α :

$$|\psi'\rangle = \frac{|\psi_\alpha\rangle}{\| \psi_\alpha \|} \quad \text{avec} \quad |\psi_\alpha\rangle = \hat{P}_\alpha |\psi\rangle \quad , \quad (\text{III.1})$$

où l'opérateur \hat{P}_α est le projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre a_α .

Dans le cas d'une évolution cohérente du système durant un temps t à l'issue de la mesure, la probabilité de retrouver le système dans son état projeté $|\psi_\alpha\rangle$, appelée *probabilité de survie* [170], s'écrit :

$$p(t) = |\langle \psi_\alpha | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} | \psi_\alpha \rangle|^2 \quad . \quad (\text{III.2})$$

Un développement aux temps courts mène à l'évolution quadratique suivante :

$$p(t) = 1 - \frac{t^2}{\tau_Z^2} + o(t^2) \quad \text{où} \quad \tau_Z^{-2} \equiv \langle \psi_\alpha | \hat{H}^2 | \psi_\alpha \rangle - \langle \psi_\alpha | \hat{H} | \psi_\alpha \rangle^2 \quad . \quad (\text{III.3})$$

Le temps τ_Z , parfois appelé « temps Zénon », correspond donc au temps caractéristique de

l'évolution quadratique aux temps courts. Il est intéressant de noter que si l'on décompose le hamiltonien en une partie libre et une partie d'interaction $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ telles que :

$$\hat{H}_0|\psi_\alpha\rangle = \hbar\omega_\alpha|\psi_\alpha\rangle \quad \text{et} \quad \langle\psi_\alpha|\hat{H}_{int}|\psi_\alpha\rangle = 0 \quad , \quad (\text{III.4})$$

le temps Zénon ne dépend plus que du carré du hamiltonien d'interaction :

$$\tau_Z^{-2} = \langle\psi_\alpha|\hat{H}_{int}^2|\psi_\alpha\rangle \quad . \quad (\text{III.5})$$

Si l'on répète maintenant N mesures à des instants réguliers séparés $\tau = t/N$, le système sera projeté sur l'état initial avec une probabilité $p(t)$. Une fois que la fonction d'onde a été projetée, une nouvelle évolution recommence indépendamment des évolutions précédentes. Ainsi, la probabilité de survie après les N mesures s'écrit :

$$p^{(N)}(t) = p(\tau)^N = e^{-\gamma_{\text{eff}}(\tau)t} \quad , \quad (\text{III.6})$$

où $\gamma_{\text{eff}}(\tau) \equiv -\frac{1}{\tau} \log p(\tau) > 0$ représente un taux de décroissance effectif. Pour $\tau \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), $p(\tau) \sim \exp(-\tau^2/\tau_Z^2)$, d'où¹ :

$$\gamma_{\text{eff}}(\tau) \sim \frac{\tau}{\tau_Z^2} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0 \quad \text{soit} \quad p^{(N)}(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 \quad . \quad (\text{III.7})$$

On voit ici, à travers le carré du temps Zénon dans l'expression du taux de décroissance effectif $\gamma_{\text{eff}}(\tau)$, le caractère essentiel de l'évolution quadratique aux temps courts afin de rendre la probabilité de survie proche de l'unité quand $\tau \ll \tau_Z$, c'est-à-dire quand la fréquence de répétition de la mesure est suffisamment grande. C'est ce départ quadratique, associé à toute évolution hamiltonienne, qui est exploité aux temps courts afin de geler la dynamique du système en répétant une telle mesure projective à des intervalles de temps courts devant τ_Z [176–180]. L'effet Zénon est cependant inefficace pour les processus markoviens, tels les processus de dissipation mis en jeu lorsque le système est couplé à l'environnement, dont le temps d'auto-cohérence est très court². Pour ce type de systèmes dissipatifs, la probabilité de survie $p(t) = 1 - \Gamma t$ est linéaire en temps aux temps courts, de sorte qu'après N mesures, $p^{(N)}(t) = (1 - \Gamma \tau)^N \sim 1 - \Gamma t$, qui est indépendant de N .

1. Si cette formulation de l'effet Zénon quantique est fort intuitive, elle laisse de côté un certain nombre de préoccupations d'ordre mathématique telles l'existence des différents moments du hamiltonien ou la convergence des développements ainsi que des problèmes plus subtils de Théorie des champs reliés à la règle d'or de Fermi [171, 172]. Le lecteur intéressé par ces considérations quelque peu techniques est invité à consulter les références suivantes [173–175].

2. Il est néanmoins possible de découpler dynamiquement le système (*dynamical decoupling*) de son environnement par effet Zénon quantique ou technique « bang-bang » et ainsi lutter contre la décohérence [181, 182].

D'abord mis en évidence dans des systèmes à deux niveaux [183–188], l'effet Zénon a ensuite été observé sur des systèmes plus complexes (transitions radiofréquences de niveaux hyperfins [183], systèmes ioniques [184, 185] et moléculaires [189], condensats de Bose-Einstein [187, 188]). Notre équipe a observé cet effet Zénon quantique sur les niveaux d'un oscillateur harmonique, où l'état du champ électromagnétique piégé dans une cavité micro-onde supraconductrice était « gelé » dans l'état vide de photon $|0\rangle$. Partant d'une cavité initialement vide, l'injection d'un champ micro-onde cohérent par une source classique déplace le champ vide linéairement dans l'espace des phases. Comme le montre la Figure III.1, on constate alors la croissance quadratique du nombre de photons qui finit par saturer, dû aux pertes vers l'extérieur de la cavité (points et courbe rouges). L'alternance d'injections d'un champ micro-onde émis par la source classique et de mesures non destructives du nombre de photons inhibe la croissance du champ cohérent à l'intérieur de la cavité [168] (points bleus). Ces expériences ont fait l'objet de la thèse de doctorat de Julien Bernu [190] soutenue en 2008.

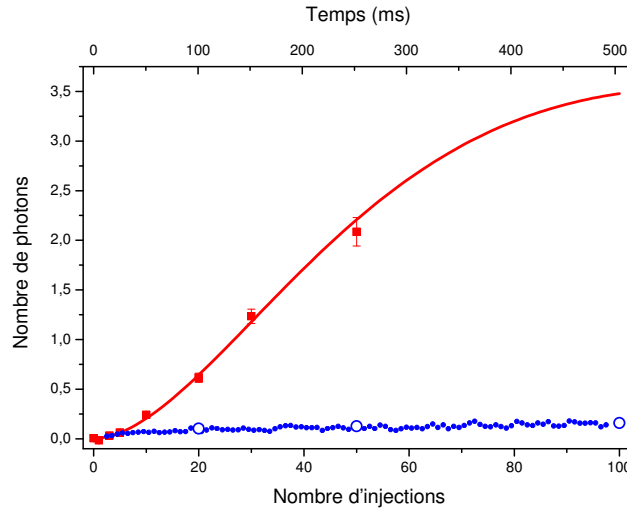


FIGURE III.1 – Mise en évidence de l'effet Zénon quantique sur les modes d'un oscillateur harmonique (Figure extraite de [190]). Les points et la ligne rouges caractérisent la croissance cohérente du champ dans la cavité supraconductrice couplée à une source micro-onde classique en impulsion. La répétition de mesures QND du nombre de photons « gèle » l'évolution du champ dont le nombre de photons reste proche de 0 (points bleus).

III.1.2 Dynamique Zénon quantique

Dans tout le paragraphe précédent, nous avons supposé que le vecteur d'état $|\psi\rangle$ du système était projeté – sous l'effet de la mesure \hat{A} – dans l'état $|\psi_\alpha\rangle$ associé à la valeur propre α non dégénérée. En effet, dans le cas d'une valeur propre non dégénérée, le sous-espace propre désigné dans le *postulat de projection du paquet d'onde* est engendré par un unique vecteur propre et on retrouve le cadre d'application de l'effet Zénon quantique.

Dans le cas d'une valeur propre d fois dégénérée, le sous-espace propre associé à cette valeur propre a_α , noté \mathcal{H}_α , sera de dimension d . L'action d'une telle mesure est représentée par l'opérateur \hat{P}_α de projection sur l'espace \mathcal{H}_α [191–193], tel que :

$$\sum_{\alpha | a_\alpha \in \text{Sp}(\hat{A})} \hat{P}_\alpha = \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \text{Tr} \hat{P}_\alpha = \dim \mathcal{H}_\alpha = d \quad . \quad (\text{III.8})$$

Ainsi l'évolution hamiltonienne du système, générée par l'opérateur évolution unitaire $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$, en présence d'une telle mesure N fois répétée à des intervalles de temps réguliers de durée $\tau = t/N$, donne lieu à une évolution du système sous l'action de l'opérateur :

$$\hat{U}_{\hat{P}_\alpha}^{(N)}(t) = \left[\hat{P}_\alpha \hat{U}\left(\frac{t}{N}\right) \right]^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_Z t} \hat{P}_\alpha \quad , \quad (\text{III.9})$$

où \hat{H}_Z désigne le hamiltonien Zénon [167, 194] défini comme la restriction du hamiltonien \hat{H} au sous-espace Zénon \mathcal{H}_α :

$$\hat{H}_Z = \hat{P}_\alpha \hat{H} \hat{P}_\alpha \quad . \quad (\text{III.10})$$

Le système est donc projeté dans \mathcal{H}_α mais peut en outre y évoluer de manière hamiltonienne [160] sous l'effet du hamiltonien effectif \hat{H}_Z . Par ailleurs, la mesure donnera presque certainement à chaque répétition la valeur a_α dans la limite $\tau \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). L'effet d'une telle mesure répétée n'est donc plus simplement de « geler » l'état du système quantique comme pour l'effet Zénon quantique. Elle offre au système plus de liberté en permettant une évolution cohérente dans le sous-espace propre. Cette dynamique confinée dans un sous-espace propre \mathcal{H}_α de dimension $d > 1$ de la mesure porte le nom de « dynamique Zénon quantique ».

Dans le cadre de la dynamique Zénon quantique, la probabilité de survie $p^{(N)}(t)$ correspond donc à la probabilité de retrouver le vecteur d'onde à l'issue de la mesure dans le même sous-espace Zénon. A la limite $\tau \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), le confinement du système dans un tel sous-espace tendant à être certain, le couplage entre états appartenant à différents sous-espaces Zénon tend donc à s'annuler. Ceci est représenté sur la Figure III.2, qui illustre le principe de la dynamique Zénon quantique. La partition de l'espace de Hilbert total \mathcal{H} (sous-figure **(a)**) en sous-espaces Zénon \mathcal{H}_α (sous-figure **(b)**) :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha | a_\alpha \in \text{Sp}(\hat{A})} \mathcal{H}_\alpha \quad , \quad (\text{III.11})$$

vient des propriétés suivantes des opérateurs de projections³ $\{\hat{P}_\alpha\}_{\alpha|a_\alpha \in \text{Sp}(\hat{A})}$:

$$\hat{P}_\alpha \hat{P}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} \hat{P}_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha|a_\alpha \in \text{Sp}(\hat{A})} \hat{P}_\alpha = \mathbb{1} \quad , \quad (\text{III.12})$$

où $\delta_{\alpha,\beta}$ désigne le symbole de Kronecker. L'action de la mesure répétée infiniment rapidement est schématisée entre les sous-figures (b) et (c) dans la disparition des couplages entre les différents états propres appartenant à des sous-espaces Zénon différents. À l'intérieur d'un tel sous-espace cependant, l'évolution est régie par le hamiltonien Zénon \hat{H}_Z qui n'est rien d'autre que la restriction du hamiltonien total \hat{H} au sous-espace Zénon de confinement.

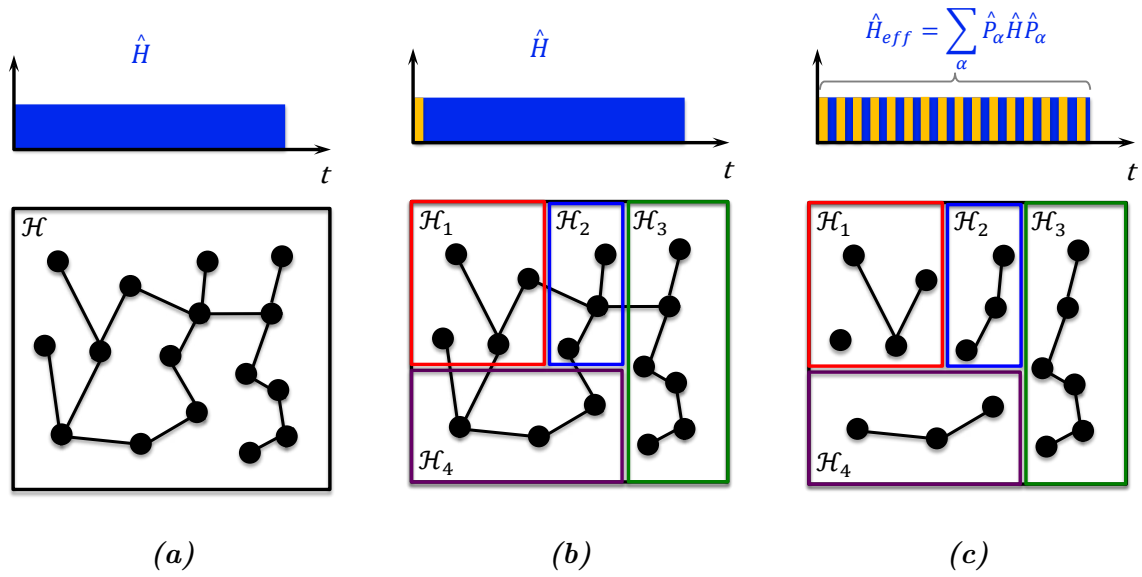


FIGURE III.2 – Illustration du principe de la dynamique Zénon quantique. (a) Représentation schématique de l'espace de Hilbert \mathcal{H} des états du système décrit par le hamiltonien libre \hat{H}_0 . Les traits noirs représentent le couplage entre les différents états propres (points noirs) sous l'action du hamiltonien d'interaction \hat{H}_{int} . (b) La mesure \hat{A} possède plusieurs valeurs propres dégénérées a_α , $\alpha = 1, \dots, 4$. On divise l'espace de Hilbert en cases symbolisant les quatre sous-espaces Zénon \mathcal{H}_α . (c) L'évolution du système sous l'action de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ en présence de la mesure \hat{A} répétée infiniment rapidement est décrite par la restriction de \hat{H} à un sous-espace \mathcal{H}_α .

La partition de l'espace de Hilbert en sous-espaces Zénon est déterminée par les opérateurs de projection qui caractérisent la mesure [191–193]. Quant à l'espace Zénon dans lequel l'évolution du système est confinée, il est déterminé par le résultat de la première mesure réalisée. L'effet majeur d'une mesure répétée est donc de « découper » l'espace de Hilbert total en différents sous-espaces Zénon et de laisser libre court à l'évolution hamiltonienne au sein de ces sous-espaces. Ceci offre de nombreuses perspectives quant à

3. La dimension de l'espace de Hilbert \mathcal{H} ainsi que la dégénérescence d'une valeur propre a_α peuvent être infinies. Les propriétés qui suivent imposent juste la dénombrabilité des opérateurs de projection. La Figure III.2 représente par commodité le cas d'un espace de Hilbert de dimension finie.

la génération de nouvelles dynamiques quantiques. Ces dynamiques quantiques peuvent en outre être le résultat d'une évolution hamiltonienne due au couplage avec un champ pourtant classique et en présence d'une mesure répétée.

III.1.3 Formulations alternatives

La formulation précédente de l'effet et de la dynamique Zénon quantique repose sur des mesures projectives de type von Neumann [195], qui sont des processus déclenchant « instantanément » la projection de la fonction d'onde. Cependant, ni l'effet ni la dynamique Zénon ne nécessitent de telles évolutions non unitaires et peuvent en effet être observés sur un système soumis à une évolution stroboscopique alternant de courtes évolutions hamiltoniennes et des *kicks* de phase unitaires \hat{U}_K [181]. La décomposition spectrale de l'opérateur *kick*, $\hat{U}_K = \sum_{\alpha} e^{-i\lambda_{\alpha}} \hat{P}_{\alpha}$, permet d'écrire l'opérateur évolution d'une telle dynamique :

$$\hat{U}_K^{(N)}(t) = \left[\hat{U}_K \hat{U}\left(\frac{t}{N}\right) \right]^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \hat{U}_K^N e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_Z t} \quad , \quad (\text{III.13})$$

où, de nouveau, $\hat{H}_Z = \hat{P}_{\alpha} \hat{H} \hat{P}_{\alpha}$. L'apparition des sous-espaces Zénon \mathcal{H}_{α} est ici une conséquence directe du déphasage répété des différents sous-espaces propres du *kick*, qui vient brouiller les cohérences. Cette méthode de déphasage régulier d'un système est très analogue au contrôle *bang-bang* [196, 197] largement utilisé dans les techniques de manipulations quantiques en résonance magnétique nucléaire [198–200].

Si les deux formulations précédentes ont traité de processus instantanés (unitaires ou non), les résultats principaux du QZE ou de la QZD peuvent aussi être obtenus par couplage continu [170, 194]. En effet, l'évolution du système est alors gouvernée par le hamiltonien \hat{H}_c défini par :

$$\hat{H}_c = \hat{H} + \mathcal{C} \hat{H}_{meas} \quad , \quad (\text{III.14})$$

où \mathcal{C} est une constante de couplage et où \hat{H}_{meas} est un hamiltonien d'interaction additionnel qui peut être vu comme réalisant une « mesure » continûment. En effet, en faisant l'hypothèse d'un spectre discret pour \hat{H}_{meas} , on peut écrire sa décomposition spectrale $\hat{H}_{meas} = \sum_{\alpha} \eta_{meas} \hat{P}_{\alpha}$. On prouve alors [170] que, dans la limite d'une interaction infiniment forte $\mathcal{C} \rightarrow \infty$, l'opérateur d'évolution s'écrit :

$$\hat{U}_c(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{C} \hat{H}_{meas} t} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_Z t} \quad , \quad (\text{III.15})$$

où l'on a défini, tel qu'à l'équation (III.10), le hamiltonien Zénon :

$$\hat{H}_Z = \hat{P}_\alpha \hat{H} \hat{P}_\alpha \quad . \quad (\text{III.16})$$

La structure matricielle de $\hat{U}_c(t)$ est diagonale par blocs et on retrouve l'évolution confinée au sein des sous-espaces Zénon associés à la « mesure » continue. Cette méthode n'est autre que la méthode *bang-bang* dans la limite où les *kicks* de phase sont infiniment rapprochés. Les phases entre les différents sous-espaces propres de \hat{H}_{meas} tournent suffisamment vite par rapport à l'évolution du système, que la phase accumulée moyenne à zéro les cohérences entre ces sous-espaces. Les résultats issus de la formulation en termes de couplage continu peuvent s'obtenir par utilisation du théorème adiabatique [124, 201] à partir des résultats de la formulation en termes de *kicks* unitaires.

Finalement, les trois formulations conduisent à la définition de sous-espaces Zénon et au confinement au sein de ces derniers de la dynamique du système soumis à une mesure quantique - dans une acception quelque peu étendue - répétée rapidement ou, à la limite, continûment effectuée. Les trois formulations ici proposées interrogent sur le véritable statut qu'occupe la mesure dans l'effet Zénon. Il se cache derrière l'opérateur de projection associé à une mesure de von Neumann de nombreux processus complexes qui caractérisent une mesure quantique, qui finalement ne sont pas nécessaires à la QZD. En l'occurrence, on constate ici que la mesure n'a pas besoin d'être lue pour engendrer un effet Zénon quantique. D'autre part, lorsque $N \rightarrow \infty$ mesures projectives sont répétées, le résultat devient certain et la probabilité de sortie du sous-espace Zénon associé au projecteur tend vers 0 et il n'y a donc pas de création d'entropie. C'est pourquoi la dynamique Zénon observée est la même pour les processus unitaires, qui ne s'accompagne d'aucune création d'entropie.

Au-delà des préoccupations fondamentales sur le statut de la mesure dont nous ne discuterons plus dans ce manuscrit, il convient néanmoins de remarquer que si la mesure projective annule véritablement les cohérences entre les différents sous-espaces Zénon par un processus projectif non unitaire, les deux autres formulations impliquant des processus unitaires ne font qu'introduire entre eux une phase globale rapidement variable mais déterministe. L'évolution du système au sein de l'ensemble de Hilbert tout entier n'est donc pas identique suivant la formulation choisie. La formulation en termes de processus unitaires fait qu'une superposition cohérente d'états appartenant à différents sous-espaces Zénon évoluera de manière cohérente dès lors que les phases rapidement variables entre les sous-espaces Zénon sont connues. La formulation en termes de mesures projectives générerait *de facto* un mélange statistique d'états évoluant dans chacun des sous-espaces Zénon. L'équivalence des trois méthodes n'est donc exacte que si l'on s'intéresse à l'évolution du système à l'intérieur d'un sous-espace Zénon donné.

III.2 Dynamique Zénon quantique du moment cinétique \hat{J}_1

Les premières propositions de réalisation de l'effet Zénon quantique par Raimond *et al.* portaient sur un mode du champ électromagnétique d'une cavité micro-onde [158, 159]. Nous avons vu au premier chapitre de ce manuscrit, ainsi qu'en annexe A, l'extrême similarité entre l'oscillateur harmonique et un moment cinétique ou, autrement dit, entre le champ piégé dans une cavité et le moment cinétique $j = 25$, qui représente l'état d'un atome de Rydberg dans la multiplicité $n = 2j + 1 = 51$ couplé à un champ radiofréquence polarisé σ_+ . Cette forte analogie va nous permettre d'adapter les idées de Raimond *et al.* [158, 159] aux systèmes de spins et en particulier d'implémenter la dynamique Zénon quantique au sein de cette échelle de spin formée par la cinquantaine de niveaux Stark couplés deux à deux de manière résonance par le champ radiofréquence à 230 MHz.

III.2.1 Espace des états

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, en champ électrostatique les états de l'atome d'hydrogène peuvent en l'absence d'effet Stark quadratique être décrit par deux moments cinétiques indépendants \hat{J}_1 et \hat{J}_2 . Le couplage de cet atome à un champ radiofréquence de polarisation σ_+ et résonant avec la fréquence Stark linéaire permet de ne manipuler uniquement le moment cinétique \hat{J}_1 et de restreindre l'évolution atomique à un sous-espace qui correspond donc à une échelle de spin. Le couplage de l'atome à ce champ radiofréquence polarisé engendre donc la rotation de \hat{J}_1 sur la sphère de Bloch généralisée. Nous avons vu au chapitre II que nous disposons pour ces expériences d'un champ radiofréquence à 230 MHz.

Pour le rubidium, les états de faible moment cinétique orbital n'étant pas hydrogénoïdes, il convient plutôt d'initier la dynamique du moment cinétique par couplage de l'atome au champ radiofréquence depuis le niveau de plus grand moment cinétique orbital, c'est-à-dire le niveau circulaire. Le champ électrique tel que la transition entre le niveau circulaire et le premier niveau elliptique soit à 230 MHz s'élève à $F_{st} = 2,348 \text{ V/cm}$. Par ailleurs, plus la rotation du moment cinétique \hat{J}_1 depuis cet état au pôle Nord de la sphère de Bloch généralisée sera d'angle limité, plus l'atome demeurera sur les niveaux du haut de l'échelle de spin. Ainsi, pour de petites rotations et pour une amplitude de la radiofréquence suffisante, l'effet Stark quadratique accumulé à chaque transition Stark (13,8 kHz par transition d'échelle à $F_{st} = 2,348 \text{ V/cm}$) pourra être négligé : $\delta(m) \ll \Omega_{RF}^{\sigma_+}$ pour les niveaux m explorés. Finalement dans une bonne approximation, les transitions entre niveaux Stark voisins seront donc résonantes avec le champ radiofréquence à 230 MHz et

la rotation du moment cinétique s'effectuera autour de l'axe de rotation $\Omega \sim \Omega_{RF}^{\sigma+} \mathbf{e}_x$.

Les premiers niveaux Stark explorés de la multiplicité $n_e = 51$ sont représentés Figure III.3 (a) par des traits noirs gras. Le couplage résonant entre ces états par le champ radiofréquence est représenté par les flèches jaunes. Par souci de compacité, les niveaux de l'échelle de spin seront désignés par le nombre $k \equiv n_2$ qui indique le nombre de *quanta* de moment cinétique perdus depuis le niveau initial circulaire.

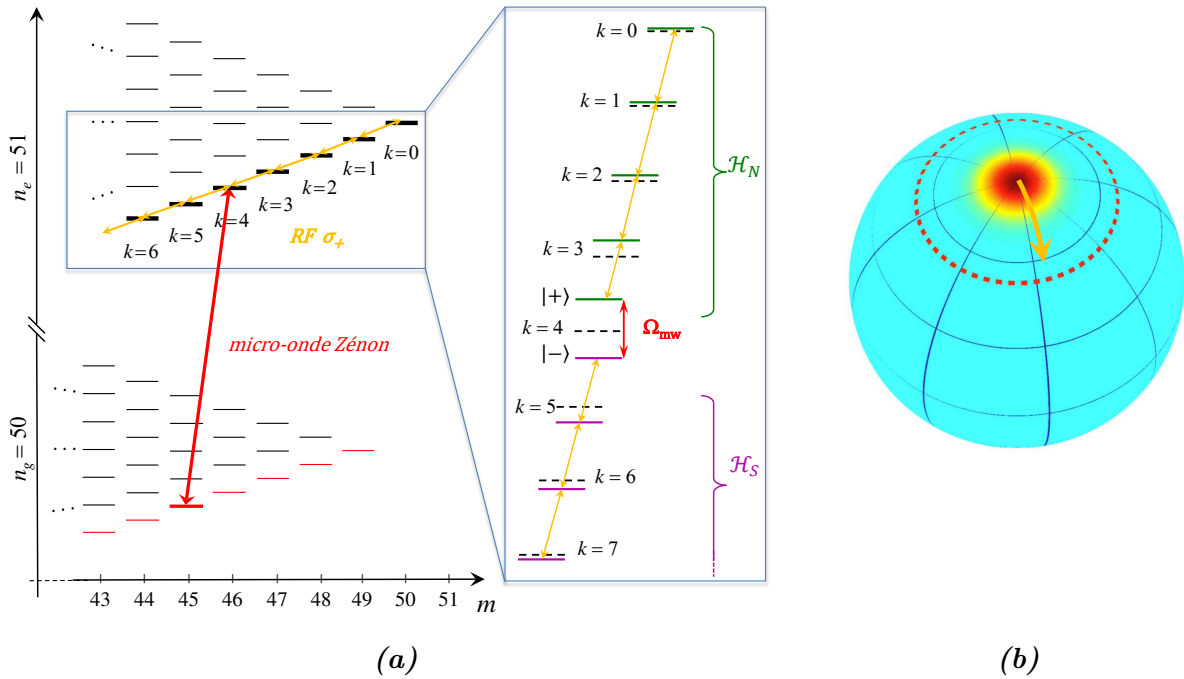


FIGURE III.3 – Couplage micro-onde continu et sous-espaces Zénon. (a) La QZD s'effectue dans la multiplicité $n_e = 51$, sur les niveaux surlignés en noir reliés par des flèches jaunes représentant le couplage résonant avec le champ radiofréquence. La micro-onde Zénon est ici résonante entre deux niveaux $k_z = 4$. Dans l'encadré, un zoom sur les niveaux de la multiplicité $n_e = 51$ représentant les niveaux d'énergie sans micro-onde Zénon (traits noirs en pointillé) ou habillés par cette dernière (traits pleins verts et violets). Les sous-espaces Zénon \mathcal{H}_N et \mathcal{H}_S sont indiqués respectivement par les accolades verte et violette respectivement. L'échelle des énergies n'est pas respectée. (b) Représentation sur la sphère de Bloch généralisée de l'effet du couplage continu de l'atome avec le champ micro-onde Zénon. Cette micro-onde sélectivement résonante entre deux états de Dicke appartenant à deux multiplicités adjacentes (flèche rouge de la sous-figure (a)) va dessiner sur la sphère de Bloch généralisée une latitude limite qui scinde cette sphère de Bloch en une calotte nord et le reste de la sphère, au sud de cette latitude limite.

Parmi les trois modalités de réalisation de l'effet Zénon proposées à la section précédente, celle en termes de couplage continu semble la plus aisée à mettre en œuvre⁴.

4. Techniquement, l'électronique de nos expériences limite la fréquence des mesures stroboscopiques, les temps d'allumage et d'extinction des mesures impulsionnelles n'étant pas en pratique arbitrairement courts. Ainsi, la répétition de mesures stroboscopiques nécessite un temps plus long, qui n'est plus petit devant le temps de cohérence de notre système. Pour des raisons expérimentales, cette modalité de réalisation de la QZD pâtit donc particulièrement des effets de la décohérence.

Le couplage continu d'un champ micro-onde, appelé « micro-onde Zénon », venant « sonder » la population atomique d'un niveau spécifique de l'échelle de spin, joue le rôle de « mesure » (flèche rouge Figure III.3 (a)). Le brouillage continu de la phase de cet état Stark singularise un état donné de l'échelle de spin et va scinder l'espace de Hilbert total \mathcal{H} en deux sous-espaces Zénon \mathcal{H}_N et \mathcal{H}_S . Cette micro-onde Zénon va ainsi dessiner sur la sphère de Bloch généralisée une *latitude limite* qui divise cette sphère de Bloch en une calotte nord et le reste de la sphère, au sud de la latitude limite, comme l'illustre la Figure III.3 (b).

Le critère de résonance sélective du champ micro-onde est réalisé grâce à l'effet Stark linéaire différentiel. En effet, entre deux états paraboliques de même nombre quantique k (et $n_1 = 0$) mais appartenant à deux multiplicités adjacentes, l'effet Stark linéaire différentiel vaut :

$$W_{(n-1,n_1,k)}^{(1)}(F_{st}) - W_{(n,n_1,k)}^{(1)}(F_{st}) = -\frac{3}{2}qa_0kF_{st} \quad , \quad (\text{III.17})$$

qui est une fonction linéaire de k . Ainsi, les transitions $|50, n_1 = 0, k\rangle \rightarrow |51, n_1 = 0, k\rangle$ sont séparées pour des k consécutifs d'une fréquence de $\Delta/2\pi = 4,63$ MHz à un champ de $F_{st} = 2,348$ V/cm. Sur la Figure III.3 (a), la micro-onde Zénon est représentée par une flèche rouge entre les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$ et n'est résonante qu'avec cette transition $|50, k_z = 4\rangle \rightarrow |51, k_z = 4\rangle$. L'effet de la micro-onde Zénon est d'habiller ces deux niveaux. Les nouveaux états propres habillés $|\pm, k_z\rangle$ sont séparés d'une énergie $\hbar\Omega_{mw}$ proportionnelle à l'amplitude du champ micro-onde. Le couplage micro-onde ouvre donc une bande d'énergie interdite, représentée dans l'encadré de la Figure III.3 (a), qui « tranche » l'espace de Hilbert \mathcal{H} en deux. Plus le couplage est intense, plus ce *gap* en énergie est important et plus le confinement des dynamiques dans les sous-espaces Zénon sera effectif.

La puissance de la micro-onde est cependant soumise à deux contraintes. La première est de demeurer suffisamment hors-résonance avec les transitions intermultiplicités voisines $|50, k_z \pm 1\rangle \rightarrow |51, k_z \pm 1\rangle$, ce qui s'exprime par la condition $\Omega_{mw} < \Delta$. La seconde contrainte est due au fait que le champ micro-onde Zénon induit des déplacements lumineux sur les niveaux voisins de k_z , comme on peut le voir sur les niveaux habillés verts et violets dans l'encadré de la Figure III.3 (a). Ces déplacements lumineux viennent altérer l'harmonie de l'échelle des niveaux et peuvent être à l'origine d'effets non linéaires néfastes équivalents à l'effet Kerr en optique quantique. Il existe donc un compromis entre le bon confinement dans les sous-espaces Zénon et la réduction des effets non linéaires. Ceci nous a conduit au choix d'une amplitude de $\Omega_{mw} = 2\pi \times 3,08 \pm 0,11$ MHz pour la micro-onde Zénon sur $k_z = 4$. Finalement, ces déplacements lumineux font qu'en particulier le champ radiofréquence à 230 MHz n'est plus résonant avec la première transition d'échelle. Ceci, nous a conduit à augmenter légèrement le champ statique F_{st} de $+1,52$ mV/cm de

telle sorte à compenser au premier ordre le désaccord entre le champ radiofréquence et les atomes, induit par cet effet de déplacement lumineux. A ce champ légèrement réhaussé, la transition $|51, k=0\rangle \rightarrow |51, k=1\rangle$ est à 230,15 MHz en l'absence de micro-onde Zénon et permet de retrouver la condition de résonance en présence de cette dernière.

III.2.2 Mesure des populations

Nous proposons dans cette section de mesurer l'évolution des probabilités d'occupation des différents niveaux $|51, k\rangle$ en fonction de la durée t_1 de l'impulsion radiofréquence polarisé σ^+ , résonante avec le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ initialement dans l'état $|51, k=0\rangle \equiv |j, +j\rangle$. Nous comparerons la dynamique de ces populations dans deux situations, qui sont résumées Figure III.4. A la suite d'une phase de préparation des atomes de Rydberg circulaires $|51c\rangle$ décrite au chapitre précédent, nous mesurerons tout d'abord les probabilités d'occupation $P_k(t_1)$ des niveaux $|51, k\rangle$, $k = 0, \dots, 5$, dans le cas d'une rotation simple du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ engendrée par le couplage au champ radiofréquence durant une durée variable t_1 . Dans un second temps, nous reproduirons cette même séquence en y ajoutant la micro-onde Zénon afin de générer une dynamique de Zénon quantique.

Expérience 1 : Rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$



Expérience 2 : Dynamique de Zénon quantique du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$

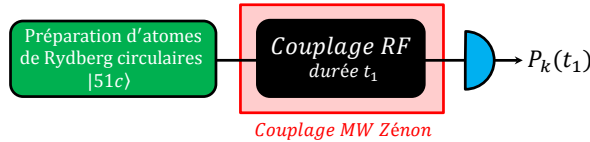


FIGURE III.4 – QZD : principe de l'expérience. A la suite d'une phase de préparation des atomes de Rydberg circulaires $|51c\rangle$ décrite au chapitre précédent et commune aux deux expériences, l'atome est couplé à un champ radiofréquence polarisé σ_+ résonant de durée variable t_1 . En l'absence de micro-onde Zénon (expérience 1), le couplage engendre la rotation simple du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$. En présence de la micro-onde Zénon, on s'attend à une dynamique différente de la première expérience, dite de Zénon quantique. A l'issue du couplage, on mesure les probabilités d'occupation des différents niveaux $|51, k\rangle$, $k = 0, \dots, 5$.

La Figure III.5 synthétise sur un même graphique l'utilisation des quatre multiplicités Stark distinctes $n = 49, \dots, 52$ dans les expériences de QZD. Les atomes sont « circulés » dans la multiplicité $n_c = 49$, puis l'état est purifié, par une impulsion π à deux photons micro-ondes vers le niveau $|51c\rangle \equiv |51, k=0\rangle$ (flèches bleu clair). Le couplage de ces atomes avec un champ radiofréquence polarisé σ^+ (flèches jaunes) génère une dy-

namique sur l'échelle des niveaux $|n_e = 51, k\rangle$ (en gras). La « mesure » Zénon est induite par couplage continu d'un champ micro-onde résonant avec la transition intermultiplicités $|51, k_z\rangle \rightarrow |50, k_z\rangle$ (flèche rouge). Pour mesurer les probabilités d'occupation $P_k(t_1)$,

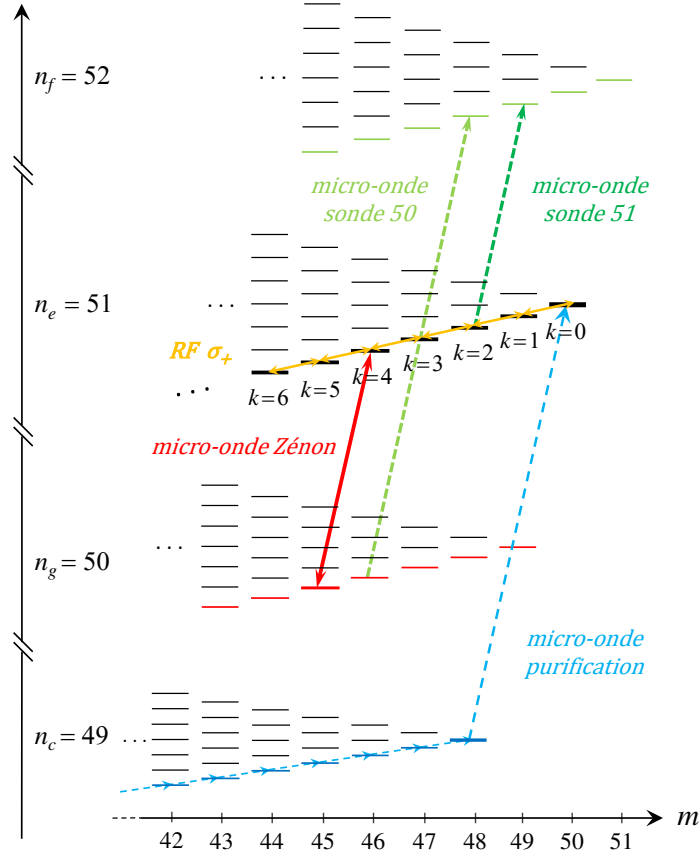


FIGURE III.5 – Multiplicités Stark mises en jeu dans l'expérience de QZD (l'échelle des énergies n'est pas respectée). Les atomes sont « circularisés » dans la multiplicité $n_c = 49$, puis soumis à une impulsion π à deux photons micro-ondes dite de « purification » vers le niveau $|51c\rangle \equiv |51, k=0\rangle$. Le couplage de ces atomes avec un champ radiofréquence polarisé σ^+ génère une dynamique des populations sur les niveaux de l'échelle $|51, k\rangle$ (en gras). La « mesure » Zénon est induite par couplage continu d'un champ micro-onde résonant avec la transition intermultiplicités $|51, k_z\rangle \rightarrow |50, k_z\rangle$ (en rouge). Nous disposons de sondes micro-ondes permettant de mesurer les populations des niveaux $k \leq 5$ des multiplicités $n_e = 51$ et $n_g = 50$ en transférant sélectivement la population des niveaux sondés vers la multiplicité $n_f = 52$.

nous disposons de sondes micro-ondes permettant de mesurer les populations des niveaux $k \leq 5$ des multiplicités $n_e = 51$ et $n_g = 50$ en transférant sélectivement la population des niveaux sondés vers la multiplicité $n_f = 52$ (flèches vertes). En effet, notre méthode de détection par ionisation distinguant les états de nombres quantiques n , mais ne différenciant pas les états de nombre k différents, il nous faut pour analyser la dynamique de notre système utiliser de nouveau l'effet Stark différentiel pour mesurer individuellement les populations des niveaux Stark. Nous exploitons donc la sélectivité des transitions sondes micro-ondes intermultiplicités pour transférer sous l'effet d'une impulsion π la population

d'un niveau $|51, k\rangle$ vers l'état $|52, k\rangle$ de la multiplicité adjacente supérieure. En détectant par ionisation la population du niveau $n_f = 52$, on accède à la probabilité d'occupation du niveau de l'échelle Stark sondé. Il nous faut cependant prendre garde, avant de mesurer les populations, à la manière dont est éteinte la micro-onde Zénon afin de découpler adiabatiquement les états atomiques de ce champ micro-onde. L'extinction doit se faire de telle sorte que les niveaux déplacés en énergie se branchent sur les niveaux nus correspondants et que les niveaux habillés $|+, k_z\rangle$ et $|-, k_z\rangle$ se branchent respectivement sur les niveaux $|51, k_z\rangle$ et $|50, k_z\rangle$. Afin de mesurer le taux de branchement vers les niveaux $|50, k\rangle$, nous disposons aussi de sondes micro-ondes deux photons permettant de transférer la population de ces états pour $k = 0, \dots, 5$ vers les états $|52, k\rangle$ (flèches verte clair).

Les Figures des pages 152 et 153 représentent les diagrammes des séquences expérimentales ainsi que la mesure des probabilités d'occupation des niveaux $|51, k\rangle$, $k \leq 5$ en fonction de la durée t_1 de l'impulsion radiofréquence, en l'absence (Figure III.6) ou présence (Figure III.7) de couplage micro-onde Zénon sur le niveau $k_z = 5$.

En l'absence de micro-onde Zénon, on observe donc simplement la dynamique d'un état cohérent de spin en rotation sous l'effet du couplage de l'atome au champ radiofréquence polarisé. Expérimentalement, une fois le passage adiabatique vers le niveau circulaire de la multiplicité $n_c = 49$ effectué ainsi que l'étape de purification vers le niveau $|51c\rangle$, une impulsion radiofréquence à 230 MHz de durée variable t_1 est générée à partir d'une paire d'électrodes radiofréquences⁵. A l'issue de cette impulsion radiofréquence de durée variable, les probabilités d'occupation des niveaux $|51, k\rangle$, $k = 0, \dots, 5$ sont mesurées à l'aide des micro-ondes de sonde. Le nombre d'atomes détectés est normalisé par le nombre d'atomes initialement mesuré dans le niveau $|51, k = 0\rangle$. On vérifie sur cette figure le très bon accord entre les données expérimentales et la théorie exposée au chapitre I. Sur l'insert à droite, on vérifie bien, aux trois instants (i), (ii) et (iii) indiqués sur la Figure III.6 (b), la distribution quasi poissonnienne des probabilités de projection d'un état cohérent sur les états de Dicke (I.129) (ligne noire et points jaunes). Ce bon accord nous permet d'utiliser cette courbe d'évolution des probabilités d'occupation comme calibration des différentes sondes micro-ondes ainsi que de l'amplitude du champ radiofréquence. Les efficacités η_k des sondes extraites depuis cette courbe valent $\eta_k = \{0,90 \pm 0,02; 0,90 \pm 0,01; 0,90 \pm 0,01; 0,90 \pm 0,01; 0,87 \pm 0,02; 0,84 \pm 0,02\}$ pour $k = 0, \dots, 5$. Les données présentées Figures III.6 (b) et III.7 (b) correspondent aux données brutes corrigées par ces efficacités de détection. L'ajustement permet par ailleurs de mesurer la fréquence de Rabi du champ radiofréquence : $\Omega_{RF}/2\pi = 152 \pm 4$ kHz.

En présence de la micro-onde Zénon, il convient comme précisé plus haut de découpler de manière adiabatique l'atome et le champ micro-onde à l'issue de l'impulsion radiofré-

5. Dans les faits, l'impulsion de radiofréquence finit toujours à l'instant 8 μ s et commence donc à un instant variable.

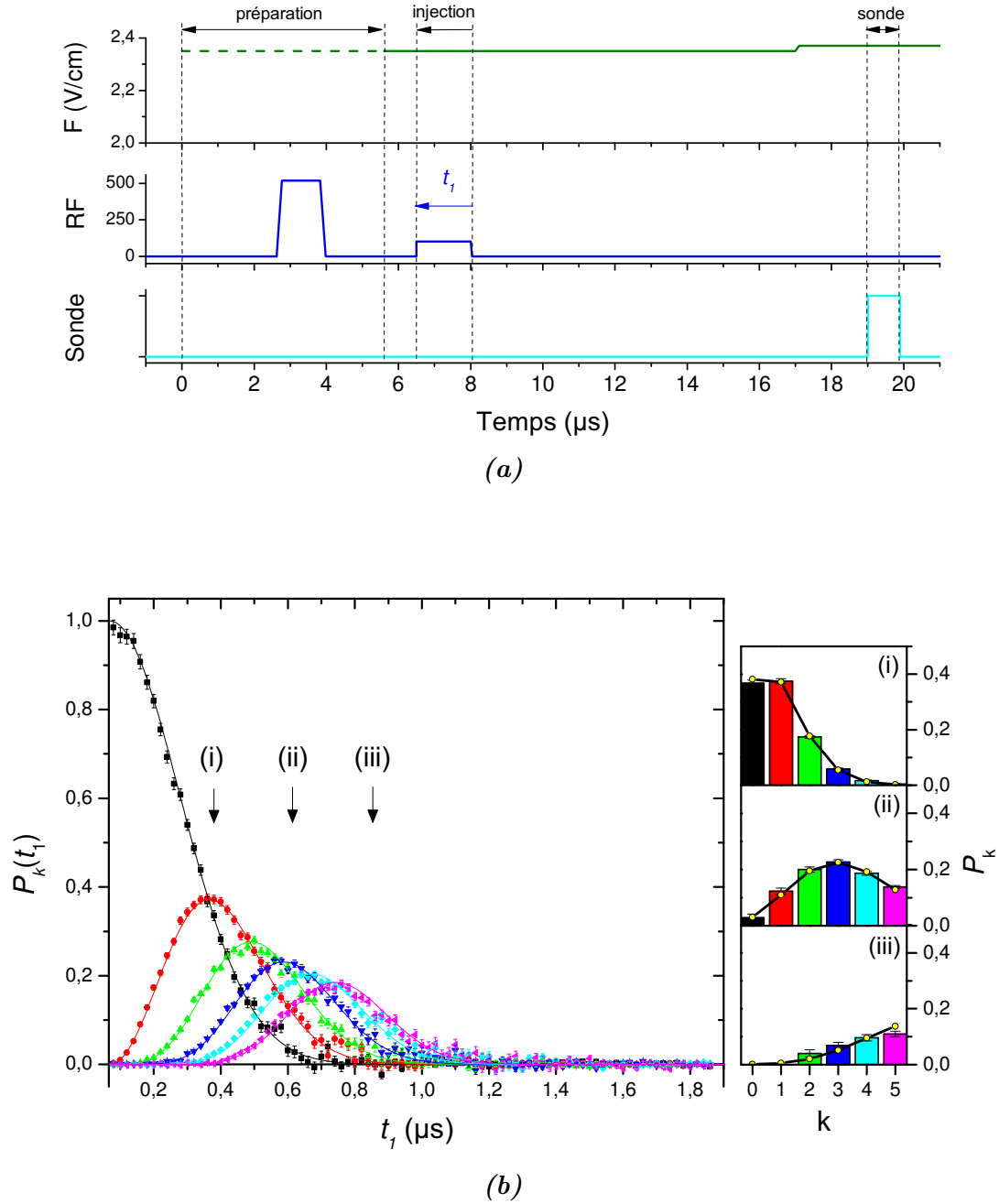


FIGURE III.6 – Rotation du moment cinétique \mathbf{J}_1 : Évolution des probabilités d'occupation des niveaux $\{|51, k\rangle, k = 0, \dots, 5\}$. **(a)** Séquence expérimentale. L'atome, préparé dans l'état circulaire $|51c\rangle$, est soumis à une impulsion radiofréquence de durée variable t_1 . A l'issue, une sonde micro-onde permet de transférer sélectivement la population des états $|51, k\rangle$ vers la multiplicité $n_f = 52$. **(b)** Évolution des probabilités d'occupation en fonction de la durée de l'impulsion radiofréquence. Les barres d'erreurs sont statistiques (égales à l'écart-type). Les couleurs pour $k = 0, \dots, 5$ sont indiquées dans les encadrés. Le modèle de l'état cohérent de spin (lignes continues) reproduit parfaitement l'expérience. Dans les encadrés est indiquée la répartition des populations à trois instants différents de la dynamique. Les barres correspondent aux mesures et les points jaunes reliés par la ligne noire aux modèles de l'état cohérent de spin (I.129). Cette courbe préliminaire nous permet de calibrer la fréquence de Rabi du champ radiofréquence : $\Omega_{RF}/2\pi = 152 \pm 4$ kHz ainsi que les efficacités η_k des sondes : $\eta_k = \{0,90 \pm 0,02; 0,90 \pm 0,01; 0,90 \pm 0,01; 0,90 \pm 0,01; 0,87 \pm 0,02; 0,84 \pm 0,02\}$ pour $k = 0, \dots, 5$.

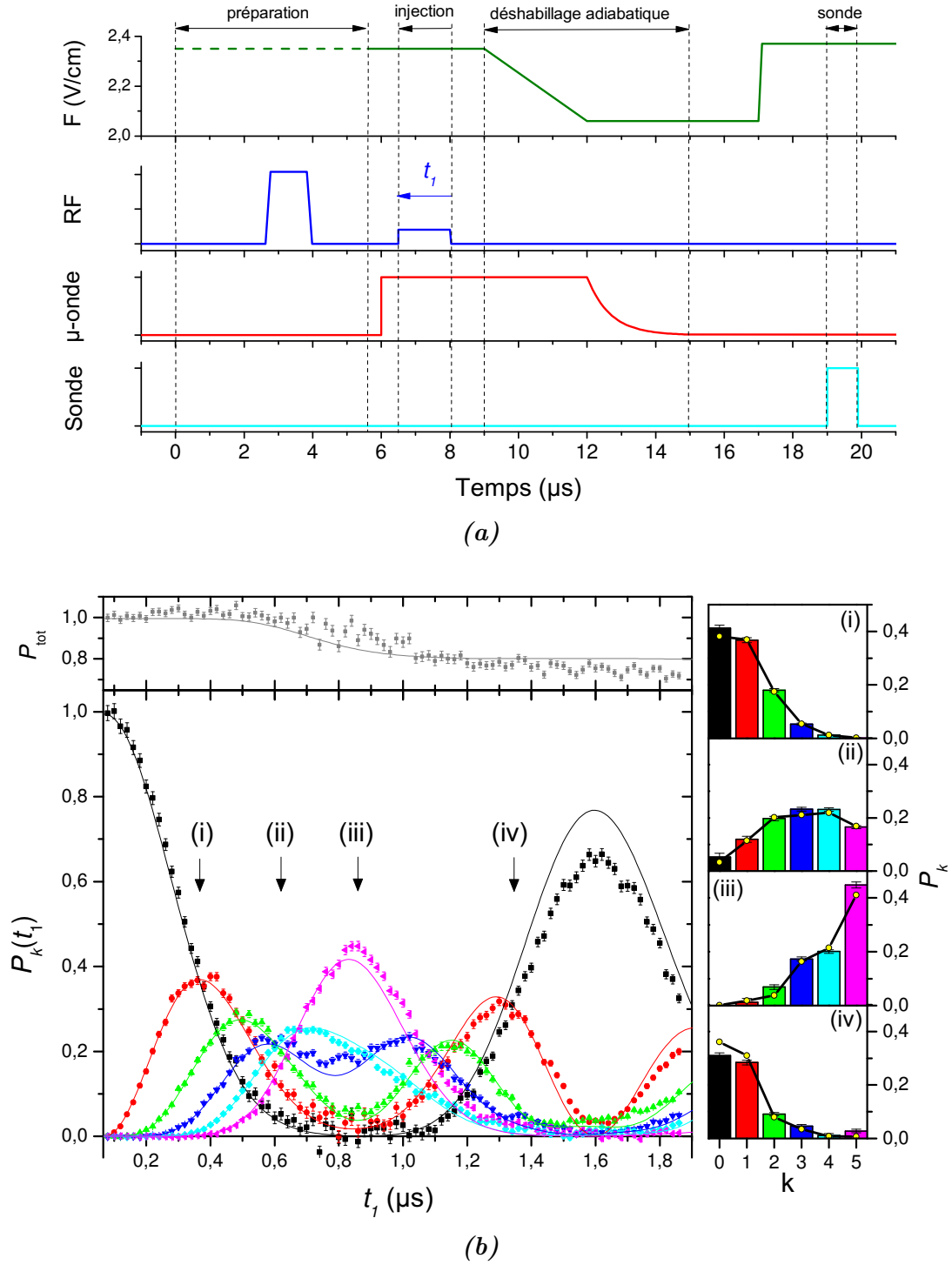


FIGURE III.7 – QZD : Évolution des probabilités d'occupation en présence de la micro-onde Zénon. **(a)** Séquence expérimentale. A la séquence décrite Figure III.6 **(a)** s'ajoute la présence de la micro-onde Zénon (courbe rouge) qui est découplée de manière adiabatique à l'issue de l'impulsion radiofréquence en la désaccordant d'abord par glissement du champ électrique à $t = 9 \mu\text{s}$ puis atténuation de sa puissance à $t = 12 \mu\text{s}$. **(b)** Évolution des probabilités d'occupation en fonction de la durée de l'impulsion radiofréquence. Les choix de représentation sont identiques à la Figure III.6 **(b)**. La courbe supérieure représente la probabilité d'occupation du sous-espace Zénon \mathcal{H}_N . Dans les encadrés est indiquée la répartition des populations à quatre instants différents de la dynamique. Les barres correspondent aux mesures et les points jaunes reliés par la ligne noire aux résultats des simulations.

quence avant de mesurer les populations. Pour que les niveaux habillés $|+, k_z\rangle$ et $|-, k_z\rangle$ se branchent respectivement sur les niveaux $|51, k_z\rangle$ et $|50, k_z\rangle$, on réduit dans un premier temps linéairement le champ électrique dès $t = 9\ \mu\text{s}$ (séquence verte Figures III.6 (a)) jusqu'à atteindre un désaccord de $\delta = \Delta/2$ entre la transition $|50, k_z\rangle \rightarrow |51, k_z\rangle$ et la micro-onde, correspondant à une réduction du champ électrique de 10% pour $k_z = 5$. Le champ micro-onde Zénon est alors lentement atténué en puissance à partir de $t = 12\ \mu\text{s}$. La séquence expérimentale est pour le reste identique avec le cas en absence de couplage Zénon.

La Figure III.6 (b) montre l'évolution des probabilités d'occupation des états $|51, k\rangle$, $k = 0, \dots, 5$ en fonction de la durée de l'impulsion radiofréquence t_1 en présence de la micro-onde Zénon. Aux temps courts, l'évolution est comparable avec celle d'un état cohérent comme en témoignent les distributions des populations aux instants (i) et (ii), représentées dans les deux premiers encadrés à droite, qui suivent toujours la loi quasi poissonnienne (I.129) associée aux états cohérents de spin. Néanmoins, quand l'état $|51, k_z = 5\rangle$ (points roses) commence à être peuplé, alors l'évolution devient bien différente. En effet, les populations des états $|51, k\rangle$, $k < k_z$ augmentent de nouveau. La symétrie « miroir » que l'on observe sur les probabilités d'occupation autour de l'instant (iii) - comme en témoignent les deux encadrés (i) et (iv) - amène à penser que le moment cinétique « rebondirait » sur la barrière Zénon ou la latitude limite de la sphère de Bloch. A l'instant (iii) du rebond, la distribution des populations est loin d'être celle d'un état cohérent, ce qui prouve bien que la dynamique observée n'est pas celle d'un moment cinétique de taille réduite $j = k_z/2$. Finalement, à $t_1 = 1,6\ \mu\text{s}$, le moment cinétique est de retour à son état initial, seul l'état circulaire (courbe noir) étant peuplé, avec une réduction de la probabilité initiale cependant.

Afin de constater que la dynamique est bien confinée aux niveaux $|51, k\rangle$, $k < k_z$, on représente dans la courbe placée sur le dessus la population totale du sous-espace Zénon \mathcal{H}_N . Dû aux imperfections expérimentales, cette population totale diminue d'environ 25% lors du « rebond » sur la barrière Zénon. La dynamique n'est donc pas parfaitement confinée et certains atomes sortent du sous-espace \mathcal{H}_N . Les simulations en traits pleins sur cette figure, réalisées sans aucun paramètre libre, témoignent de la bonne compréhension de la dynamique Zénon quantique observée.

III.2.3 Représentation de la QZD par fonctions Q successives

Afin de se représenter cette dynamique Zénon quantique du moment cinétique \hat{J}_1 dans l'espace des phases, c'est-à-dire sur la sphère de Bloch généralisée, nous pouvons commencer par mesurer la fonction Q de l'état du moment cinétique à différents instants

de son évolution. Comme précisé au chapitre I, l'expression (I.137) de $Q(\Theta, \Phi)$ fournit une méthode expérimentale simple afin de mesurer cette fonction. Celle-ci consiste à appliquer une rotation $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$ au système grâce à une impulsion radiofréquence de durée et de phase variables et de mesurer à l'issue la probabilité d'occupation de l'état circulaire $|51, k = 0\rangle$. En d'autres termes, le recouvrement de l'état après rotation $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$ avec l'état circulaire nous donne, à un facteur de normalisation près, $Q(\Theta, \Phi)$. Cette procédure n'est rien d'autre qu'une méthode de tomographie quantique par homodynage permettant, en théorie du moins, de reconstruire l'état complet du moment cinétique d'après la formule (I.140).

L'étape de découplage adiabatique de la micro-onde Zénon dure près de $6\mu\text{s}$, durant lesquelles les états non classiques générés par QZD ont le temps de décohérer. C'est pourquoi nous avons décidé de réaliser les rotations d'homodynage avant le découplage adiabatique. L'ensemble des rotations $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$ permettant de mesurer la fonction Q des différents états de $\hat{\mathbf{J}}_1$ s'effectuera donc en présence de la micro-onde Zénon. Néanmoins, ces rotations $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$ doivent être réalisées par couplage de $\hat{\mathbf{J}}_1$ avec un champ radiofréquence de grande amplitude pour que l'effet de ce couplage soit effectivement la rotation $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$, même en présence de micro-onde Zénon. D'après (I.109), le hamiltonien de couplage radiofréquence s'écrit en fonction du nombre k :

$$\hat{V}_{RF}^{\sigma_+} = \frac{\hbar\Omega_{RF}^{\sigma_+}}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \sqrt{(n-k-1)(k+1)} |n, k\rangle \langle n, k+1| + h.c. \quad . \quad (\text{III.18})$$

Il faut donc que ses éléments de matrice soient bien supérieurs à la largeur de la bande d'énergie interdite ouverte par la micro-onde Zénon⁶, qui vaut en unité de fréquence $\Delta' = 2,1\text{ MHz}$. Cette tomographie est donc effectuée avec l'autre paire d'électrodes générant aussi un champ radiofréquence polarisé σ_+ à 230 MHz de fréquence de Rabi $\Omega_{RF}^{\text{tomo}}/2\pi = 866 \pm 5\text{ kHz}$. On vérifie donc bien la condition⁷ $\sqrt{n_e}\Omega_{RF} \gg \Delta'$. On vérifiera aussi en pratique que la mesure de la fonction Q de l'état circulaire en présence du couplage micro-onde Zénon est identique à celle effectuée sans micro-onde Zénon.

La séquence expérimentale de mesure de la fonction Q est présentée Figure III.8. Immédiatement après l'impulsion radiofréquence de durée t_1 , la seconde impulsion radiofréquence d'homodynage de durée et phase variables est appliquée. On mesure alors la probabilité d'occupation du niveau $|51c\rangle$. Nous avons réalisé cette méthode pour dix va-

6. Si l'on se représente l'énergie des états habillés par le champ micro-onde, on se rend compte qu'à cause des déplacements lumineux, la différence d'énergie la plus importante entre deux niveaux appartenant à \mathcal{H}_N et \mathcal{H}_S vaut $\Delta' = 2,1\text{ MHz}$, entre $|+, k_z\rangle$ et $|51, k_z + 1\rangle$ ou $|-, k_z\rangle$ et $|51, k_z - 1\rangle$, soit légèrement plus que $0,5 \times \Omega_{mw}/2\pi = 1,54\text{ MHz}$.

7. Notre électronique ne nous permet de générer des impulsions radiofréquences qu'avec une résolution temporelle de 10 ns . A cette résolution, l'augmentation de l'amplitude du champ radiofréquence de reconstruction diminue notre résolution dans l'espace des phases. En l'occurrence, pour atteindre une résolution angulaire de $\Delta\Theta \sim 3^\circ$, la fréquence de Rabi de la radiofréquence doit rester inférieure à 1 MHz .

leurs distinctes de la durée t_1 couvrant tout un cycle de la dynamique de Zénon quantique avec une barrière Zénon à $k_z = 4$. La Figure III.9 page 157 représente l'évolution de la fonction Q expérimentale aux côtés de celle théorique issue de simulations numériques incluant tous les paramètres expérimentaux. Sur cette Figure, la sphère de Bloch est vue de dessus permettant de bien visualiser la dynamique dans la calotte nord délimitée par la latitude limite en pointillé rouge. Les mesures sont interpolées linéairement à partir de 96 points de mesures occupant la zone colorée autour du pôle Nord.

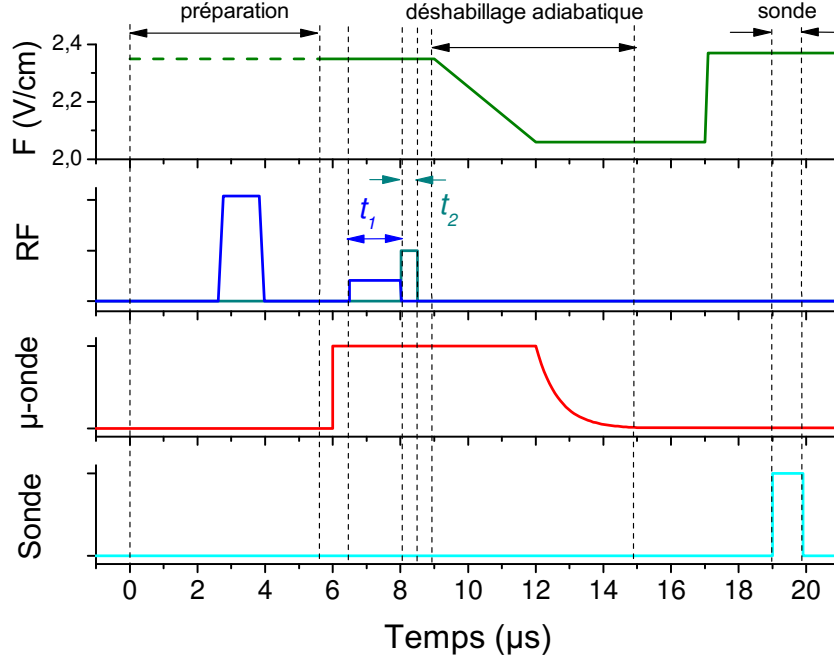


FIGURE III.8 – Séquence expérimentale de mesure de la fonction Q au cours de la QZD. L'état étudié est préparé par une impulsion radiofréquence de durée t_1 . La rotation de tomographie $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$ est générée par une seconde impulsion radiofréquence intense de durée t_2 et de phase variable. La micro-onde Zénon reste allumée pendant toute la phase de tomographie.

Partant de l'état circulaire au nord de la sphère de Bloch généralisée ($t_1 = 0$), le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ initie sa rotation jusqu'à atteindre la latitude limite définissant le sous-espace Zénon \mathcal{H}_N ($t_1 = 0, 50 \mu\text{s}$). L'évolution cohérente du moment cinétique dans \mathcal{H}_N continuant, on constate la disparition de cette composante au profit d'une composante de phase azimutale opposée qui grossit à mesure que t_1 augmente. Une fois la première composante complètement disparue, le moment cinétique persévère dans sa rotation et rejoint de nouveau le pôle Nord en $t_1 = 1, 46 \mu\text{s}$. Ces représentations de la fonction Q dans le temps sont en accord avec l'évolution des populations mesurées à la section III.2.2. Elles montrent en sus que le « rebond » du moment cinétique sur la barrière Zénon correspond dans l'espace des phases à une inversion de la phase azimutale. Le confinement de la dynamique du moment cinétique dans la calotte nord associée au sous-espace Zénon \mathcal{H}_N est de nouveau manifeste.

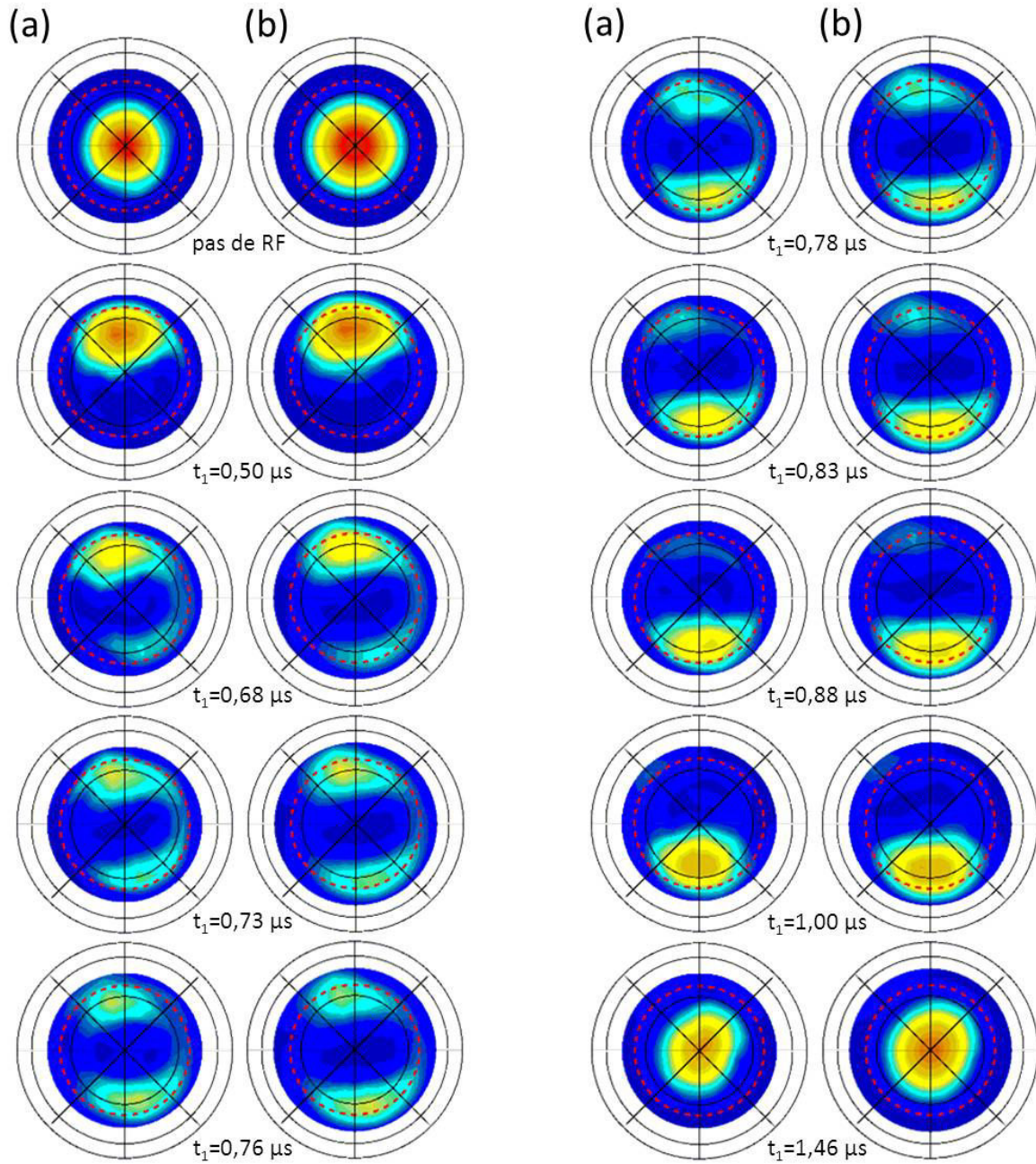


FIGURE III.9 – Évolution de la fonction Q lors de la dynamique Zénon quantique en fonction de la durée d'injection t_1 de la première impulsion radiofréquence. **(a)** Vue de dessus de la sphère de Bloch sur laquelle sont représentées les fonctions $Q(\Theta, \Phi)$ mesurées. Les droites noires indiquent les méridiens, espacés de 45° , et les cercles noirs les parallèles, séparés de 30° . La latitude limite est indiquée par un cercle pointillé rouge. Les mesures sont interpolées linéairement à partir de 96 points de mesures occupant la zone colorée autour du pôle Nord. La première sous-figure en haut à gauche correspond à l'état initial [51, c]. **(b)** Simulations numériques correspondantes.

A $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$, on observe deux composantes distinctes de phases azimutales opposées, ce qui atteste bien de la dynamique non classique de ce moment cinétique, pourtant soumis à des champs classiques ! Engendrée par l'action du hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{V}_{RF}^{\sigma+}$ en présence d'un couplage micro-onde supplémentaire qui vient sculpter l'espace de Hilbert en deux sous-espaces Zénon, la dynamique de ce système est en théorie cohérente et devrait donc évoluer (de manière spontanée et déterministe) vers une superposition quantique de deux états semi-classiques, c'est-à-dire un état du type *Chat de Schrödinger*. La mesure du temps de cohérence de nos états, limité par les inhomogénéités de champ électrique, a donné un temps de plusieurs micro-secondes bien supérieur à $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$. La fonction Q ne permet cependant pas de confirmer ou d'infirmer la cohérence de la superposition et en particulier de savoir si à l'instant $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$ le moment cinétique \hat{J}_1 est dans un mélange statistique ou dans une véritable superposition quantique des deux états mésoscopiques de phases azimutales opposées. En effet, même si toute l'information sur l'état est bien contenue dans la fonction Q , l'information sur les cohérences est ici noyée dans le bruit.

Nous allons donc reconstruire complètement la matrice densité de l'état du moment cinétique \hat{J}_1 à l'instant $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$. Ainsi, nous décrirons dans la prochaine partie la méthode de reconstruction complète d'un état par maximum de vraisemblance. A partir de l'état reconstruit, nous pourrions représenter la fonction de Wigner de l'état du moment cinétique à l'instant du rebond, qui est une représentation commode de l'état permettant de visualiser la cohérence de l'état reconstruit.

III.3 Reconstruction complète d'un état du moment cinétique \hat{J}_1

Afin de déterminer l'état $\hat{\rho}$ du moment cinétique à l'instant $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$ du rebond, nous pouvons effectuer sur cet état une série de mesures, définissant autant de POVM (*Positive Operator Valued Measure*) $\hat{\Pi}_j$. La méthode de reconstruction que nous allons présenter permet de trouver l'état le plus probable conduisant à ces résultats de mesures. Cette méthode de reconstruction va ainsi nous permettre de remonter à la matrice densité de l'état avant les rotations d'homodynage participant au processus de mesure. Dans cette partie, après avoir présenté cette méthode de reconstruction, nous détaillerons sa mise en œuvre dans le cadre de notre expérience. Nous finirons cette partie en étudiant l'influence des différents paramètres de reconstruction sur l'état final reconstruit.

III.3.1 Principe général

Nous présentons tout d'abord dans cette partie le principe théorique de reconstruction par maximum de vraisemblance, à partir de la théorie de l'estimation classique et de la loi de Bayes, puis son application à un système quantique en introduisant la fonctionnelle vraisemblance $\mathcal{L}(\hat{\rho})$. Finalement, nous présenterons une méthode itérative élégante [202] permettant en pratique de converger vers l'état de maximum de vraisemblance.

III.3.1.a Estimation par maximum de vraisemblance

La détermination de l'état $\hat{\rho}$ par la stratégie d'estimation par maximum de vraisemblance, aussi appelée reconstruction *Maxlike*⁸, permet d'exploiter au mieux toute l'information dont nous disposons sur le système lui-même et sur la mesure. Cette méthode, déjà présentée succinctement dans la thèse de doctorat de S. Deléglise [139], a permis par le passé à notre équipe de reconstruire la fonction de Wigner d'états non classiques du champ piégé dans une cavité micro-onde [203].

Cette méthode consiste à partir de mesures réalisées sur un nombre \tilde{N} de réalisations à inférer la valeur des paramètres contraints qui définissent l'état du système. Cette inférence à partir d'un nombre fini de copies du système s'effectue à l'aide d'un objet mathématique appelé *estimateur* ou fonction d'estimation $\theta(x)$. Cet estimateur associe à chaque réalisation x d'une variable aléatoire X une valeur estimée pour θ , qui est un paramètre définissant (partiellement tout au moins) l'état du système. L'estimation par maximum de vraisemblance consiste à définir cet estimateur à partir de considérations sur les probabilités conditionnelles et en particulier sur la loi de Bayes [204]. La loi de probabilité du paramètre θ définissant l'état du système conditionné au résultat de mesure x peut s'écrire :

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(x|\theta)p(\theta)d\theta} \quad . \quad (\text{III.19})$$

Si l'on ne connaît *a priori* rien sur l'état du système, on fait l'hypothèse d'une équiprobabilité pour le paramètre θ , et l'expression se simplifie :

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)}{\int p(x|\theta)d\theta} \quad . \quad (\text{III.20})$$

La reconstruction *Maxlike* consiste à choisir la valeur du paramètre θ qui maximise $p(\theta|x)$, c'est-à-dire la probabilité que le paramètre soit θ sachant le résultat de mesure x . Ceci

8. Pour *Maximum Likelihood* en anglais.

revient donc d'après (III.20) à maximiser $p(x|\theta)$ soit la probabilité que le résultat de mesure soit x sachant l'état θ . On définit de la sorte l'estimateur *Maxlike* $\theta_M(x)$ de manière implicite [204] :

$$\theta_M(x) \quad \text{tel que} \quad \left(\frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_M} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial \text{Log} p(x|\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_M} = 0 \quad . \quad (\text{III.21})$$

III.3.1.b Système quantique : fonctionnelle vraisemblance $\mathcal{L}(\hat{\rho})$

Dans le cas d'un système quantique, les différentes mesures effectuées sur le système définissent autant de POVM $\hat{\Pi}_j$, tels que ces opérateurs hermitiques et positifs forment une partition de l'opérateur unité dans l'espace des états $\sum_j \hat{\Pi}_j = \mathbf{1}$. La probabilité de sortie de l'état $|x_j\rangle$ associé au résultat de mesure x_j pour un système décrit par $\hat{\rho}$ s'écrit alors $p_j = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j]$. On définit ainsi la fonctionnelle « vraisemblance » de $\hat{\rho}$, $\mathcal{L}(\hat{\rho})$, associée à la probabilité d'observer les différents résultats x_j [202] :

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) = p(x_1, x_2, \dots | \hat{\rho}) = \left(\frac{\tilde{N}!}{\prod_j (\tilde{N}f_j)!} \right) \prod_j \left(\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j] \right)^{\tilde{N}f_j} , \quad (\text{III.22})$$

où f_j correspond à la fréquence « expérimentale » d'observation de x_j parmi les \tilde{N} réalisations. En s'inspirant de la théorie classique de l'estimation présentée plus haut, l'estimation *Maxlike* consiste à trouver l'état du système $\hat{\rho}$ qui maximise

$$\text{Log}[\mathcal{L}(\hat{\rho})] = Cste + N \sum_j f_j \text{Log}(\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j]) , \quad (\text{III.23})$$

qui dépend des fréquences mesurées f_j . La concavité de la fonction logarithme permet d'écrire la majoration :

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}) \leq Cste + N \sum_j f_j \text{Log} f_j , \quad (\text{III.24})$$

qui montre que la maximisation de la fonction vraisemblance amène à trouver $\hat{\rho}$ tel que $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j]$ soit le plus proche de f_j , faisant ainsi coïncider les résultats des mesures expérimentales avec celles associées à l'état estimé.

III.3.1.c Reconstruction itérative par maximum de vraisemblance

Cette procédure de maximisation s'effectue efficacement grâce à une méthode itérative proposée par Lvovsky en 2004 [202] qui définit, à partir des fréquences d'apparition

mesurées f_j , l'opérateur non linéaire de $\hat{\rho}$:

$$\hat{R}(\hat{\rho}) = \sum_j \frac{f_j}{\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j]} \hat{\Pi}_j \quad . \quad (\text{III.25})$$

On remarque que pour l'état $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_M$ qui tend à reproduire le mieux les données mesurées $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j] \rightarrow f_j$, donc $\hat{R}(\hat{\rho}) \rightarrow \mathbf{1}$ et l'état $\hat{\rho}_M$ satisfait donc au mieux :

$$\hat{R}(\hat{\rho}_M)\hat{\rho}_M = \hat{\rho}_M\hat{R}(\hat{\rho}_M) = \hat{R}(\hat{\rho}_M)\hat{\rho}_M\hat{R}(\hat{\rho}_M) = \hat{\rho}_M \quad . \quad (\text{III.26})$$

Ainsi, d'après la dernière égalité, l'algorithme consiste, à partir d'un état initial pris comme la matrice identité de trace normalisée à l'unité $\hat{\rho}_0 = 1/\dim\mathcal{H} \times \mathbf{1}$, à appliquer l'itération :

$$\hat{\rho}_{k+1} = \mathcal{N}_k \left[\hat{R}(\hat{\rho}_k) \hat{\rho}_k \hat{R}(\hat{\rho}_k) \right] \quad , \quad (\text{III.27})$$

où les nombres \mathcal{N}_k sont les facteurs de normalisation de la trace de $\hat{\rho}_k$ à l'unité. La méthode converge alors en un nombre fini d'itérations vers un point fixe qui satisfait au mieux l'occurrence des résultats de mesure. Par construction, la matrice densité asymptotique $\hat{\rho}_M$ est positive et normée.

III.3.2 Reconstruction d'un état *Chat de Schrödinger* du moment cinétique

Nous allons dans cette partie mettre en œuvre la méthode de reconstruction itérative présentée plus avant. Pour cela, il convient tout d'abord d'identifier les POVM $\hat{\Pi}_j$ et de donner leur expression dans une base de travail adaptée.

III.3.2.a Identification des POVM

Il suffit pour cela de reprendre la séquence expérimentale présentée Figure III.8 page 156. Il convient de lister l'ensemble des événements qui constituent le processus de mesure dans son ensemble, débutant dès l'issue de la première impulsion radiofréquence de durée t_1 :

- i. Un court instant d'attente entre l'extinction de l'impulsion radiofréquence QZD de durée t_1 et l'allumage de la seconde impulsion d'homodynage. Ce temps d'attente effectif t_{inter} est estimé à 30 ± 5 ns. Durant cette phase d'attente, la micro-onde Zénon est allumée.

- ii. Une rotation d'homodynage sous la forme d'une impulsion radiofréquence de grande intensité ayant une fréquence de Rabi de $\Omega_{RF}^{\text{tomo}}/2\pi = 866 \pm 5 \text{ kHz}$. La durée t_2 et la phase relative Φ entre cette impulsion et la première impulsion RF sont variables afin de sonder différents points (Θ, Φ) de l'espace des phases. Cette rotation s'effectue en présence du couplage micro-onde Zénon.
- iii. Le découplage adiabatique du champ micro-onde Zénon, qui se formalisera mathématiquement par l'action d'une matrice de déshabillage des niveaux.
- iv. La détection, qui consiste en l'application des diverses sondes micro-ondes vers la multiplicité supérieure $n_f = 52$ puis en à la détection par ionisation, qui correspond donc aux différentes projections de l'état du moment cinétique tourné par la rotation d'homodynage sur les états $|n_g, k\rangle$ et $|n_e, k\rangle$ pour $k = 0, \dots, 5$.

III.3.2.b Espace de Hilbert

L'habillage de l'état du moment cinétique \hat{J}_1 par la micro-onde Zénon résonante avec la transition intermultiplicités $|n_g = 50, k_z\rangle \rightarrow |n_e = 51, k_z\rangle$ impose de considérer les états dans un espace de Hilbert plus vaste que la simple multiplicité $n_e = 51$. On travaillera donc dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{n_g, n_e} des niveaux de la diagonale inférieure des deux multiplicités Stark $n_g = 50$ et $n_e = 51$, correspondant aux niveaux représentés en traits noirs gras et rouges sur la Figure III.3 page 147 (a).

Cet espace est donc constitué de deux échelles de spin composées de 50 et 51 niveaux « connectés » sur une transition par la micro-onde Zénon. L'écart entre deux niveaux Stark voisins d'une échelle est déterminé au premier ordre par l'effet Stark linéaire qui dépend du nombre quantique principal n des niveaux. Ainsi, si la première transition d'échelle depuis le niveau circulaire dans la multiplicité $n_e = 51$ vaut 230 MHz, elle ne vaut que $\frac{50}{51} \times 230 \text{ MHz} = 225,5 \text{ MHz}$ pour l'échelle inférieure $n_g = 50$.

III.3.2.c Base des états doublement habillés et hamiltoniens de couplage

i) Base des états doublement habillés

Lors de la phase (ii) de la mesure généralisée décrite en III.3.2.a, l'atome est simultanément couplé au champ radiofréquence oscillant à 230 MHz et au champ micro-onde Zénon. D'une part, l'habillage de l'atome par le champ radiofréquence conduit à la défini-

tion de la sous-famille d'états habillés par $N_{RF} \gg 1$ photons radiofréquences couplés par le hamiltonien de couplage radiofréquence : $\{|n_g, k_i, N_{RF} + k_i\rangle\}$ avec $k_i = 0, \dots, 49$ pour la multiplicité $n_g = 50$ et des états $\{|n_e, k_j, N_{RF} + k_j\rangle\}$ avec $k_j = 0, \dots, 50$ pour la multiplicité $n_e = 51$. D'autre part, l'habillage de l'atome par le champ micro-onde conduit à la définition de la sous-famille d'états habillés par $N_{mw} \gg 1$ photons micro-ondes couplés par le hamiltonien de couplage micro-onde : $\{|n_g, k_i, N_{mw} + 1\rangle, |n_e, k_j, N_{mw}\rangle\}$.

Ainsi, le formalisme de l'atome « doublement » habillé nous conduit à travailler dans la base de \mathcal{H}_{n_g, n_e} :

$$\mathcal{B} = \{|50, k_i, N_{mw} + 1, N_{RF} + k_i\rangle, \dots, |51, k_j, N_{mw}, N_{RF} + k_j\rangle, \dots\} \quad (\text{III.28})$$

où $k_i = 0, \dots, 49$ et $k_j = 0, \dots, 50$ et où N_{mw} et N_{RF} désignent le nombre de photons micro-ondes et radiofréquences « habillant » l'atome.

ii) Hamiltonien de couplage micro-onde

La fréquence de la micro-onde Zénon est résonante avec la transition $|n_g = 50, k_z\rangle \rightarrow |n_e = 51, k_z\rangle$. Elle est donc désaccordée des transitions $|n_g = 50, k\rangle \rightarrow |n_e = 51, k\rangle$, $k \neq k_z$ par l'effet Stark différentiel, soit 4,63 MHz par transition d'échelle. Toutes ces transitions sont telles que $\Delta m = +1$. Les autres transitions autorisées par les règles de sélection, $\Delta m = 0$ et $\Delta m = -1$, sont elles très hors-résonance, d'environ une ou deux fois l'effet Stark linéaire valant 230 MHz. Nous négligerons donc directement les éléments de matrice de ces transitions dans l'écriture du hamiltonien de couplage micro-onde \hat{H}_{mw} . Par ailleurs, nous ferons l'approximation que la fréquence de Rabi est la même pour toutes les transitions $\Delta m = +1$, $|n_g = 50, k\rangle \rightarrow |n_e = 51, k\rangle$. Ainsi, dans la base des états habillés \mathcal{B} , on écrit le hamiltonien \hat{H}_{mw} sous la forme matricielle :

$$\hat{H}_{mw} = h \times \left(\begin{array}{c|ccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & 0 & \Omega_{mw}/2 & 0 & \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \Omega_{mw}/2 \\ \hline \Omega_{mw}/2 & 0 & & & \\ & 0 & \ddots & 0 & \\ & & 0 & \Omega_{mw}/2 & \\ & & & & 0 \end{array} \right)_{\mathcal{B}} \quad (\text{III.29})$$

où $\Omega_{mw}/2\pi = 3,08 \pm 0,11$ MHz. Le bloc en haut à gauche correspond à la multiplicité $n_g = 50$ et le bloc en bas à droite à la multiplicité $n_e = 51$. Les éléments hors diagonaux de cette matrice par bloc 2×2 correspondent donc aux éléments de matrice intermultiplicités.

iii) Hamiltonien de couplage radiofréquence

Le hamiltonien de couplage radiofréquence s'écrit aussi par blocs à partir des résultats de la sous-section I.1.4.a. L'expression (I.109) page 55 de l'amplitude du couplage radiofréquence dépend du nombre quantique principal n à travers le facteur $\Omega_{RF}^{\sigma+}$ exprimé en (I.107), ainsi qu'à travers le facteur $(j - m_1)(j + m_1 + 1)$ sous la racine carrée. Nous placerons donc un exposant supplémentaire aux éléments de matrice afin de spécifier la multiplicité à laquelle il se rapporte. Dans l'algorithme de reconstruction, nous avons négligé la dépendance de la pulsation de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma+}$ avec n et pris sa valeur mesurée pour $n_e = 51$, c'est-à-dire $\Omega_{RF}/2\pi = 152 \pm 4$ kHz. Ainsi, dans la base des états habillés \mathcal{B} , on écrit le hamiltonien \hat{H}_{RF} sous la forme matricielle :

$$\hat{H}_{RF} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & \mathcal{V}_1^{(50)} & & \\ \mathcal{V}_1^{(50)} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \mathcal{V}_{49}^{(50)} \\ & & \mathcal{V}_{49}^{(50)} & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & \mathcal{V}_1^{(51)} & & \\ \mathcal{V}_1^{(51)} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \mathcal{V}_{50}^{(51)} \\ & & \mathcal{V}_{50}^{(51)} & 0 \end{array} \end{array} \right)_{\mathcal{B}} \quad (\text{III.30})$$

où les éléments de couplage $\mathcal{V}_i^{(n)}$ s'écrivent :

$$\mathcal{V}_i^{(n)} = \frac{3}{2} q n_e a_0 F_{RF}^{\sigma+} \sqrt{i(n-i)} \quad . \quad (\text{III.31})$$

Il sera aussi très utile afin d'écrire simplement le couplage de l'atome à un champ radiofréquence de phase relative variable de définir le hamiltonien de couplage complexe :

$$\hat{H}_{iRF} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & i\mathcal{V}_1^{(50)} & & \\ -i\mathcal{V}_1^{(50)} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & 0 & i\mathcal{V}_{49}^{(50)} \\ & & -i\mathcal{V}_{49}^{(50)} & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & i\mathcal{V}_1^{(51)} & & \\ -i\mathcal{V}_1^{(51)} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & 0 & i\mathcal{V}_{50}^{(51)} \\ & & -i\mathcal{V}_{50}^{(51)} & 0 \end{array} \end{array} \right)_{\mathcal{B}}$$

iv) Hamiltonien atomique habillé

Nous décrivons l'atome par un hamiltonien \hat{H}_0 qui est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux correspondent aux énergies des états doublement habillés précédemment décrits. Pour écrire ces éléments diagonaux, commençons par les énergies des niveaux $|n, k, N_{RF} + k\rangle$ simplement habillés par le champ radiofréquence qui s'écrivent :

$$E_{RF+MW}(n, k) = E_0(n) + W_{Stark}(n, k) + k \times \hbar\omega_{RF} + \delta_{n,50} \times \hbar\omega_{mw} + \text{Cste} \quad , \quad (\text{III.32})$$

où $E_0(n)$ correspond à l'énergie des niveaux de nombre quantique n en champ nul, donnée par la formule de Bohr, où $W_{Stark}(n, k)$ désigne le déplacement en énergie du niveau nu $|n, k\rangle$ dû à l'effet Stark et où le symbole $\delta_{i,j}$ correspond au symbole de Kronecker. Cette expression se simplifie en exprimant la condition de résonance micro-onde Zénon :

$$E_0(50) + W_{Stark}(50, k_z) + \hbar\omega_{mw} = E_0(51) + W_{Stark}(51, k_z) \quad , \quad (\text{III.33})$$

équivalente à l'égalité :

$$E_{RF+MW}(51, k_z) = E_{RF+MW}(50, k_z) \quad , \quad (\text{III.34})$$

énergies que l'on choisira aussi égales à zéro par choix de la constante dans l'équation (III.32) : $E_{RF+MW}(n, k_z) = 0$ pour $n = 50$ et 51 . L'expression de l'énergie des états habillés se simplifie alors par différence :

$$E_{RF+MW}(n, k) = E_{RF+MW}(n, k) - E_{RF+MW}(n, k_z) \quad (\text{III.35})$$

$$= W_{Stark}(n, k) - W_{Stark}(n, k_z) + (k - k_z) \times \hbar\omega_{RF} \quad . \quad (\text{III.36})$$

Ces niveaux d'énergie sont représentés sur la Figure III.10. Dans la multiplicité $n = 51$ (traits rouges), le champ radiofréquence étant résonant avec la fréquence Stark de la transition $|51c\rangle \rightarrow |51, k = 1\rangle$, les valeurs correspondent en réalité à l'effet Stark quadratique différentiel accumulé à chaque transition d'échelle par rapport au niveau k_z . L'effet Stark quadratique différentiel n'étant que d'environ 14 kHz par transition entre deux niveaux Stark voisins, les niveaux habillés semblent à cette échelle tous de même énergie. Au contraire, dans la multiplicité $n = 50$ (traits bleus), la fréquence Stark linéaire, qui vaut $\frac{50}{51} \times 230$ MHz, est désaccordée d'environ 4,5 MHz du champ radiofréquence, d'où l'incrément au premier ordre de cette quantité à chaque augmentation de k d'une unité.

v) Déshabillage adiabatique

L'extinction adiabatique du champ micro-onde Zénon a pour but principal de transférer adiabatiquement les populations de l'état habillé $|+, k_z\rangle$ vers l'état $|51, k_z\rangle$ et de l'état

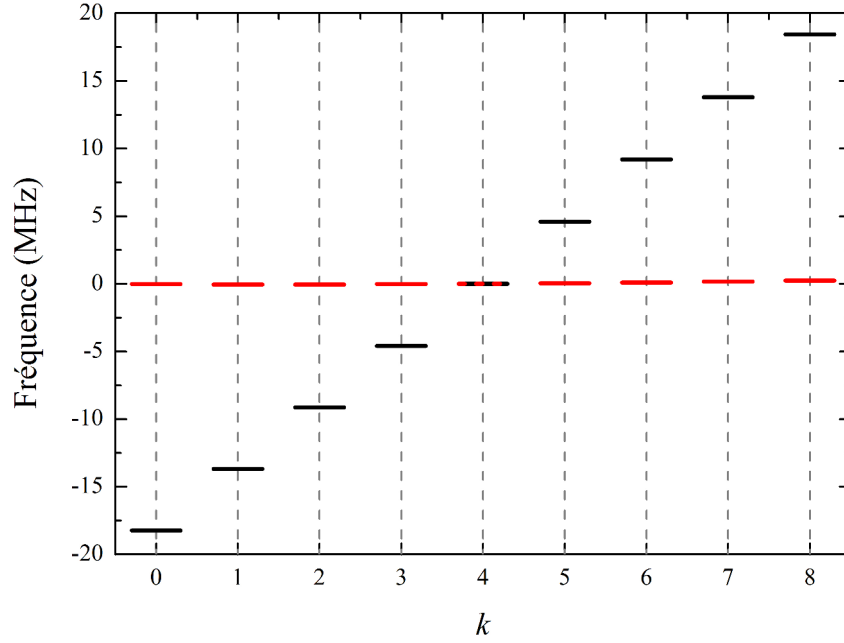


FIGURE III.10 – Niveaux habillés par les champs radiofréquence et micro-onde. Pour le champ électrique $F_{st} = 2,350 \text{ V/cm}$ et $k_z = 4$, position en fréquence des niveaux habillés $\nu_{RF+MW}(n, k) = E_{RF+MW}(n, k)/h$ en fonction de k pour $n=50$ (noir) et $n=51$ (rouge).

$|-, k_z\rangle$ vers l'état $|50, k_z\rangle$. Cette étape ayant lieu à l'issue de l'impulsion radiofréquence d'homodynage, nous parlons donc bien ici des états « simplement » habillés par le champ micro-onde. Pour des états $k \neq k_z$, le déshabillage adiabatique de l'atome supprime les faibles contaminations des niveaux $|n_e, k\rangle$ par les niveaux $|n_g, k\rangle$ respectifs, dues aux couplages non résonants de ces transitions atomiques intermultiplicités avec la micro-onde Zénon. Cette action se traduit par l'application d'une matrice de déshabillage $\hat{V}_{des}(\Omega_{mw})$ qui correspond simplement à la matrice de transfert entre les états habillés et les états atomiques nus.

vi) Projecteurs

On définit finalement les projecteurs sur les états de Dicke :

$$\hat{P}(n, k) = |n, k\rangle\langle n, k| \quad . \quad (\text{III.37})$$

Expérimentalement, nous nous limiterons à la mesure des probabilités d'occupation d'un nombre restreint de niveaux $|n_g, k\rangle$ et $|n_e, k\rangle$ pour $k = 0, \dots, 5$. Nous utiliserons donc dans la reconstruction *Maxlike* ces projecteurs $\hat{P}(n_g, k)$ et $\hat{P}(n_e, k)$ pour $k = 0, \dots, 5$ ainsi que le projecteur « reste » $\hat{P}_{reste} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n_g, n_e}} - \sum_{\text{mesurés}} \hat{P}(n, k)$; la somme de tous les projecteurs sur les états propres d'un espace de Hilbert donnant l'opérateur identité sur cet espace. La prise en compte de cette projection « non effectuée » permet mathématiquement d'assurer

que l'ensemble des POVM exprimés est bien une partition de l'opérateur identité. Elle correspond par ailleurs à l'intuition qui incite à penser que si nous n'avons pas détecté tous les atomes sur les niveaux mesurés, c'est qu'ils sont sur d'autres niveaux, ce qui constitue en soit une information.

Remarque : L'ensemble des résultats de mesure sera corrigé par les efficacités de détection des sondes micro-ondes respectives, calibrées à partir de l'évolution des probabilités d'occupation des niveaux $|n, k\rangle$ lors de la rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(n)}$ pour $n = 50$ et 51 (comme présenté précédemment dans le cas $n = 51$). Ainsi, la population « restante », mesurée par le projecteur $\hat{P}_{\text{reste}} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n_g, n_e}} - \sum_{\text{mesurés}} \hat{P}(n, k)$, correspond véritablement à celle demeurant sur les autres niveaux et non pas ce qui n'aurait pas été détecté par inefficacité du processus de comptage.

III.3.2.d Expression des POVM

On peut donc finalement donner une expression générale des POVM $\hat{\Pi}_{n,k}$ en suivant la séquence de mesure présentée plus haut :

$$\hat{\Pi}_{n,k}(t_2, \Phi) = \mathcal{N} \hat{V}_{\text{inter}} \hat{U}(t_2, \Phi) \hat{V}_{\text{des}}(\Omega_{mw}) \hat{P}(n, k) \hat{V}_{\text{des}}^\dagger(\Omega_{mw}) \hat{U}^\dagger(t_2, \Phi) \hat{V}_{\text{inter}}^\dagger, \quad (\text{III.38})$$

où

$$\hat{U}(t_2, \Phi) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (-\cos \Phi \hat{H}_{RF} - \sin \Phi \hat{H}_{iRF} + \hat{H}_{mw} + \hat{H}_0) t_2 \right], \quad (\text{III.39})$$

et

$$\hat{V}_{\text{inter}} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\hat{H}_{mw} + \hat{H}_0) t_{\text{inter}} \right], \quad (\text{III.40})$$

et où le facteur de normalisation \mathcal{N} correspond à l'inverse du nombre de points de mesure réalisés dans l'espace des phases de sorte que leur somme donne bien l'identité. Les quatre paramètres de ces POVM sont donc associés aux caractéristiques de la mesure. Les indices n et k déterminent le niveau sondé par la micro-onde sonde transférant la population de ce niveau vers la multiplicité $n_f = 52$ avant détection par ionisation. Les paramètres de l'impulsion radiofréquence homodyne, de phase Φ et de durée t_2 , déterminent les points (Θ, Φ) de l'espace des phases mesurés, où la colatitude sur la sphère de Bloch est reliée à la durée de l'impulsion t_2 par la relation $\Theta = \Omega_{RF}^{\text{tomo}} \times t_2$.

III.3.3 Résultat de la reconstruction - Fonction de Wigner

Dans ce paragraphe, nous présentons le résultat de la procédure de reconstruction *Maxlike*. La séquence expérimentale est identique à celle présentée pour l'obtention de la fonction Q en Figure III.9 page 157. Nous avons ici sondé près de 276 points dans l'espace des phases correspondant à des impulsions radiofréquences d'homodynage de durées et de phases variables : la durée de l'impulsion est balayée depuis 30 ns jusque 250 ns avec un pas de 10 ns (soit 23 valeurs de Θ différentes), cela pour 12 phases réparties tous les 30° . A l'issue de ces différentes rotations et à la différence avec le calcul de la fonction Q , les populations des niveaux $|n_g = 50, k\rangle$ et $|n_e = 51, k\rangle$ pour $k \leq 5$ ont été mesurées et prises en compte dans la reconstruction. Les populations mesurées dans les niveaux de la multiplicité $n_g = 50$ sont certes faibles mais constituent en soi une information importante qui optimise la procédure de reconstruction. Tout ceci correspond à près de 3312 données expérimentales. La méthode itérative va reconstruire l'état le plus probable donnant ces résultats de mesure.

L'opérateur densité initial de la procédure itérative est donc la matrice identité normalisée de \mathcal{H}_{n_g, n_e} : $\hat{\rho}_0 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{n_g, n_e}} / \dim(\mathcal{H}_{n_g, n_e})$ où $\dim(\mathcal{H}_{n_g, n_e}) = 50 + 51 = 101$. A l'issue de la procédure, on trace l'opérateur densité $\hat{\rho}_M$ sur la multiplicité $n_e = 51$. La Figure III.11 (a) représente la fonction de Wigner de l'état de maximum de vraisemblance. Elle est comparée à la fonction de Wigner théorique (b) obtenue par simulation de la dynamique de Zénon quantique d'une durée $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$ dans les conditions de l'expérience.

On déduit de la matrice reconstruite $\hat{\rho}_M$ que la population totale du sous-espace Zénon \mathcal{H}_N est de 82,7 % et de 8 % pour le sous-espace \mathcal{H}_S . L'état habillé $|-, k_z\rangle$ est peuplé à hauteur de 1,5 %. Les 7,8 % restants correspondent à des atomes transférés dans la multiplicité $n_g = 50$. L'état $\hat{\rho}_M^{(51)}$ représenté correspond à la projection de $\hat{\rho}_M$ sur $\mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_S$, normalisée par un coefficient $1/(0,827+0,080) = 1/0,907$ afin de prendre en compte les fuites en dehors de \mathcal{H}_N et \mathcal{H}_S . Enfin, puisque les états $k \geq 16$ ont des populations négligeables (0,7 % pour l'état reconstruit), on tronque l'espace de Hilbert aux seize premiers niveaux d'échelle⁹ avant de représenter la fonction de Wigner [136, 137]. La fidélité mutuelle [205, 206] entre l'opérateur reconstruit $\hat{\rho}_M^{(51)}$ et l'opérateur simulé $\hat{\rho}_{\text{sim}}^{(51)}$, tous deux projetés sur $\mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_S$, est très bonne :

$$\mathcal{F}(\hat{\rho}_M^{(51)}, \hat{\rho}_{\text{sim}}^{(51)}) = \text{Tr}^2 \left(\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_M^{(51)}} \hat{\rho}_{\text{sim}}^{(51)} \sqrt{\hat{\rho}_M^{(51)}}} \right) = 92,8 \% \quad . \quad (\text{III.41})$$

9. Lors de la rotation du moment cinétique \hat{J}_1 en l'absence de micro-onde Zénon, la population totale théorique des niveaux $k \geq 16$ est de 0,036 %.

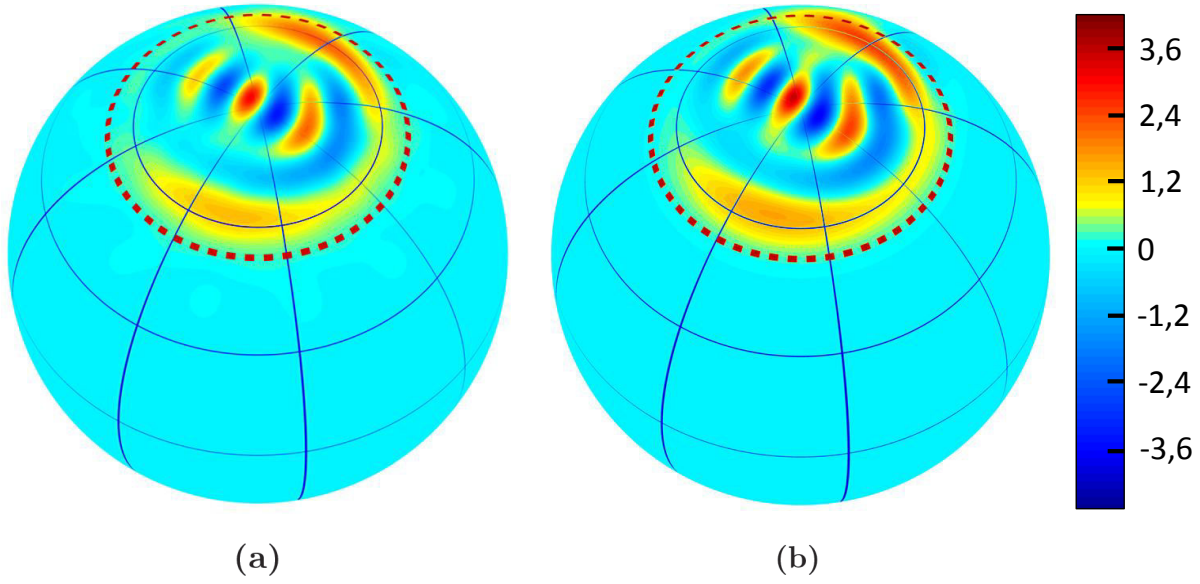


FIGURE III.11 – Fonction de Wigner de l'état Chat de Schrödinger du moment cinétique généré par dynamique Zénon quantique (Figures extraites de [96]). **(a)** Fonction de Wigner $W(\Theta, \Phi)$ de l'état de maximum de vraisemblance reconstruit à partir des données expérimentales à l'issue d'une dynamique Zénon quantique de durée $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$. Le cercle rouge en pointillé indique la latitude limite, définie par la micro-onde Zénon. **(b)** Simulation numérique de l'état généré par dynamique Zénon quantique à $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$ et représentation de sa fonction de Wigner.

On remarque sur la Figure III.11 que les composantes cohérentes de la superposition ne sont pas autant circulaires que des états cohérents de spin. Ceci est en partie inhérent à la dynamique Zénon, où les composantes « épousent » la barrière Zénon. L'autre effet vient des déplacements lumineux sur les niveaux voisins de la barrière Zénon, qui génèrent un léger effet Kerr et contribuent aussi à cette déformation dans la direction azimutale. Entre ces deux composantes, on note la présence d'oscillations de la fonction de Wigner entre des valeurs positives et négatives. Ces franges d'interférences constituent une signature du caractère non classique de l'état préparé et donc de la cohérence de la superposition d'états du moment cinétique.

La pureté de l'état reconstruit $\text{Tr}(\hat{\rho}_M^2) = 0,75$ est limitée dans nos expériences par les inhomogénéités de champ électrique et le bruit électrique. Nos simulations ont pris en compte l'effet de ces inhomogénéités en introduisant une dispersion en fréquence de $\Delta\omega_a = 2\pi \times 174 \text{ kHz}$, ce qui conduit à une pureté de $\text{Tr}(\hat{\rho}_{sim}^2) = 0,91$. Ces inhomogénéités sont mesurées à partir de l'élargissement en phase de la fonction Q durant une évolution libre T , $\Delta\phi^2 = \Delta\phi_0^2 + \Delta\omega_a^2 T^2$ et évaluées en termes de dispersion de fréquence à $\Delta\omega_a/2\pi = 174 \text{ kHz}$. Ces inhomogénéités de champ électrique sont la source principale de décohérence dans nos expériences et peuvent être considérablement réduites par l'utilisation d'électrodes planes. Une attention particulière sera accordée à ces phénomènes de décohérence dus aux inhomogénéités de champ électrique dans les expériences de métrologie qui seront présentées aux derniers chapitres de ce manuscrit.

La dynamique Zénon quantique a donc permis de générer par couplage d'un atome à un champ classique une dynamique conduisant à la production d'états non classiques du moment cinétique. Ce sont ces motifs d'interférence, composés de rapides oscillations, qui seront au cœur de notre approche métrologie, décrite au chapitre V de ce manuscrit.

III.3.4 Paramètres de reconstruction par maximum de vraisemblance

Dans cette section, nous étudions l'influence de certains paramètres de reconstruction qui nous ont conduit à la reconstruction de l'état $\hat{\rho}_M$, présenté plus haut sous la forme de sa fonction de Wigner.

III.3.4.a Sphère de Bloch des états habillés et troncature de l'espace de Hilbert

L'état $\hat{\rho}_M$ obtenu à l'issue de la procédure de reconstruction est l'état de maximum de vraisemblance à l'instant $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$. La superposition d'états du moment cinétique à cet instant du « rebond » de la QZD est toujours habillé par le champ micro-onde Zénon. L'état reconstruit est donc un état habillé : $\hat{\rho}_M$ est donc un opérateur densité sur les deux multiplicités $n = 50$ et 51 . Si l'on veut représenter sur une sphère de Bloch généralisée cet état, il faut donc faire le choix de le projeter sur un sous-espace correspondant à un seul moment cinétique. Un premier choix consiste à projeter cet état sur $n_e = 51$. L'inconvénient de ce choix est que la moitié de la population de l'état $|+, k_z\rangle = (|50, k_z\rangle + |51, k_z\rangle)/\sqrt{2}$ – qui n'est pas négligeable, puisqu'elle représente 41,1 % de la population totale – est perdue. Pareillement, la moitié de la population de l'état $|-, k_z\rangle$, qui s'élève à 1,5 % de la population totale, n'est pas représentée, ce qui pour le compte est négligeable. La Figure III.12 (a) représente la fonction de Wigner de l'état reconstruit $\hat{\rho}_M$ projeté sur $n_e = 51$ et normalisée. Une proportion non négligeable de la population totale ayant été écartée lors de la projection (21,26 %), la fonction de Wigner présentée est fortement déformée.

Un choix alternatif est de projeter l'état sur $\mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_S$, qui correspondrait donc à montrer la matrice densité de l'atome projetée sur $n_e = 51$ si nous avions le temps de découpler la micro-onde Zénon avant que l'état ait perdu sa cohérence. La totalité de population de l'état $|-, k_z\rangle$ est alors perdue, soit 1,5 %, ce qui est un moindre mal. La Figure III.12 (b) correspond à ce choix et représente donc avec une plus grande fidélité l'état du moment cinétique à l'instant du rebond.

Finalement, une rotation d'une durée $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$ en l'absence de micro-onde Zénon (rotation d'un état cohérent) ne peuple pas les niveaux des états $k \geq 16$: la population totale théorique de ces états lors d'une telle rotation vaut 0,036 %. Les populations inférées dans ces niveaux de l'état reconstruit sont donc des artefacts numériques dus à la reconstruction et ne sont pas physiques. On décide donc de tronquer l'espace de Hilbert aux seize premiers niveaux d'échelle avant de représenter la fonction de Wigner Figure III.12 (c), qui correspond à celle présentée plus haut Figure III.11 page 169 (a). Cette troncature a pour effet principal de faire disparaître les micro-ondulations de la fonction de Wigner.

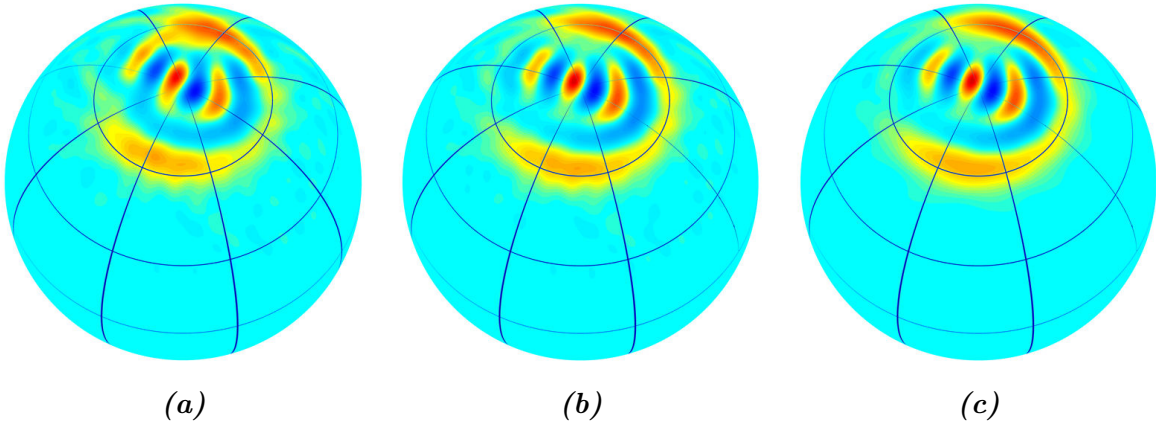


FIGURE III.12 – Fonctions de Wigner - Habillage et troncature. (a) Représentation de la fonction de Wigner de l'état habillé reconstruit $\hat{\rho}_M$ projeté sur le sous-espace $n_e = 51$ et normalisé. (b) Représentation de la fonction de Wigner de l'état habillé reconstruit $\hat{\rho}_M$ projeté sur le sous-espace $\mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_S$ et normalisé. (c) Représentation de la fonction de Wigner de l'état habillé reconstruit $\hat{\rho}_M$ projeté sur le sous-espace $\mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_S$, tronquée au-delà de $k=16$ (inclus) et normalisée.

III.3.4.b Convergence de la méthode itérative

Lors de la reconstruction ayant conduit à l'état $\hat{\rho}_M$ dont la fonction de Wigner a été présentée plus haut, nous avons calculé à chaque itération la fidélité mutuelle $\mathcal{F}(\hat{\rho}_k^{(51)}, \hat{\rho}_{\text{sim}}^{(51)})$ entre l'opérateur construit à la k -ième itération et l'opérateur théorique obtenu par simulation, tous deux projetés sur l'espace $\mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_S$. En parallèle, nous avons calculé la fidélité mutuelle entre les opérateurs $\hat{\rho}_k^{(51)}$ et $\hat{\rho}_{k+1}^{(51)}$ issus d'itérations successives. Les résultats obtenus sont présentés Figure III.13.

On observe que la procédure de reconstruction converge très rapidement en moins d'une centaine d'itérations. Malgré l'atteinte d'un certain point fixe, on observe sur la courbe (b) de la fidélité itérative que l'algorithme persiste à explorer plus ou moins loin l'espace des états, se traduisant par la présence de pics inversés. On note aussi sur cette courbe que, à l'exception de $\hat{\rho}_0^{(51)}$ et $\hat{\rho}_1^{(51)}$, les états successifs reconstruits sont toujours très proches deux à deux, la fidélité itérative étant toujours supérieure à 98%. La première

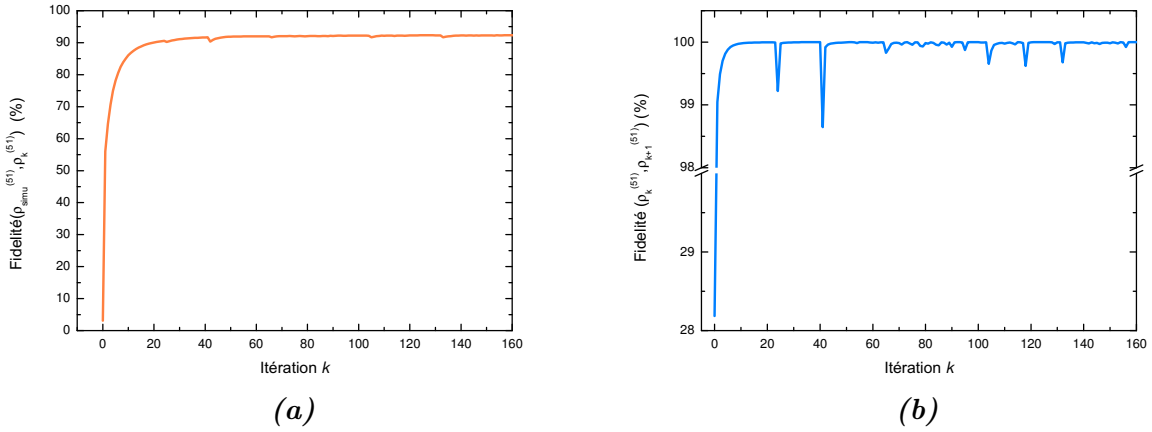


FIGURE III.13 – Convergence de la méthode itérative de reconstruction. **(a)** Calcul de la fidélité mutuelle $\mathcal{F}(\hat{\rho}_k^{(51)}, \hat{\rho}_{sim}^{(51)})$ entre l'opérateur reconstruit à la k -ième itération et l'opérateur théorique obtenu par simulation, tous deux projetés sur l'échelle de spin $n_e = 51$. **(b)** Calcul de la fidélité mutuelle entre les opérateurs $\hat{\rho}_k^{(51)}$ et $\hat{\rho}_{k+1}^{(51)}$ issus d'itérations successives.

itération est impressionnante. A partir de tous les résultats de mesure fournis, l'application de part et d'autre de $\hat{\rho}_0 \propto \mathbf{1}$ de l'opérateur $\hat{R}(\hat{\rho}_0)$ fournit un état $\hat{\rho}_1$ très proche de l'état final $\hat{\rho}_M$! Nous avons en effet réalisé un très grand nombre de points de mesure. Comme en témoigne la Figure III.14, qui représente les fonctions de Wigner successives des états $\hat{\rho}_k^{(51)}$ reconstruits à différentes itérations, on visualise à quel point la convergence de la méthode est fulgurante. Le terme de la procédure de reconstruction a été fixé à la 150-ième itération, ne constatant plus de modification notable de l'état reconstruit.

III.3.4.c Inhomogénéités de champ électrique

Notre méthode de reconstruction par maximum de vraisemblance ne prend pas en compte les inhomogénéités de champ électrique, qui ne sont en effet pas contenues dans l'expression des POVM. Afin d'évaluer l'effet de ces inhomogénéités sur le résultat de la reconstruction, nous générons des résultats de mesure simulés dans les conditions de l'expérience. Pour cela, pour chacune des rotations d'homodynage $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$, on moyenne les différentes matrices densité simulées à différents champs électriques. A partir des matrices densité moyennées, on extrait les termes diagonaux qui constituent alors des données simulées et fournissent les fréquences d'apparition f_j des résultats x_j suite à l'application des POVM $\hat{\Pi}_j$ en présence d'inhomogénéité de champ électrique. A partir de ces résultats de « mesure » simulés, la méthode de reconstruction cherche donc l'état $\hat{\rho}_M$ tel que $\text{Tr}[\hat{\rho}_M \hat{\Pi}_j]$ s'approche au maximum de ces f_j simulés en utilisant les POVM du champ moyen.

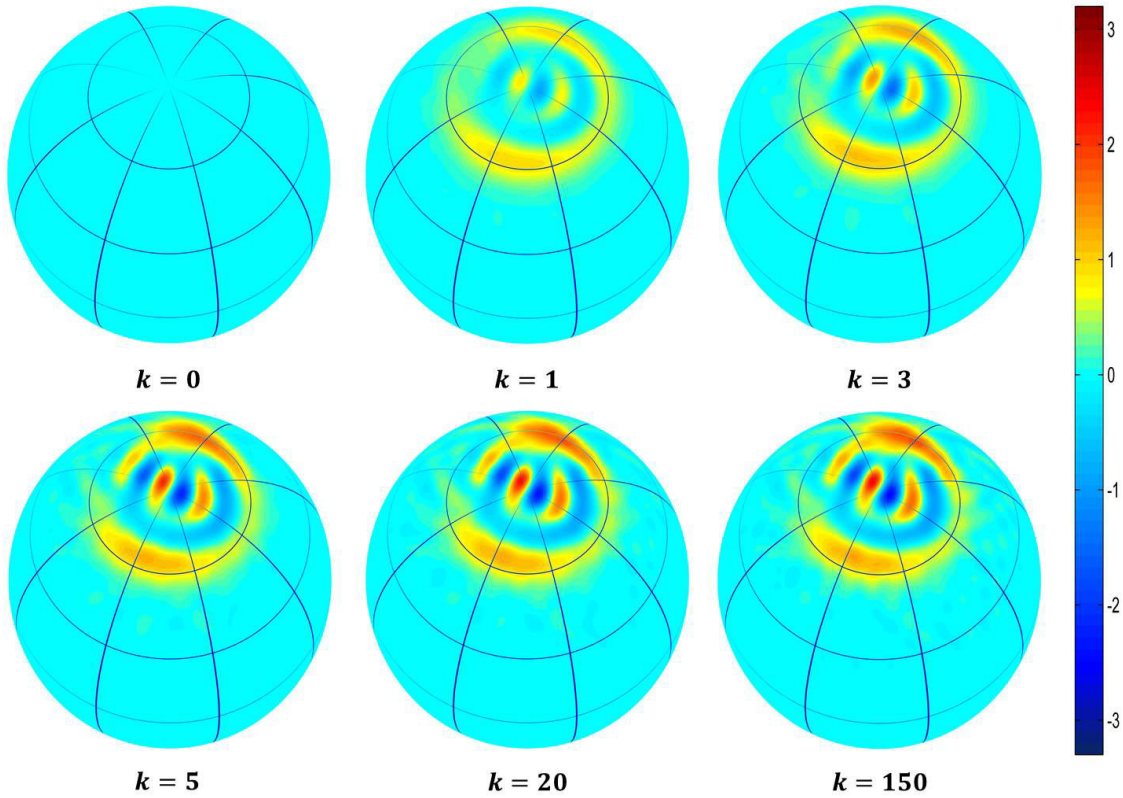


FIGURE III.14 – Fonctions de Wigner des états $\hat{\rho}_k^{(51)}$. On représente les fonctions de Wigner successives des états $\hat{\rho}_k^{(51)}$ reconstruits à différentes itérations, on visualise à quel point la convergence de la méthode est fulgurante, en particulier à la première itération entre l'état $\hat{\rho}_0 = \mathbb{1}/\dim\mathcal{H}_{n_g, n_e}$ et $\hat{\rho}_1$.

La méthode de reconstruction converge vers un état $\hat{\rho}_M$ de fidélité mutuelle 98,9% avec l'état à partir duquel ont été générés les résultats de mesure. La fidélité mutuelle des projections sur l'espace $\mathcal{H}_N \oplus \mathcal{H}_S$ atteint les 94,4%. La méthode de reconstruction est donc peu sensible aux effets des inhomogénéités sur la durée des POVM.

III.3.4.d Sensibilité aux paramètres de la mesure

Nous avons ensuite voulu savoir si la méthode de reconstruction était sensible à la valeur des paramètres expérimentaux caractérisant la mesure, comme la pulsation de Rabi de la micro-onde Zénon $\Omega_{mw} = 2\pi \times 3,08 \pm 0,11$ MHz et la pulsation de Rabi du champ radiofréquence $\Omega_{RF}^{\text{tomo}}/2\pi = 866 \pm 5$ kHz. Il convenait en particulier de vérifier que la fidélité de l'état reconstruit avec l'état théorique simulé ne variait pas trop à l'échelle des erreurs expérimentales sur ces paramètres. La Figure III.15 présente les valeurs de la fidélité mutuelle entre l'état théorique et les 244 états reconstruits par maximum de vraisemblance avec divers jeux de paramètres $(\Omega_{RF}^{\text{tomo}}, \Omega_{mw})$ à partir de résultats de mesure simulés.

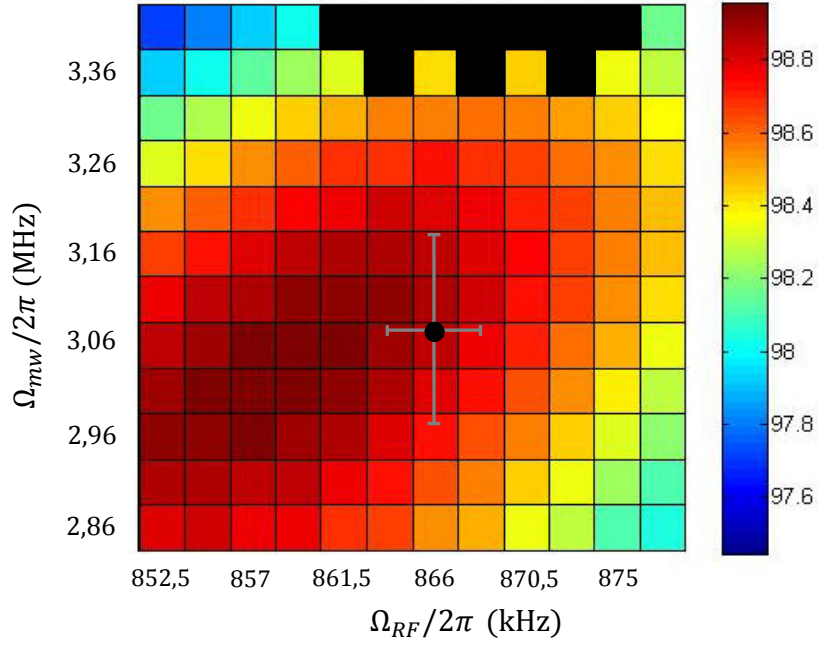


FIGURE III.15 – Influence des paramètres $(\Omega_{RF}^{tomo}, \Omega_{mw})$ de la mesure sur la fidélité de l'état reconstruit avec l'état théorique. Le carré noir représente le jeu de paramètres mesurés lors des calibrations indépendantes des champs micro-onde et radiofréquence.

On constate qu'à l'échelle des erreurs sur nos valeurs calibrées, l'état reconstruit est toujours d'une grande fidélité. Pour le grand nombre de points de mesure que nous avons ici fourni à l'algorithme de reconstruction *Maxlike*, l'état final reconstruit est peu sensible aux incertitudes expérimentales sur les paramètres caractérisant la mesure.

Nous avons dans cette partie prouvé que la dynamique de Zénon quantique conduisait à la génération déterministe d'états non classiques du moment cinétique \hat{J}_1 . La fonction de Wigner de ces états du type *Chat de Schrödinger* présente des motifs d'interférence, composés de rapides oscillations, pouvant constituer un signal métrologique de grande sensibilité. Cependant, avant d'aller plus avant dans la réalisation d'expériences de métrologie à partir de ces superpositions d'états, il est cependant nécessaire de trouver une méthode plus directe, ne nécessitant pas une phase de traitement des données par la méthode *Maxlike*, permettant d'accéder à ce signal d'interférence. En effet, l'accès à ces motifs a ici nécessité un processus de mesure complet, avant de pouvoir, grâce à la méthode de reconstruction, déterminer la matrice densité de la superposition d'états générée par QZD. Enfin, à partir de l'état complet reconstruit, nous avons calculé la fonction de Wigner. Cependant afin d'obtenir une coupe orthogonale de la fonction de Wigner, permettant de disposer d'un signal oscillant, il n'est pas nécessaire de connaître complètement l'état du système. Nous présenterons dans la prochaine partie une méthode directe de mesure d'une coupe de la fonction de Wigner.

III.4 Obtention directe d'une coupe de la fonction de Wigner

En théorie, la fonction de Wigner offre une représentation graphique très parlante des propriétés non classiques de l'état du moment cinétique. Néanmoins, la définition de la distribution de Wigner $W(\Theta, \Phi)$ donnée en (I.148) page 67 et rappelée ci-dessous :

$$W(\Theta, \Phi) = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^{+k} Y_{kq}(\Theta, \Phi) \rho_{kq} \quad , \quad (\text{III.42})$$

en fonction des harmoniques sphériques $Y_{kq}(\Theta, \Phi)$ et des coefficients du développement de la matrice densité $\hat{\rho}$ sur les opérateurs tensoriels irréductibles \hat{T}_{kq} pourrait laisser perplexes les expérimentateurs que nous sommes.

III.4.1 Analogie avec l'optique quantique

Afin de mesurer directement la fonction de Wigner d'un moment cinétique, on peut se rappeler l'analogie développée en annexe A entre un moment cinétique et un oscillateur harmonique. Dans le cadre d'une dynamique de Zénon quantique où l'évolution du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ est confinée dans une calotte nord de la sphère de Bloch généralisée, l'analogie est alors particulièrement pertinente. La Figure I.14 page 66 du chapitre I comparant les éléments de couplage des deux systèmes montre en effet que dans le cadre de la dynamique Zénon quantique avec $k_z = 4$, le confinement dans le sous-espace \mathcal{H}_N permet de faire quantitativement ce rapprochement.

Considérons une superposition de deux états cohérents de spin, de taille similaire à celle générée par dynamique Zénon quantique avec $k_z = 4$, soit l'état :

$$|\psi_{chat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Theta = 28^\circ, \Phi = 90^\circ\rangle + |\Theta = 28^\circ, \Phi = -90^\circ\rangle) \quad . \quad (\text{III.43})$$

On représente à la Figure III.16 (a) la fonction de Wigner de cet état, calculée grâce à la formule (III.42). La sphère de Bloch est vue de dessus. On se rappelle que dans le contexte de l'optique quantique, la fonction de Wigner [140] est proportionnelle à la valeur moyenne de l'opérateur parité du nombre de photons prise sur l'état déplacé $\tilde{\rho} = D(-\alpha)\rho D(\alpha)$ [134, 139]. La fonction de Wigner d'un champ électromagnétique peut donc être calculée par somme alternée des probabilités que le champ déplacé possède k photons (voir annexe A). Cette méthode de tomographie homodyne des différents niveaux [207, 208] a déjà été utilisée dans le cas du champ électromagnétique pour mesurer la fonction de

Wigner de modes lumineux par comptage du nombre de photons [209] et est aujourd'hui un outil courant en information quantique [210]. De manière similaire, on peut dans le cas d'un moment cinétique calculer, en chaque point de l'espace des phases, la somme alternée des probabilités d'occupation des niveaux k une fois l'état tourné, c'est-à-dire :

$$\tilde{W}(\Theta, \Phi) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_k(\Theta, \Phi) \quad \text{avec} \quad P_k(\Theta, \Phi) = \langle n_e, k | \hat{R}_{\Theta, \Phi}^\dagger \hat{\rho} \hat{R}_{\Theta, \Phi} | n_e, k \rangle, \quad (\text{III.44})$$

où $P_k(\Theta, \Phi)$ désigne donc la probabilité d'occupation de l'état $|n_e, k\rangle$ après rotation du moment cinétique sous l'action de $\hat{R}_{-\Theta, \Phi}$. La Figure III.16 (b) reproduit sur un même graphique, pour l'état $|\psi_{chat}\rangle$, une coupe de la fonction de Wigner $W(\Theta, \Phi)$ et de la somme alternée $\tilde{W}(\Theta, \Phi)$ (courbe noire) par le plan (xOz) . On constate que ces coupes selon le plan (xOz) de la sphère de Bloch font apparaître des franges d'interférence quasiment parfaitement superposées.

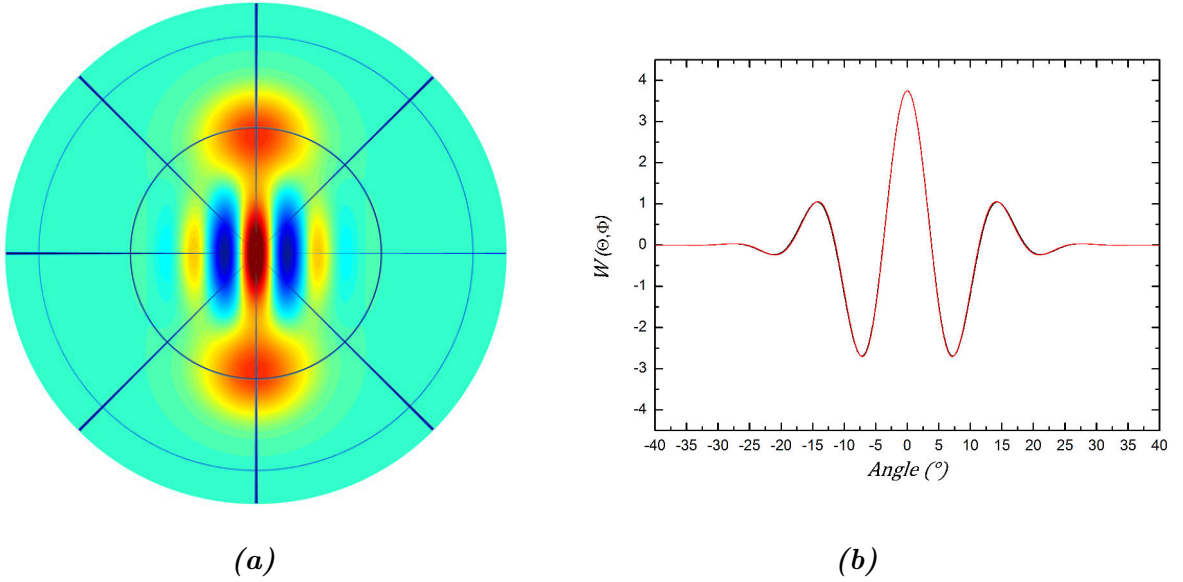


FIGURE III.16 – Approximation de la fonction de Wigner d'un état Chat de Schrödinger $|\psi_{chat}\rangle$ (III.43) du moment cinétique par la définition de l'optique quantique de cette quasi-distribution de probabilité. (a) Calcul de la fonction $W(\Theta, \Phi)$ à partir de (I.148) représentée sur la sphère de Bloch généralisée vue de dessus. (b) Coupes des fonctions $W(\Theta, \Phi)$ (courbe rouge) et $\tilde{W}(\Theta, \Phi)$ (courbe noire) par le plan (xOz) .

La mesure des probabilités d'occupation de l'état tourné $\tilde{\rho} = \hat{R}_{\Theta, \Phi}^\dagger \hat{\rho} \hat{R}_{\Theta, \Phi}$ sur les différents états de Dicke $|n_e, k\rangle$ permet donc d'obtenir par somme alternée une coupe de la fonction de Wigner, là où les oscillations sont de plus grande amplitude. L'obtention de ce signal d'interférence se fait donc par une mesure directe des probabilités d'occupation $P_k(\Theta, \Phi)$. Pour chaque point de l'espace des phases, il faut néanmoins mesurer n probabilités d'occupation, ce qui constitue dans notre cas un grand nombre de mesures et la préparation de sondes micro-ondes sur près de 51 transitions.

III.4.2 Approximation par une somme alternée tronquée

En réalité, si l'on est intéressé uniquement par les franges d'interférences centrales de cette fonction de Wigner, cette somme alternée (III.44) peut être tronquée. La Figure III.17 présente en **(a)** les probabilités d'occupation des niveaux $|51, k\rangle$ pour $k = 0, \dots, 13$ de l'état $|\psi_{\text{chat}}\rangle$ (III.43) et en **(b)** les coupes (xOz) des fonctions de Wigner $\tilde{W}^{(N)}(\Theta, \Phi)$ définies par sommes tronquées à N :

$$\tilde{W}^{(N)}(\Theta, \Phi) = \sum_{k=0}^N (-1)^k P_k(\Theta, \Phi) \quad \text{avec} \quad P_k(\Theta, \Phi) = \langle n_e, k | \hat{R}_{\Theta, \Phi}^\dagger \hat{\rho} \hat{R}_{\Theta, \Phi} | n_e, k \rangle \quad (\text{III.45})$$

pour $N = 0, 2, 4, 6, 8$ et $50 = n_e - 1$. Sur la Figure III.17 **(a)**, on observe que seuls les niveaux k pairs sont peuplés, ce qui est caractéristique d'un état *Chat de Schrödinger* pair dont la fonction de Wigner prend une valeur positive à l'origine.

On observe sur la sous-figure **(b)** que si l'on ne s'intéresse qu'aux franges centrales de grandes amplitudes, seule une somme sur les états peuplés de manière non négligeable suffit. La fonction de Wigner correspondant en effet à la parité de l'état tourné, les valeurs de cette fonction proches de l'origine correspondent à la parité d'un état faiblement homodyné. Ces états légèrement tournés présentent des populations non négligeables dans une gamme d'états k à peine augmentée par rapport à celle de la sous-figure **(a)**. Les rotations d'homodynage ne peuplent en effet que faiblement les niveaux $k \gg 8$, ce qui fait de la troncature de la somme alternée une bonne approximation de ces franges centrales. Cette troncature ne fait apparaître des artefacts qu'au-delà de l'angle $\Theta = \pm 28^\circ$ (représentés en pointillé gris) pour lequel l'état est fortement homodynés et commence à peupler significativement les niveaux $k \gg 8$.

On conclut de cette analyse sur l'état $|\psi_{\text{chat}}\rangle$, qui est une superposition théorique d'états cohérents du moment cinétique que, dans le cas d'une dynamique confinée au sous-espace \mathcal{H}_N , une somme tronquée aux premiers niveaux $k = 0, \dots, 5$ – seuls niveaux significativement peuplés – permet de reproduire dans une bonne approximation la distribution de Wigner au centre et en particulier les franges d'interférence centrales, où la quasi-distribution de probabilité prend des valeurs négatives. Ceci nous permet de mesurer expérimentalement la fonction de Wigner de l'état du moment cinétique à l'instant du rebond sur la barrière Zénon.

III.4.3 Mesure expérimentale de la fonction de Wigner

La séquence expérimentale est identique à celle mise en œuvre pour la reconstruction de l'état, dont la séquence avait déjà été présentée pour l'obtention de la fonction Q

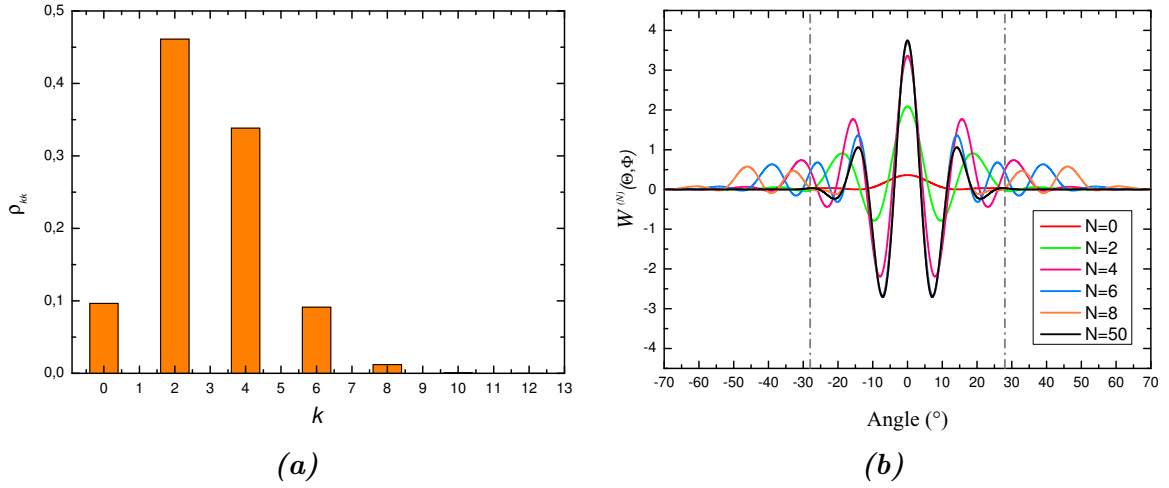


FIGURE III.17 – Fonction de Wigner de l'état $|\psi_{chat}\rangle$ (III.43) par somme alternée tronquée. **(a)** Probabilités d'occupation des niveaux $|51, k\rangle$ pour $k = 0, \dots, 13$. **(b)** Coupes (xOz) des fonctions de Wigner $W^{(N)}(\Theta, \Phi)$ définies par la somme tronquée à N (III.45) pour $N = 0$ (rouge), $N = 2$ (vert), $N = 4$ (rose), $N = 6$ (bleu), $N = 8$ (orange) et $N = 50 = n_e - 1$ (noir). Les lignes verticales à $\pm 28^\circ$ représentent les positions des composantes cohérentes qu'on observerait sur une coupe (yOz).

en Figure III.9 page 157. A la différence de la mesure de la fonction Q , on mesure les populations des différents niveaux $|n_e, k\rangle$ pour $k = 0, \dots, 5$. La Figure III.18 **(a)** représente, sur la sphère de Bloch généralisée vue de dessus, les probabilités d'occupation $P_k(\Theta, \Phi)$ de ces différents niveaux pour l'état tourné $\tilde{\rho}(\Theta, \Phi)$. Les mesures en 192 points de l'espace des phases sont interpolées linéairement. La durée de l'impulsion radiofréquence, d'amplitude $\Omega_{RF}^{tomo}/2\pi = 866 \pm 5$ kHz, générant la rotation d'homodynage prend 16 valeurs différentes séparées de 10 ns, cela pour 12 phases différentes espacées tous les 30° . On compare ces mesures avec les simulations numériques (ligne **(b)**). On rappelle ici que les rotations d'homodynage ne peuvent s'effectuer qu'en présence du couplage Zénon. Ainsi, on compare aussi nos mesures brutes (ligne **(a)**) avec les simulations numériques des distributions $P_k(\Theta, \Phi)$ que l'on obtiendrait si l'on avait pu effectuer le découplage adiabatique de la micro-onde Zénon avant les rotations (ligne **(c)**).

La mesure de $P_0(\Theta, \Phi)$ correspond à la mesure de la fonction Q . On retrouve en effet en **(a)** et **(b)** les représentations précédentes de la Figure III.9 page 157 pour $t_1 = 0, 76 \mu s$, quoique sur une plage angulaire en latitude un peu plus grande cette fois. La comparaison des lignes **(b)** et **(c)** montre l'influence de la micro-onde Zénon sur la tomographie des niveaux $|51, k\rangle$ pour $k = 0, \dots, 5$. Pour le niveau circulaire, on note une population moins importante lorsque la rotation d'homodynage est effectuée en présence de la micro-onde Zénon. La rotation ayant lieu avant le déshabillage, une partie de la population de l'état $|+, k_z\rangle$ est dans la multiplicité $n = 50$ et n'est pas transférée dans l'état circulaire $|51c\rangle$ par la rotation. La contribution de l'état $|+, k_z\rangle$ est donc légèrement sous-estimée dans la fonction Q et réduit la hauteur de $P_0(\Theta, \Phi)$ au voisinage de la latitude limite. L'autre différence majeure, apparaissant à la comparaison des lignes **(a)** et **(b)** avec **(c)**, concerne

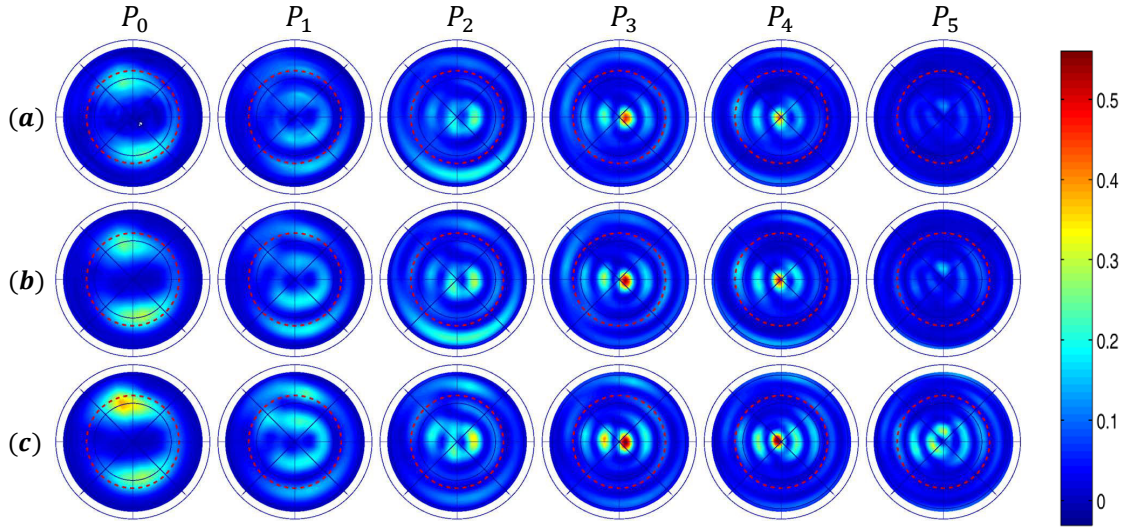


FIGURE III.18 – Mesure des $P_k(\Theta, \Phi)$, $k = 0 \dots 5$, représentées sur la sphère de Bloch vue de dessus. **(a)** Mesures expérimentales interpolées linéairement. **(b)** Simulations numériques des états finaux tournés $\tilde{\rho}(\Theta, \Phi)$ et représentation des éléments de matrice diagonaux $\tilde{\rho}_{kk}(\Theta, \Phi)$, $k = 0 \dots 5$. On prend ici en compte l'imperfection de la mesure due à la présence de la micro-onde Zénon ainsi que l'inhomogénéité du champ électrique pendant la tomographie. **(c)** Simulations numériques similaires à **(b)** mais sans micro-onde Zénon pendant la rotation de tomographie, les états étant déshabillés avant tomographie.

le niveau $|51, k = 2\rangle$ pour lequel une importante frange apparaît au-delà de la barrière Zénon en bas de la sphère sur la vue de la Figure III.18. L'explication de cette différence est quelque peu complexe et nous nous contenterons de conclure que ces simulations prouvent que notre méthode de tomographie introduit des artefacts qui affecteront la fonction de Wigner.

La Figure III.19 représente la somme alternée tronquée $\tilde{W}^{(5)}(\Theta, \Phi)$ interpolée linéairement calculée à partir des $P_k(\Theta, \Phi)$ pour $k \leq 5$ pour les lignes **(a)**, **(b)** et **(c)** de la Figure III.18. On observe ainsi directement sur la fonction de Wigner approchée la présence de lobes au-delà de la barrière Zénon, qui sont imputables à notre méthode de tomographie en présence de la micro-onde Zénon (apparaissant aussi sur les simulations numériques). La mesure de la distribution de Wigner par tomographie des niveaux Stark en présence du couplage Zénon fournit donc une représentation déformée de l'état du moment cinétique.

La Figure III.19 est donc obtenue par interpolation linéaire de plus de 192 points correspondant à des impulsions radiofréquences d'homodyne de durées et de phases variables. Derrière chacun des 192 points de cette Figure se cachent $N + 1$ mesures de probabilité d'occupation des niveaux $|n_e, k\rangle$ (ici $N = 5$). Une grande partie de l'information est donc perdue pour un seul calcul de parité qui ne nécessite pas toute cette information. Finalement, malgré la possibilité de mesurer expérimentalement l'approximation de la fonction de Wigner par somme alternée, il faut reconnaître que la méthode nécessite tout de même

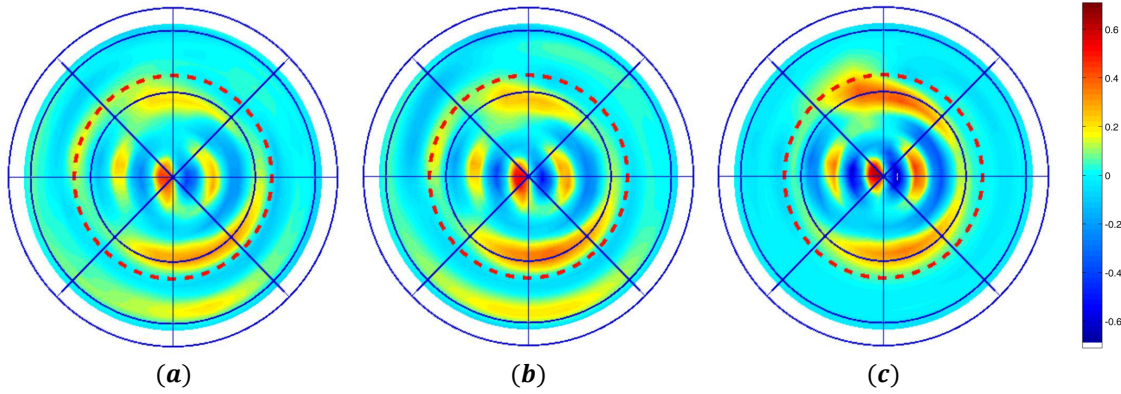


FIGURE III.19 – Mesure de la fonction de Wigner $W^{(5)}(\Theta, \Phi)$ de l'état obtenue par QZD à $t_1 = 0,76 \mu\text{s}$ par parité tronquée à $N = 5$ à partir des données brutes présentées en Figure III.18. **(a)** Expérience : somme alternée des $P_k(\Theta, \Phi)$ mesurés expérimentalement (ligne **(a)** de la Figure III.18). **(b)** Simulations numériques : somme alternée des $P_k(\Theta, \Phi)$ simulés dans le cas d'une tomographie en présence du couplage micro-onde Zénon (ligne **(b)** de la Figure III.18). **(c)** Simulations numériques similaires à **(b)** mais sans micro-onde Zénon pendant la rotation de tomographie, les états étant déshabillés avant tomographie.

la mesure des populations de multiples niveaux $|n, k\rangle$. Surtout, notre méthode de mesure en présence de la micro-onde Zénon induit des artefacts préjudiciables à l'obtention d'un signal d'interférence.

Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté le principe général de la dynamique Zénon quantique, nous avons décrit et analysé l'observation expérimentale de cette dynamique implémentée au sein d'une multiplicité Stark d'un atome de Rydberg. Lors de cette dynamique, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ qui décrit l'état de l'atome est couplé à un champ radiofréquence polarisé qui déclenche sa rotation. Le couplage continu de l'atome à une micro-onde dite Zénon résonante de manière sélective avec un niveau de l'échelle des états de ce moment cinétique permet de confiner l'évolution du système dans un sous-espace Zénon. La micro-onde définit deux sous-espaces Zénon \mathcal{H}_N et \mathcal{H}_S , dont la frontière constitue une latitude limite infranchissable à la surface de la sphère de Bloch généralisée. Au moment où le moment cinétique atteint cette latitude limite, le champ cohérent se scinde en deux, une composante apparaissant sur la longitude opposée. A l'instant où les deux composantes de phases azimutales opposées sont à poids égaux, la reconstruction de l'état par maximum de vraisemblance montre la cohérence de la superposition. La cohérence est manifeste sur la fonction de Wigner où, entre les deux composantes cohérentes, des oscillations prenant des valeurs négatives sont observées, signature du caractère non classique de l'état du moment cinétique.

Grâce à la QZD, nous avons donc généré de façon déterministe un état *Chat de Schrödinger* du moment cinétique \hat{J}_1 . Nous pouvons même ajouter que cette dynamique est périodique et que le moment cinétique soumis au couplage radiofréquence en présence de la micro-onde Zénon se retrouvera donc périodiquement dans une superposition d'états mésoscopiques. Le motif d'interférence, présentant des oscillations rapides entre des valeurs positives et négatives, peut être exploité afin d'améliorer la sensibilité de l'atome aux variations du champ électrique ou magnétique. En particulier, en réalisant une rotation globale de cet état sur la sphère de Bloch comme représenté à la Figure III.20, il est possible de préparer un état extrêmement sensible aux rotations induites par une variation d'énergie entre les états paraboliques. L'alignement des oscillations d'interférence le long de l'équateur permet donc d'être sensible à la fois aux effets Stark et Zeeman au-delà de la limite quantique standard.

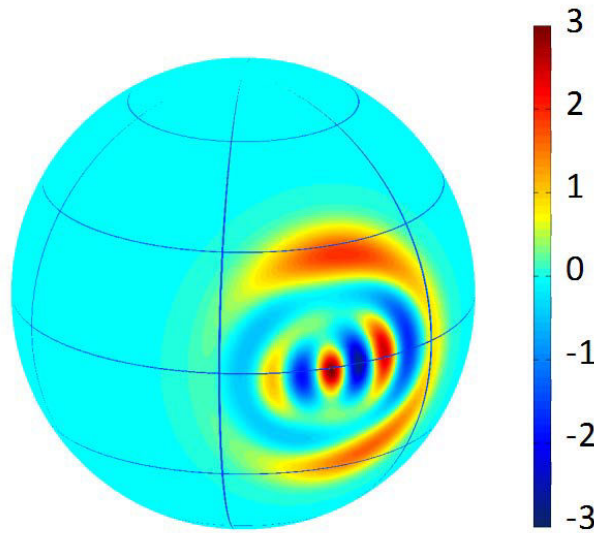


FIGURE III.20 – Préparation d'états sensibles aux champs électrique et magnétique statiques. En réalisant une rotation globale de l'état *Chat de Schrödinger* généré par dynamique de Zénon quantique, il est possible de préparer des états extrêmement sensibles aux rotations induites par une variation de champ électrique ou magnétique statique.

La mesure expérimentale de ces franges d'interférence et leur exploitation métrologique se heurte tout d'abord au problème du découplage de la micro-onde Zénon, puis à la mesure d'une coupe de la fonction de Wigner nécessitant la mesure des populations d'un grand nombre de niveaux de l'échelle de spin. Il nous faut donc imaginer une méthode alternative permettant de mesurer directement un signal interférométrique de cette nature afin d'utiliser de telles superpositions d'états du type *Chat de Schrödinger* pour des expériences de métrologie. Ceci fera l'objet des deux derniers chapitres de ce manuscrit.

Chapitre IV

Moments cinétiques pour la métrologie

On sait bien que la vie est brève

On y met du rire et du rêve

Et on fait tourner les serviettes...

Patrick Sébastien, On fait tourner les serviettes (2000)

Sommaire

IV.1 Métrologie quantique : <i>Chat de Schrödinger</i> d'un atome de Rydberg	185
IV.1.1 Principe théorique	185
IV.1.2 Mise en œuvre de la méthode avec un atome de Rydberg	194
IV.1.3 Lien entre signal interférométrique et fonction de Wigner	201
IV.2 Choix d'un champ électrique de travail	207
IV.2.1 Position du problème	207
IV.2.2 Étude de la décohérence par interférométrie Ramsey	209
IV.2.3 Polarisation du champ RF à 530 MHz	217
IV.3 Trajectoires des moments cinétiques $\hat{J}_1^{(50)}$ et $\hat{J}_1^{(51)}$	220
IV.3.1 Énergies des niveaux Stark	221
IV.3.2 Influence de l'effet Stark quadratique	222
IV.3.3 Métrologie quantique : durées des impulsions RF	224

La dynamique de Zénon quantique a l'élégance de sculpter l'espace de Hilbert dans lequel évolue un système quantique afin d'induire de nouvelles dynamiques. Elle constitue en particulier une méthode permettant de générer de manière déterministe et périodique des états *Chat de Schrödinger*, superpositions de deux moments cinétiques pointant dans deux directions différentes, qui ouvrent la voie à la réalisation d'expériences de métrologie quantique.

En effet, s'il n'y a pas de limite fondamentale à une mesure classique – la position d'une aiguille sur un cadran pouvant être déterminée avec une incertitude arbitrairement faible –, la précision de toute mesure dans le monde quantique est limitée par le bruit de projection. Pour les systèmes de spins, ce sont ces fluctuations quantiques, affectant en particulier les états cohérents de spin, qui conduisent à la représentation qualitative de ces états par leur cercle d'incertitude sur la sphère de Bloch généralisée. Pour un moment cinétique j , ces fluctuations mènent à une incertitude de mesure en $1/\sqrt{j}$ appelée limite quantique standard (SQL). La préparation d'états présentant des motifs plus fins, de meilleure résolution, que ces états quasi-classiques, permet la réalisation de mesures au-delà de cette limite. Une approche possible consiste à utiliser des états dits « comprimés », dont les fluctuations quantiques gaussiennes ont été réduites dans une direction de l'espace des phases [57–61, 63–65]. La dynamique Zénon quantique permet d'ailleurs de générer de tels états [158]. Une approche alternative consiste à utiliser des états *Chat de Schrödinger* [99–101]. Nous avons vu en effet dans ce manuscrit que la fonction de Wigner de ces états présentent des franges d'interférence rapidement oscillantes et cela d'autant plus que la taille de la superposition est grande, c'est-à-dire d'autant plus que les moments cinétiques de la superposition pointent dans des directions différentes.

Cependant, l'obtention du signal métrologique que constitue une coupe perpendiculaire des franges d'interférence entre les deux composantes cohérentes de la superposition d'états ne peut se faire dans notre cas qu'au prix de nombreuses mesures des probabilités d'occupations $P_k(\Theta, \pm \pi/2)$ servant ensuite à calculer par somme alternée tronquée ce signal métrologique. Plus la taille de la superposition est grande, plus le nombre d'états significatifs à sonder est grand. Ainsi, en l'absence de mesure directe de la parité, nous sommes finalement contraints de mesurer un grand nombre d'informations qui sont ensuite noyées dans ce calcul de parité.

C'est pourquoi nous avons imaginé une méthode alternative pour générer des superpositions d'états du moment cinétique de grandes tailles, de manière extrêmement rapide, et nous donnant accès à un signal métrologique en temps réel, faisant économie d'une étape de traitement des données afin de reconstruire l'état complet du système, et cela à partir de la mesure de la probabilité d'occupation d'un seul niveau. Ce chapitre s'attache donc tout d'abord à décrire cette méthode, puis à présenter les premiers éléments de sa mise en œuvre.

IV.1 Métrologie quantique : *Chat de Schrödinger* d'un atome de Rydberg

Le parti pris de nos expériences est de proposer des protocoles de métrologie quantique utilisant des états du type *Chat de Schrödinger*. Nous présenterons dans cette partie une méthode qui tire avantage de la structure des multiplicités Stark afin d'obtenir un signal métrologique à partir de ce type d'états. Nous prouverons ensuite l'équivalence de cette nouvelle approche avec celle consistant à utiliser une coupe de la fonction de Wigner de l'état comme signal métrologique.

IV.1.1 Principe théorique

La méthode de métrologie quantique que nous proposons ici est à considérer comme le prolongement quantique d'une méthode quasi-classique consistant à utiliser le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ dans le plan équatorial de la sphère de Bloch comme une « aiguille » sur un cadran. La rotation de cette « aiguille » quasi-classique permet de mesurer une variation de la fréquence de rotation avec une sensibilité en $1/\sqrt{j}$. Après avoir décrit théoriquement cette méthode quasi-classique, nous verrons comment, par la mesure d'une phase globale quantique, améliorer la sensibilité de la mesure pour atteindre la limite ultime d'Heisenberg en $1/j$.

IV.1.1.a Dynamique d'un état cohérent du moment cinétique

Considérons le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ initialement préparé dans l'état $|j, +j\rangle$ aligné le long de l'axe (Oz). Dans cette première approche théorique, nous négligerons l'effet Stark quadratique et considérerons une échelle de spin harmonique. La fréquence du champ RF est choisie égale à la fréquence Stark linéaire $\omega_{at}/2\pi$. Le champ radiofréquence est donc résonant avec toutes les transitions d'échelle. Une rotation $\hat{R}_{\Theta,0}$, générée par couplage de l'atome à un champ radiofréquence classique polarisé σ_+ , prépare le système dans l'état cohérent $|\Theta, 0\rangle$:

$$|\Theta, 0\rangle = \sum_{m=-j}^{m=j} \binom{2j}{m+j}^{1/2} \left(\cos \frac{\Theta}{2}\right)^{j+m} \left(\sin \frac{\Theta}{2}\right)^{j-m} |j, m\rangle \quad . \quad (\text{IV.1})$$

L'évolution libre durant un temps t_0 de cet état $|\Theta, 0\rangle$ est une rotation autour de l'axe vertical (Oz) à la fréquence ω_{at} . En effet, en choisissant l'énergie de l'état initial $|j, +j\rangle$ comme origine des énergies, chacune des composantes $|j, m\rangle$ du champ cohérent $|\Theta, 0\rangle$ accumule une phase dynamique $\exp \left[-i(m-j)\omega_{at}t_0 \right]$ conduisant ce dernier dans l'état $|\Theta, \Phi\rangle$ avec $\Phi = \omega_{at}t_0$.

Un changement d'une quantité δF_{st} du champ électrique statique produit une modification $\delta\omega_{at}$ de la pulsation de rotation du moment cinétique :

$$\delta\omega_{at} = \left(\frac{\partial\omega_{at}}{\partial F_{st}} \right) \delta F_{st} \quad (\text{IV.2})$$

$$= -\frac{3}{2}q \frac{a_0}{\hbar} n \delta F_{st} \quad (\text{effet Stark linéaire}) \quad (\text{IV.3})$$

On fait ici l'hypothèse que le champ radiofréquence à l'origine de la première rotation \mathcal{R}_1 autour de l'axe (Ox) est très intense $\Omega_{RF}^+ \gg \delta\omega_{at}$. La rotation \mathcal{R}_1 est donc insensible à cette infime modification du champ électrique statique F_{st} et l'état à l'issue de cette rotation demeure $|\Theta, 0\rangle$. Les énergies de tous les états de l'échelle de spin $|j, m\rangle$, $-j \leq m \leq +j$ sont déplacées par effet Stark d'une quantité $-(m-j)\hbar\delta\omega_{at}$. Ainsi, l'évolution libre de l'état $|\Theta, 0\rangle$ au champ $F_{st} + \delta F_{st}$ durant un temps t_0 amènera le moment cinétique dans l'état $|\Theta, \Phi + \delta\Phi\rangle$ avec $\delta\Phi = \delta\omega_{at} t_0$.

La mesure quasi-classique consiste à mesurer ce déphasage $\delta\Phi$. Il peut être lu par l'application d'une seconde impulsion radiofréquence de même durée que la première et de phase ajustable. Cette impulsion produit une rotation \mathcal{R}_2 qui amène le moment cinétique $|\Theta, \Phi\rangle$ sous l'action de l'opérateur $\hat{R}_{\Theta, \pi + \phi_{RF}}$ dans un état final noté $|\psi_f\rangle$. De même que pour \mathcal{R}_1 , cette seconde rotation est produite par couplage du moment cinétique à un champ radiofréquence intense. On mesure finalement la probabilité $P_{\Theta, t_0}(\phi_{RF})$ de retrouver l'état final $|\psi_f\rangle$ dans l'état initial $|j, +j\rangle$ qui s'exprime grâce à leur produit scalaire :

$$\begin{aligned} P_{\Theta, t_0}(\phi_{RF}) &= |\langle j, +j | \psi_f \rangle|^2 \\ &= |\langle j, +j | \hat{R}_{\Theta, \pi + \phi_{RF}} | \Theta, \Phi \rangle|^2 \\ &= |\langle j, +j | \hat{R}_{\Theta, \phi_{RF}}^\dagger | \Theta, \Phi \rangle|^2 \\ &= |\langle \Theta, \phi_{RF} | \Theta, \Phi \rangle|^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

et vaut donc d'après l'équation (I.131) page 61 :

$$P_{\Theta, t_0}(\phi_{RF}) = \cos^{4j} \frac{\Xi}{2}, \quad (\text{IV.5})$$

où Ξ est l'angle formé par les deux directions (Θ, ϕ_{RF}) et (Θ, Φ) pointant sur le même parallèle de colatitude Θ , tel que $\cos \Xi = \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cdot \cos(\phi_{RF} - \Phi)$. L'indice t_0 dans la notation de la probabilité $P_{\Theta, t_0}(\phi_{RF})$ est ici pour rappeler la dépendance de l'angle Φ en t_0 , qui correspond à la durée de la phase d'attente.

On représente Figure IV.1 cette méthode de métrologie quasi-classique décomposée en trois étapes majeures : **(a)** rotation \mathcal{R}_1 , **(b)** attente durant un temps t_0 et **(c)** rotation \mathcal{R}_2 . La variation de la longueur de l'arc parcouru lors de la rotation libre autour de (Oz) (trait orange Figure IV.1 **(c)**) étant égale à $\sin \Theta \times \delta\Phi$, cette méthode a donc une sensibilité d'autant plus grande à t_0 fixé que l'état tourné par \mathcal{R}_1 est proche de l'équateur. Ceci est

assez intuitif. Pour $\Theta^{opt} = \pi/2$, on obtient alors une expression simplifiée de la probabilité $P_{\Theta, t_0}(\phi_{RF})$:

$$P_{\Theta^{opt}, t_0}(\phi_{RF}) = \cos^{4j} \left(\frac{\phi_{RF} - \Phi}{2} \right) \approx e^{-j(\phi_{RF} - \Phi)^2/2} \quad \text{pour } j \gg 1 \quad , \quad (\text{IV.6})$$

La distribution de probabilité est donc, dans une très bonne approximation, une gaussienne d'écart type $\sigma = 1/\sqrt{j}$ déterminé par les fluctuations quantiques de ces états quasi-classiques du moment cinétique. Ainsi, si l'on mesure la probabilité d'occupation de l'état $|j, +j\rangle$ en faisant varier la phase ϕ_{RF} de la seconde impulsion, on obtient pour des champs électriques F_{st} et $F_{st} + \delta F_{st}$ deux gaussiennes centrées en Φ et $\Phi + \delta\Phi$ dont l'écartement angulaire nous renseigne sur la variation de champ électrique δF_{st} .

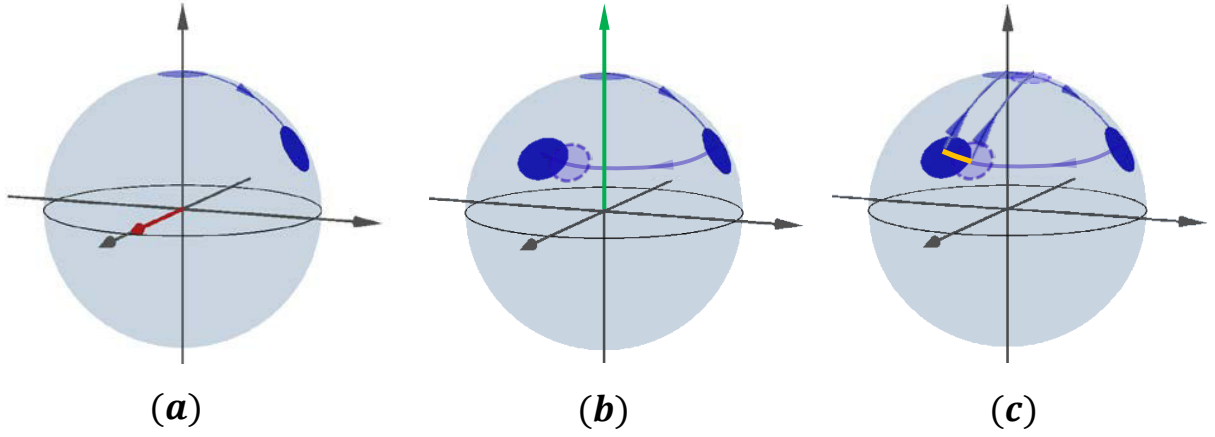


FIGURE IV.1 – Mesure quasi-classique. **(a)** Le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ est initialement dans l'état $|j, +j\rangle$ représenté par un disque d'incertitude au pôle Nord de la sphère de Bloch généralisée. Une première rotation \mathcal{R}_1 génère l'état $|\Theta, 0\rangle$. **(b)** Durant un temps d'attente t_0 , l'état tourne autour de l'axe (Oz) à une pulsation ω_{at} pour un champ F_{st} (disque bleu) et $\omega_{at} + \delta\omega_{at}$ pour un champ $F_{st} + \delta F_{st}$ (disque bleu en transparence), où $\delta\omega_{at} \sim -\frac{3}{2}q\frac{a_0}{h}n\delta F_{st}$. **(c)** Une seconde rotation \mathcal{R}_2 de phase variable ramène le moment cinétique en trait plein dans un état final $|\psi_f\rangle$ et l'on mesure finalement la probabilité $P_{\Theta, t_0}(\phi_{RF})$ de retrouver l'état final dans l'état initial $|j, +j\rangle$ en fonction de la phase de la seconde impulsion.

Déterminons la sensibilité de cette mesure. La résolution de notre méthode quasi-classique de mesure du champ électrique correspond à l'incertitude finale σ_F sur le champ électrique mesuré. Le signal expérimental étant ici la probabilité d'occupation de l'état $|j, +j\rangle$, σ_F dépend donc de la sensibilité de $P_{\Theta, t_0}(\phi_{RF})$ vis-à-vis de la quantité mesurée soit $(\partial P)/(\partial F_{st})$ et de la dispersion de la mesure, notée σ_P . On peut donc écrire que :

$$\sigma_F = \left. \frac{\partial P}{\partial F_{st}} \right|_{\phi_{RF}, \Theta}^{-1} \times \sigma_P \quad . \quad (\text{IV.7})$$

Dans notre cas, où la mesure $P_{\Theta,t_0}(\phi_{\text{RF}})$ est sensible à la variation de phase $\delta\Phi$ provoquée par une variation de champ électrique δF_{st} , on peut écrire :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial F_{st}} \right|_{\phi_{\text{RF}}, \Theta}^{-1} = \left(\left. \frac{\partial P}{\partial \Phi} \right|_{\phi_{\text{RF}}, \Theta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_{at}} \cdot \frac{\partial \omega_{at}}{\partial F_{st}} \right)^{-1} . \quad (\text{IV.8})$$

On voit donc ici que la sensibilité de la méthode est d'autant meilleure que $\left| (\partial P)/(\partial \Phi) \right|_{\phi_{\text{RF}}, \Theta}$ est grand. Pour le paramètre Θ , un court calcul de dérivées sur (IV.5) montre que cette quantité est bien maximale en $\Theta^{\text{opt}} = \pi/2$, ce qui confirme notre intuition. Pour le paramètre ϕ_{RF} , la pente de la gaussienne est maximale en $\phi_{\text{RF}} = \Phi \pm \frac{1}{\sqrt{j}}$, c'est-à-dire « à flanc de gaussienne », et on obtient que :

$$\max \left. \frac{\partial P}{\partial \Phi} \right|_{\phi_{\text{RF}}^{\text{opt}}, \Theta^{\text{opt}}} = \frac{\sqrt{j}}{e^{1/2}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_{at}} \right)^{-1} = \frac{1}{t_0} . \quad (\text{IV.9})$$

Dans cette méthode, nous mesurons *in fine* la probabilité d'occupation de l'état $|j, +j\rangle$, ie que l'atome soit dans le niveau de Rydberg circulaire. Ainsi, d'après la loi binomiale, $\sigma_P = \sqrt{P(1-P)}$ avec ici $P^{\text{opt}} = e^{-1/2}$. On a donc $\sigma_P \approx 1/2$. En toute rigueur, il conviendrait d'optimiser le produit de la pente $\left| (\partial P)/(\partial \Phi) \right|_{\phi_{\text{RF}}, \Theta}$ avec la dispersion σ_P . En effet, en se rapprochant du maximum du signal gaussien, la dispersion σ_P tend vers 0, mais la pente aussi. L'optimum théorique est ainsi légèrement décalé du point de pente maximale. En pratique cependant, dans le cas de signaux de contraste réduit, il est préférable de maximiser la pente seule, comme le discute Itano pour les systèmes d'ions piégés [53] (sur des signaux sinusoïdaux). Finalement, la sensibilité en champ électrique de cette méthode quasi-classique vaut :

$$\sigma_F \approx \frac{e^{1/2}}{2t\sqrt{j}} \frac{\partial F_{st}}{\partial \omega_{at}} \propto \frac{1}{\sqrt{j}} . \quad (\text{IV.10})$$

Cette sensibilité pourrait être légèrement améliorée en modifiant quelque peu la méthode. Les expériences de métrologie utilisant un ensemble de N spins 1/2 remplacent usuellement la rotation \mathcal{R}_2 par une rotation permettant de positionner les états cohérents de spin à F_{st} et à $F_{st} + \delta F_{st}$ (cercles plein et en transparence sur la Figure IV.1) sur un même méridien [22, 24]. Par la mesure de la valeur moyenne $\langle N \rangle = N_{\uparrow} - N_{\downarrow}$, leur méthode atteint une sensibilité en $1/\sqrt{N} \times \partial F_{st}/\partial \omega_{at}$. Dans notre cas, la mesure de la valeur moyenne $\langle \hat{J}_z \rangle$ nécessiterait la mesure des probabilités d'occupation d'un grand nombre de niveaux, ce qui n'est pas idéal. Notre méthode, qui ne réclame que la mesure de la probabilité d'occupation du niveau circulaire, est $\sqrt{e/2} \approx 1,17$ fois moins sensible en théorie. A ce facteur multiplicatif près, la sensibilité de notre méthode évolue en $1/\sqrt{j}$. Cette loi d'échelle définit la limite quantique standard :

$$\sigma_F^{\text{SQL}} = \frac{1}{\sqrt{2j} t_0} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial \omega_{at}} . \quad (\text{IV.11})$$

Comme nous l'avons vu en introduction, cette limite n'est pas une limite absolue fixée par les règles de la mécanique quantique. L'utilisation d'états comprimés du moment cinétique par exemple améliore la sensibilité de la méthode en augmentant la pente du signal $\left|(\partial P)/(\partial \Phi)\right|_{\phi_{\text{RF}}, \Theta=\pi/2}$ (premier terme de l'équation (IV.8)). D'une manière différente, notre approche vise à augmenter la sensibilité en phase $\partial \Phi / \partial \omega_{at}$ (second terme de l'équation (IV.8)), en préférant la mesure d'une phase quantique, comme nous allons le présenter dans la partie suivante.

IV.1.1.b Métrologie quantique et interférométrie

Nous présentons ici une approche alternative pour atteindre la limite de Heisenberg. A la place d'utiliser le déphasage classique, associé au changement de direction du moment cinétique, $\delta \Phi = \delta \omega_{at} t_0$, nous mesurons la variation de la phase globale accumulée par le moment cinétique lors de son évolution complète sur la sphère de Bloch. Cette phase quantique correspond donc à la phase du recouvrement entre l'état initial $|j, +j\rangle$ et l'état final $|\psi_f\rangle$ à l'issue de la séquence $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_1, \text{attente durant } t_0, \mathcal{R}_2\}$:

$$\langle j, +j | \psi_f \rangle = |\langle j, +j | \psi_f \rangle| e^{-i\chi} \quad . \quad (\text{IV.12})$$

La quantité $\langle j, +j | \psi_f \rangle$ peut s'écrire à l'aide d'une intégrale de chemin de l'état cohérent de spin. Pour un moment cinétique j , on peut en effet écrire le propagateur $\langle \Theta', \Phi' | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | \Theta, \Phi \rangle$ entre deux états arbitraires $|\Theta, \Phi\rangle$ et l'état $|\Theta', \Phi'\rangle$ reliés en un temps T sous l'effet d'un hamiltonien \hat{H} :

$$\mathcal{P} = \langle \Theta', \Phi' | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | \Theta, \Phi \rangle = \langle \Theta', \Phi' | \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{T}{N} \hat{H}} \right)^N | \Theta, \Phi \rangle \quad , \quad (\text{IV.13})$$

où N est un nombre entier quelconque. On peut alors insérer $N - 1$ relations de fermeture $(2j + 1) \int d\Omega / 4\pi |\Theta, \Phi\rangle \langle \Theta, \Phi| = 1$, entre les N produits d'exponentielles, où $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$. Si l'on fait tendre $N \rightarrow +\infty$, on peut alors développer les exponentielles au premier ordre en $\epsilon = t_0/N$ et écrire :

$$\mathcal{P} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N} \int \left(\prod_{\tau} d\Omega(\tau) \right) \langle \Omega(\tau + \epsilon) | \left[1 - \epsilon \frac{i}{\hbar} \hat{H} \right] | \Omega(\tau) \rangle \quad , \quad (\text{IV.14})$$

où $|\Omega(\tau)\rangle = |\Theta(\tau), \Phi(\tau)\rangle$ et $\mathcal{N} = [(2j + 1)/(4\pi)]^{(N-1)}$ la constante de normalisation. On peut alors simplifier cette expression sous la forme :

$$\mathcal{P} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N} \int \left(\prod_{\tau} d\Omega(\tau) \right) \langle \Omega(\tau + \epsilon) | \Omega(\tau) \rangle \left[1 - \epsilon \frac{i}{\hbar} H_{\epsilon}(\tau) \right] \quad , \quad (\text{IV.15})$$

où $H(\tau)$ correspond à la valeur moyenne de l'énergie au temps τ tel que :

$$H_\epsilon(\tau) \equiv \frac{\langle \Omega(\tau + \epsilon) | \hat{H} | \Omega(\tau) \rangle}{\langle \Omega(\tau + \epsilon) | \Omega(\tau) \rangle} . \quad (\text{IV.16})$$

Finalement, en réécrivant l'exponentielle et en calculant le recouvrement entre deux états cohérents infiniment proches grâce à la formule (I.130) page 61, on obtient (en ignorant les chemins discontinus [211]) :

$$\langle \Theta', \Phi' | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | \Theta, \Phi \rangle = \int \mathcal{D} \Omega \exp \left[-\mathcal{S}(\Omega(\tau)) / \hbar \right] , \quad (\text{IV.17})$$

où $\mathcal{D} \Omega \equiv \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N} \prod_\tau d\Omega(\tau) = \prod_\tau \sin \Theta(\tau) d\Theta(\tau) d\Phi(\tau)$ et où l'action \mathcal{S} est donnée par :

$$\mathcal{S}(\Omega(\tau)) = \int_0^T d\tau \left[-i \hbar j (1 - \cos \Theta(\tau)) \dot{\Phi}(\tau) + H(\tau) \right] , \quad (\text{IV.18})$$

et où $H(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon(\tau) = \langle \Theta(\tau), \Phi(\tau) | \hat{H} | \Theta(\tau), \Phi(\tau) \rangle$ [212, 213]. L'intégrale de chemin (IV.17) est une intégrale sur tous les chemins satisfaisants $|\Omega(0)\rangle = |\Theta, \Phi\rangle$ et $|\Omega(T)\rangle = |\Theta', \Phi'\rangle$. La contribution dominante à cette intégrale de chemin correspond à la trajectoire quasi-classique [214]. Ainsi, pour les évolutions d'états cohérents d'un grand moment cinétique qui nous intéressent dans ce manuscrit, l'approximation semi-classique qui consiste à négliger les contributions des autres chemins est amplement justifiée.

Ce raisonnement très général peut s'appliquer successivement pour les trois phases de l'évolution \mathcal{S} du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ sur la sphère de Bloch. On obtient ainsi la phase globale accumulée χ lors de l'évolution de $\hat{\mathbf{J}}_1$ entre $|j, +j\rangle$ et $|\psi_f\rangle$. La phase χ a plusieurs contributions. La première contribution est associée au premier terme de (IV.18), que l'on peut récrire sous la forme $-i \mathcal{A}(\Theta, \Phi) / (\hbar j)$, et qui possède une interprétation géométrique simple sur la sphère de Bloch de rayon $\hbar j$. En effet, pour une trajectoire fermée \mathcal{C} , le terme $\mathcal{A}(\Theta, \Phi)$ s'écrit :

$$\mathcal{A}(\Theta, \Phi) = \hbar^2 j^2 \oint_0^T d\tau (1 - \cos \Theta(\tau)) \dot{\Phi}(\tau) \quad (\text{IV.19})$$

$$= \hbar^2 j^2 \int_0^\Phi d\Phi (1 - \cos \Theta(\tau)) , \quad (\text{IV.20})$$

qui correspond à l'aire entourée par le chemin fermé. Ce premier terme est donc purement géométrique, c'est-à-dire qu'il ne dépend que de la trajectoire du moment cinétique sur la sphère de Bloch et non pas de sa dépendance temporelle explicite. La grandeur réelle $j\hbar (1 - \cos \Theta(\tau)) \dot{\Phi}(\tau)$ est appelée *connexion de Berry* et son intégrale divisée par \hbar est appelée *phase de Berry* [215] ou *phase de Pancharatnam* [216] :

$$\Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\mathcal{A}(\Theta, \Phi)}{\hbar j} , \quad (\text{IV.21})$$

Cette phase géométrique est donc proportionnelle à la valeur de l'angle solide sous lequel est vue la trajectoire \mathcal{C} . Cet angle solide est défini modulo 4π , mais puisque $\exp(-i 4\pi j) = 1$ pour des moments cinétiques entiers et demi-entiers l'ambiguïté n'est physiquement pas pertinente. Le second terme de l'action (IV.18) correspond lui à une phase dynamique :

$$\Upsilon^{\text{dyn.}}(T) = \frac{1}{\hbar} \int_0^T H(\tau) d\tau \quad . \quad (\text{IV.22})$$

On peut donc écrire de manière synthétique que :

$$\chi = \Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) + \Upsilon^{\text{dyn.}}(T) \quad . \quad (\text{IV.23})$$

L'expression de la phase quantique χ que nous venons de donner est valable, même si les rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 ne sont pas « instantanées » (hypothèse des impulsions radiofréquences très intenses). Dans ce cas, la trajectoire du moment cinétique est alors complexe et l'aire entourée par la trajectoire peut être difficile à calculer. La décomposition de cette phase quantique χ en une phase géométrique et une phase dynamique est cependant essentielle afin de bien comprendre ce qu'elle représente. En effet, on peut – en faisant l'hypothèse de rotations infiniment rapides – exprimer d'une autre manière cette phase χ en se rappelant que :

$$\langle j, +j | \psi_f \rangle = \langle j, +j | \hat{R}_{\Theta, \pi + \phi_{\text{RF}}} | \Theta, \Phi \rangle = \langle j, +j | \hat{R}_{\Theta, \phi_{\text{RF}}}^\dagger | \Theta, \Phi \rangle = \langle \Theta, \phi_{\text{RF}} | \Theta, \Phi \rangle \quad . \quad (\text{IV.24})$$

Or, d'après [132], on a :

$$\langle \Theta, \phi_{\text{RF}} | \Theta, \Phi \rangle = e^{ij(\phi_{\text{RF}} - \Phi)} \left[\cos \frac{\phi_{\text{RF}} - \Phi}{2} - i \cos \Theta \sin \frac{\phi_{\text{RF}} - \Phi}{2} \right]^{2j} , \quad (\text{IV.25})$$

d'où l'on obtient, χ étant l'argument complexe des produits scalaires IV.24 et IV.25 :

$$\chi = j \left[\left(\Phi - \phi_{\text{RF}} \right) - 2 \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{\Phi - \phi_{\text{RF}}}{2} \right) \cos \Theta \right) \right] \quad . \quad (\text{IV.26})$$

Cette formule analytique constitue une expression commode afin de calculer en pratique la phase quantique χ , mais les deux contributions (géométrique et dynamique) y sont noyées. En particulier, dans le cas de l'évolution du moment cinétique durant la séquence $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_1, \text{attente durant } t_0, \mathcal{R}_2\}$ de métrologie représentée à la Figure IV.2 (a), la phase ϕ_{RF} est choisie égale à Φ , afin que $|\psi_f\rangle = |j, +j\rangle$. L'expression (IV.26) permet ainsi de conclure que $\chi = 0$, dans le cas de cette trajectoire fermée. On a par ailleurs représentée sur cette Figure, teintée en vert, l'aire $\mathcal{A}(\Theta, \Phi)$ qui contribue à la phase géométrique $\Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$. L'angle solide sous lequel est vue cette surface vaut $\hbar j (1 - \cos \Theta) \Phi$

et on a donc :

$$\Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = j \left(1 - \cos \Theta \right) \Phi \quad . \quad (\text{IV.27})$$

Comme $\chi = 0$, on conclut que la phase dynamique est égale à l'opposée de la phase géométrique, ce qui se confirme aisément par le calcul. En effet, dans le cas d'impulsions RF infiniment courtes, la phase dynamique accumulée durant les rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_1 est nulle, et seule la phase d'attente contribue. Ainsi :

$$\Upsilon^{\text{dyn.}}(t_0) = \frac{1}{\hbar} \int_0^{t_0} \langle \Theta(t), \Phi(t) | \hat{H} | \Theta(t), \Phi(t) \rangle \quad (\text{IV.28})$$

$$= \frac{1}{\hbar} \int_0^{t_0} \hbar j \left(\cos \Theta - 1 \right) \omega_a dt \quad (\text{IV.29})$$

$$= -j \left(1 - \cos \Theta \right) \omega_a t_0 \quad . \quad (\text{IV.30})$$

Comme $\omega_a t_0 = \Phi$, on voit que la phase dynamique vaut exactement l'opposée de la phase géométrique (IV.27). Ainsi, la phase globale accumulée lors de la séquence est bien nulle.

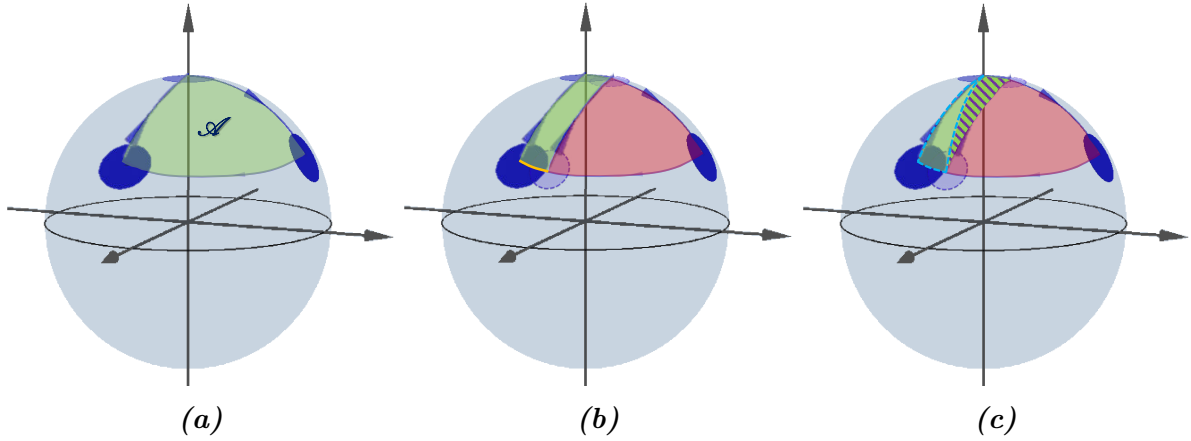


FIGURE IV.2 – Représentation géométrique de la phase quantique χ . **(a)** A un champ F_{st} donné, représentation de la phase de Berry $\Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$ qui est proportionnelle à l'aire $\mathcal{A}(\Theta, \Phi)$ (IV.19) entourée par la trajectoire fermée du moment cinétique sur la sphère de Bloch généralisée et teintée en vert sur la Figure. **(b)** Représentation de deux trajectoires du moment cinétique pour des champs électriques F_{st} et $F_{st} + \delta F_{st}$. La variation de la phase géométrique $\delta \Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$ entre ces deux trajectoires est proportionnelle à l'aire du parallélogramme sphérique teinté en vert. **(c)** Représentation de la variation de la phase globale $\delta \chi$ occasionnée par une variation δF_{st} du champ électrique qui est donc proportionnelle à l'aire hachurée en violet sur la sphère.

Si l'on considère maintenant une variation de champ électrique δF_{st} , la trajectoire du moment cinétique sera alors telle que représentée en rouge sur la Figure IV.2 (b). La phase de la seconde impulsion radiofréquence ayant précédemment été fixée à $\phi_{\text{RF}} = \Phi$, l'état final $|\psi_f\rangle$ n'est plus exactement au pôle Nord de la sphère. Pour un tel chemin qui n'est pas fermé ($|\psi_f\rangle \neq |j, +j\rangle$), la grandeur $\mathcal{A}(\Theta, \Phi)$ dépend de l'orientation du trièdre $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, mais sa variation est indépendante de ce choix. On calcule en particulier

que [211, 213] :

$$\delta\mathcal{A}(\Theta, \Phi) = \int_0^{t_0} dt \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} \wedge \delta\hat{\mathbf{n}} \right) \quad , \quad (\text{IV.31})$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ désigne le vecteur qui pointe vers l'état cohérent $|\Theta, \Phi\rangle$. Cette variation de l'aire balayée occasionnée par la variation δF_{st} correspond donc, comme l'indique le produit vectoriel, à l'aire du parallélogramme représenté en vert sur la Figure IV.2 (b). La variation de phase géométrique $\delta\Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$ est donc égale à l'angle solide sous lequel est vu le parallélogramme en vert.

Intéressons-nous maintenant à la variation de phase dynamique. Par hypothèse des rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 infiniment rapides, seul le déphasage dynamique lors de la phase d'attente va contribuer. Cette variation de la phase dynamique lors du temps d'attente t_0 correspond à la phase dynamique accumulée sur la portion du chemin dessinée en trait jaune sur la Figure IV.2 (b) et vaut $\delta\Upsilon^{\text{dyn.}}(t_0) = -j(1 - \cos \Theta) \delta\omega_a t_0$. Or, on a vu que cette phase était égale à l'opposée de la phase géométrique du chemin fermé dessiné en pointillé bleu clair Figure IV.2 (c). En somme, la variation de la phase globale $\delta\chi = \delta\Upsilon^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) + \delta\Upsilon^{\text{dyn.}}(t_0)$ est égale à l'angle solide sous lequel est vue la surface résiduelle hachurée, qui vaut donc :

$$\delta\chi = j(1 - \cos \Theta) \delta\omega_a t_0 \quad . \quad (\text{IV.32})$$

Cette expression du déphasage $\delta\chi$, qui peut aussi être obtenue en développant aux petits angles $\delta\Phi = \Phi - \phi_{\text{RF}}$ l'expression (IV.26), montre que la phase quantique globale est reliée à l'aire de la trajectoire fermée associée à une rotation \mathcal{R}_1 , puis une rotation autour de (Oz) d'angle $\delta\Phi = \delta\omega_a t_0$ et finalement une seconde rotation \mathcal{R}_2 ramenant le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ dans l'état initial $|j, +j\rangle$. Cette aire correspond à celle d'un triangle sphérique, ce qui ne serait pas le cas si nous n'avions pas travaillé en faisant l'hypothèse des impulsions radiofréquences intenses. Néanmoins, en l'absence de cette hypothèse, on observera tout de même un déphasage $\delta\chi$ affine en $\delta\Phi$:

$$\delta\chi = \delta\chi_0 + j(1 - \cos \Theta) \delta\Phi \quad , \quad (\text{IV.33})$$

où $\delta\chi_0$ correspond au déphasage accumulée lors des rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .

La méthode quantique consiste à mesurer cette variation de la phase χ , provoquée par une variation δF_{st} de champ électrique. Il convient pour mesurer cette phase globale de disposer d'une référence de phase, c'est-à-dire de préparer le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1$ dans une superposition d'états cohérents *ie* un état *Chat de Schrödinger*, dont une composante ne subit pas les rotations et sert de référence de phase.

IV.1.2 Mise en œuvre de la méthode avec un atome de Rydberg

Nous allons maintenant présenter une séquence expérimentale permettant de mettre en œuvre cette méthode de métrologie quantique, consistant à mesurer ce déphasage $\delta\chi$, avec un atome de Rydberg.

IV.1.2.a Séquence expérimentale

Pour générer un tel état *Chat de Schrödinger*, on peut s'aider d'un niveau auxiliaire $|Aux\rangle$, de même énergie que $|j, +j\rangle$ et non affecté par la séquence $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_1, \text{attente durant } t_0, \mathcal{R}_2\}$. L'étape préliminaire consiste à préparer une superposition à poids égaux $(|Aux\rangle + |j, +j\rangle)/\sqrt{2}$ sous l'effet d'une impulsion $\pi/2$. Cette superposition est ensuite soumise à la séquence \mathcal{S} . Finalement, on applique une seconde impulsion $\pi/2$ identique à la première. La séquence expérimentale correspondante est reproduite Figure IV.3. L'état du moment cinétique se lit verticalement, où quatre états particuliers ont été listés : $|Aux\rangle$, $|j, +j\rangle$, $|\Theta, 0\rangle$ et $|\Theta, \Phi\rangle$. Les différentes étapes de la séquences sont décrites de la gauche vers la droite.

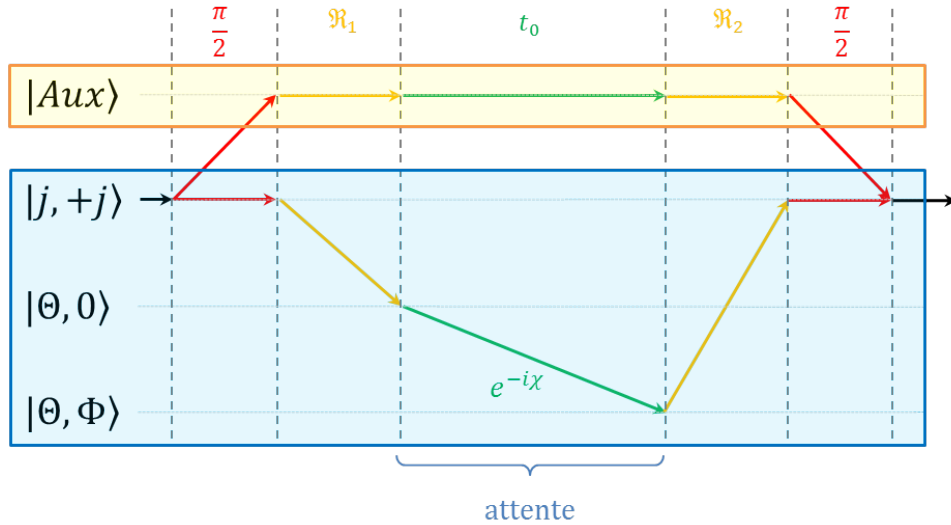


FIGURE IV.3 – Séquence expérimentale de métrologie quantique. L'état du moment cinétique se lit verticalement, où quatre états particuliers ont été listés : $|Aux\rangle$, $|j, +j\rangle$, $|\Theta, 0\rangle$ et $|\Theta, \Phi\rangle$. Les différentes étapes de la séquence sont décrites de la gauche vers la droite. Partant initialement de l'état $|j, +j\rangle$, le moment cinétique subit une impulsion $\pi/2$ qui prépare une superposition à poids égaux avec un état auxiliaire. Cette superposition est ensuite soumise à la séquence $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_1, \text{attente durant } t_0, \mathcal{R}_2\}$, qui laisse inchangée la composante auxiliaire. Finalement, une seconde impulsion $\pi/2$ identique à la première permet de recombinaison les deux canaux interférométriques.

La première impulsion $\pi/2$ prépare donc une superposition dont une des composantes – la composante $|Aux\rangle$ – demeurera « spectatrice », comme *mise sur étagère*. L'autre composante va parcourir un chemin à la surface de la sphère de Bloch généralisée associée, accumulant une phase globale quantique χ . Durant toute la séquence, le système est dans une superposition quantique d'états mésoscopiques. Le niveau auxiliaire agit donc comme le canal secondaire d'un système interférométrique. Durant la phase d'attente, une phase relative est accumulée entre la composante « chat mort », soit l'état $|Aux\rangle$ qui ne bouge pas sur la sphère de Bloch, et la composante « chat vivant » qui parcourt la sphère :

$$|\psi_{\text{chat}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Aux\rangle + |\Theta, 0\rangle) \xrightarrow{\text{attente } t_0} |\psi'_{\text{chat}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Aux\rangle + e^{-i\chi}|\Theta, \Phi\rangle) \quad . \quad (\text{IV.34})$$

Le déphasage accumulé entre les deux bras de l'interféromètre est lue lors de la recombinaison finale sous l'effet de la dernière impulsion $\pi/2$. Si cette séquence est jouée à deux champs électriques différents F_{st} et $F_{st} + \delta F_{st}$, la différence des phases mesurées à la sortie de l'interféromètre donne accès à $\delta\chi$. De la sorte, par la simple mesure de la probabilité d'occupation de l'état $|j, +j\rangle$, on mesure le déphasage global $\delta\chi$ qui est sensible à la variation de champ électrique δF_{st} .

En effet, comme dans une expérience d'interférométrie Ramsey, la phase ϕ_{MW} de la dernière impulsion $\pi/2$ peut être balayée afin d'obtenir des franges d'interférence. La recombinaison des états $|Aux\rangle$ et $|j, +j\rangle$ en fonction de cette phase s'écrit :

$$\begin{aligned} |Aux\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|Aux\rangle + e^{-i\phi_{\text{MW}}}|j, +j\rangle) \\ |j, +j\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{i\phi_{\text{MW}}}|Aux\rangle + |j, +j\rangle) \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Ainsi, la probabilité de retrouver le moment cinétique dans l'état $|j, +j\rangle$ est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{\Theta, t_0}(\phi_{\text{RF}}, \phi_{\text{MW}}) &= \frac{1}{4} |e^{-i\phi_{\text{MW}}} + \langle j, +j | \psi_f \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} |1 + |\langle \Theta, \phi_{\text{RF}} | \Theta, \Phi \rangle| e^{-i(\chi - \phi_{\text{MW}})}|^2 \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

qui correspond à des franges de valeur moyenne $(1 + |\langle \Theta, \phi_{\text{RF}} | \Theta, \Phi \rangle|^2)/4$ et d'amplitude $|\langle \Theta, \phi_{\text{RF}} | \Theta, \Phi \rangle|$, qui oscillent en fonction de $\chi - \phi_{\text{MW}}$. La phase du signal d'interférence dépend donc de la trajectoire précise du moment cinétique sur la sphère de Bloch à travers les dépendances en Θ et $(\phi_{\text{RF}} - \Phi)$ de χ . Son contraste traduit le recouvrement entre l'état final et $|j, +j\rangle$.

Pour mesurer $\delta\chi$, on règle donc la phase de la seconde impulsion radiofréquence de telle sorte que la rotation \mathcal{R}_2 ramène l'état de référence $|\Theta, \Phi\rangle$ sur l'état initial $|j, +j\rangle$ pour le champ électrique F_{st} , c'est-à-dire $\phi_{\text{RF}} = \Phi$. La probabilité $P_{\Theta, t_0}(\Phi, \phi_{\text{MW}})$ oscille donc en fonction de ϕ_{MW} avec un contraste unité autour de $1/2$. Pour un champ $F_{st} + \delta F_{st}$

tel que le déphasage $\delta\Phi = \delta\omega_{at}t_0 \ll 1$, on a donc $|\langle\Theta, \phi_{\text{RF}}|\Theta, \Phi + \delta\Phi\rangle| \approx 1$. Le contraste \mathcal{C} de ces franges est donc toujours proche de l'unité, mais elles sont cependant déphasées d'une quantité :

$$\delta\chi = j(1 - \cos\Theta) \delta\omega_{at} t_0 \quad . \quad (\text{IV.37})$$

Ce déphasage dépend linéairement de la quantité $j(1 - \cos\Theta)$, qui est proportionnelle à l'écart en énergie entre les états $|j, +j\rangle$ et $|\Theta, 0\rangle$, c'est-à-dire à la différence d'énergie entre les deux composantes de la superposition d'états préparée par la première impulsion radiofréquence, ou bien dit plus trivialement la « taille » de l'état *Chat de Schrödinger* généré.

IV.1.2.b Sensibilité de la méthode

Si l'on écrit pour cette méthode de métrologie quantique la sensibilité sous la forme de l'incertitude sur la mesure du champ électrique σ_F , on obtient :

$$\sigma_F = \left(\frac{\partial P}{\partial \chi} \Big|_{\phi_{\text{RF}}, \Theta} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \omega_{at}} \cdot \frac{\partial \omega_{at}}{\partial F_{st}} \right)^{-1} \sigma_P \quad . \quad (\text{IV.38})$$

Les franges d'interférence en fonction de ϕ_{MW} oscillent comme un cosinus entre 0 et 1. La pente maximale de la probabilité d'occupation de l'état $|j, +j\rangle$ vaut donc la moitié du contraste \mathcal{C} et est atteinte à mi-hauteur, de telle sorte $\sigma_P = 1/2$. Finalement, on a :

$$\sigma_F = \frac{1}{j(1 - \cos\Theta)t_0 \mathcal{C}} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial \omega_{at}} \quad . \quad (\text{IV.39})$$

On remarque que la sensibilité optimale n'est plus atteinte pour $\Theta = \pi/2$ comme dans le cas quasi-classique, où c'était la longueur de la trajectoire parcourue qui comptait. Dans le cas quantique et à la limite des petits angles $\delta\Phi$, σ_F^{-1} est cette fois proportionnelle à l'aire hachurée Figure IV.2 (c), qui est maximale pour tous les paramètres fixés quand $\Theta^{\text{opt}} = \pi$. Pour $\mathcal{C} = 1$, on retrouve la limite ultime de Heisenberg :

$$\sigma_F^{\text{Heis.}} = \frac{1}{2j t_0} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial \omega_{at}} \quad . \quad (\text{IV.40})$$

La grande sensibilité de cette méthode ne vient pas, comme dans l'approche utilisant des états comprimés, de la grande variation de la probabilité $P_{\Theta, t_0}(\phi_{\text{RF}}, \phi_{\text{MW}})$ en fonction de la phase (le terme $|\partial P / \partial \chi|$ est ici borné par l'unité) mais de la grande sensibilité de la phase elle-même à une variation de champ électrique. Notre méthode se rapproche donc plus des approches utilisant des états NOON, présentés en introduction de ce manuscrit, où la phase d'un tel état, accumulée lors de la période d'attente de durée t_0 , est proportionnelle

au nombre N de *qubits* :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{|0\rangle \cdots |0\rangle}_{N \text{ fois}} + \underbrace{|1\rangle \cdots |1\rangle}_{N \text{ fois}} \right) \xrightarrow{\text{attente } t_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \cdots |0\rangle + e^{iN\varphi} |1\rangle \cdots |1\rangle \right) \quad . \quad (\text{IV.41})$$

Néanmoins, nous ne disposons ici que d'un seul atome, ce qui est donc différent de cet état NOON qui est un état maximalement intriqué de N *qubits*. Dans notre cas, c'est l'écart en énergie entre les deux composantes de la superposition quantique d'états dans laquelle est préparée l'atome qui amplifie la sensibilité du système. On comprend dès lors que plus la taille de l'état *Chat de Schrödinger* est grande, meilleure sera la sensibilité absolue de la méthode présentée.

IV.1.2.c Choix d'un état auxiliaire

La génération de telles superpositions mésoscopiques d'états permet donc en théorie d'atteindre la limite de Heisenberg et ouvre la voie à une électrométrie quantique de très haute précision grâce à un unique atome de Rydberg, dont l'état est celui d'un grand moment cinétique $j = (n-1)/2$. Il reste cependant à identifier cet état auxiliaire $|Aux\rangle$, qui constitue une des deux composantes de la superposition. Nous avons fait deux hypothèses sur l'état auxiliaire dans notre proposition théorique. La première est d'être de même énergie que l'état $|j, +j\rangle$ (*critère de même énergie*) ; la seconde est d'être « insensible » aux rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 (*critère d'insensibilité*). Ces deux critères ont pour but de faire de l'état auxiliaire $|Aux\rangle$ une bonne référence de phase permettant en pratique de mesurer la phase quantique globale χ .

En réalité, le critère de même énergie peut être rendu moins strict. Il est juste nécessaire que l'état $|Aux\rangle$ ait le même comportement vis-à-vis d'une variation du champ électrique que l'état $|j, +j\rangle$. Il est important de rappeler que le niveau $|j, +j\rangle$, qui correspond à l'état circulaire $|50c\rangle$ n'est pas affecté par l'effet Stark linéaire. Cette propriété est vraie pour tous les états de Rydberg circulaires qui ne sont sensibles qu'à l'effet Stark quadratique. Ainsi, le niveau circulaire $|51c\rangle$ de la multiplicité $n_e = 51$ se comporte au premier ordre comme l'état $|50c\rangle$ de la multiplicité $n_g = 50$. La différence d'énergie qui sépare ces deux niveaux ne dépend pas au premier ordre du champ électrique et sera donc simplement à l'origine d'un *offset* de phase¹. Le niveau $|51c\rangle$ sera déphasé de la même quantité que le niveau $|50c\rangle \equiv |j, +j\rangle$ pour une variation de champ électrique δF_{st} donnée.

Si le niveau $|51c\rangle$ constitue un bon candidat en tant que niveau auxiliaire, est-il véritablement non affecté par les rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 ? Le champ radiofréquence qui engendre ces rotations est résonant avec les transitions d'échelle de la multiplicité $n_g = 50$, ce qui

1. Si l'on prend en compte les déplacements Stark quadratiques de ces niveaux, on vérifiera que l'effet Stark quadratique différentiel des niveaux $|50c\rangle$ et $|51c\rangle$, qui dépend donc linéairement du champ électrique, est négligeable devant l'effet Stark linéaire entre deux niveaux d'une même échelle de spin.

engendre la rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1 \equiv \hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$. Le couplage d'un atome dans l'état $|51c\rangle$, qui est aussi l'état d'un moment cinétique noté $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$, va de même déclencher sa rotation. Cependant, la fréquence des transitions d'échelle dépendant du nombre quantique principal, le champ radiofréquence ne sera pas résonant avec les transitions de l'échelle de spin de la multiplicité $n_e = 51$. Ainsi, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ tourne autour du vecteur rotation $\mathbf{\Omega}_{50} = (\Omega_{RF}^{\sigma+}, 0, \delta_{n_g} = 0) = \Omega_{RF}^{\sigma+} \mathbf{e}_x$ alors que $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ précesse autour de $\mathbf{\Omega}_{51} = (\Omega_{RF}^{\sigma+}, 0, \delta_{n_e})$ où $\delta_{n_e} = \omega_{at}^{(n_e)} - \omega_{RF}$.

La Figure IV.4 représente schématiquement l'évolution de ces deux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ soumis au même champ radiofréquence résonant avec les transitions d'échelle de la multiplicité $n_g = 50$. Il faut remarquer que ces deux moments cinétiques ne sont pas de même taille : $j = 24,5$ pour $n_g = 50$ et $j' = 25$ pour $n_e = 51$. Le nombre de niveaux Stark des deux échelles de spin diffère donc d'une unité et ce sont en toute rigueur sur des sphères de Bloch généralisées différentes² \mathcal{B}_{50} et \mathcal{B}_{51} que l'on représentera leurs évolutions. Pour un désaccord grand devant la pulsation de Rabi du champ radiofréquence

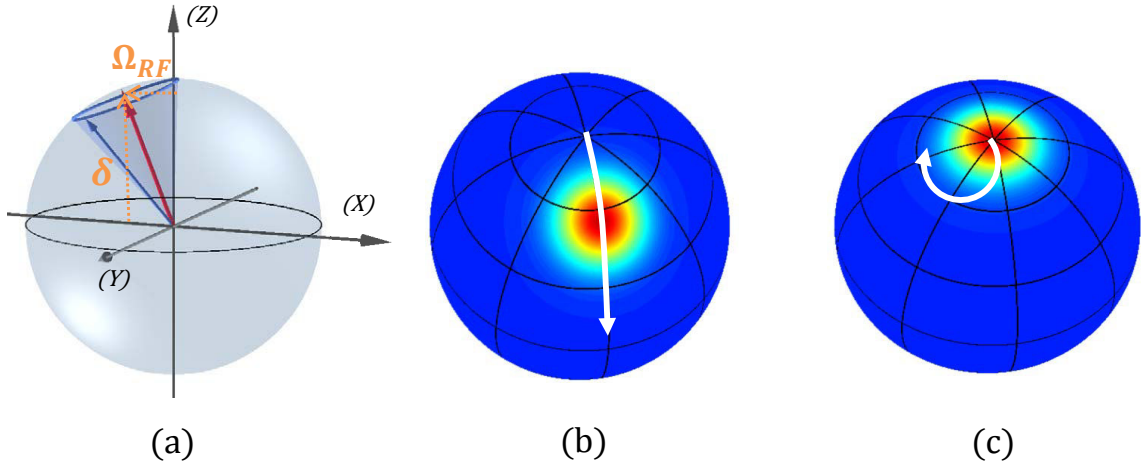


FIGURE IV.4 – Évolution des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$. (a) Orientation du vecteur rotation $\mathbf{\Omega} = (\Omega_{RF}^{\sigma+}, 0, \delta_n)$ et précession du moment cinétique. (b) Évolution du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur \mathcal{B}_{50} . Le couplage résonant du champ radiofréquence avec l'atome initialement dans l'état $|50c\rangle = |j, +j\rangle$ engendre la rotation du moment cinétique autour d'un axe de rotation $\mathbf{\Omega}_{50} = \Omega_{RF}^{\sigma+} \mathbf{e}_x$ contenu dans le plan équatorial. (c) Évolution du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ sur \mathcal{B}_{51} . Le couplage non résonant du champ radiofréquence avec l'atome initialement dans l'état $|51c\rangle = |j', +j'\rangle$ engendre la précession du moment cinétique autour de l'axe de rotation $\mathbf{\Omega}_{51} = (\Omega_{RF}^{\sigma+}, 0, \delta_{n_e})$ hors du plan équatorial.

$\delta_{n_e} \gg \Omega_{RF}^{\sigma+}$, l'axe de rotation est aligné avec (Oz) : $\mathbf{\Omega}_{51} \sim \delta_{n_e} \mathbf{e}_z$. Le niveau auxiliaire $|51c\rangle$ habillé n'accumule donc aucune phase (de même que le niveau $|50c\rangle$ habillé) et demeure au pôle Nord de la sphère de Bloch \mathcal{B}_{51} lors des rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . On peut

2. La légère différence entre les rayons de ces deux sphères sera invisible à l'œil nu.

néanmoins écrire le désaccord comme suit :

$$\delta_{n_e} = \omega_{at}^{(n_e)} - \omega_{RF} \approx \frac{n_e}{n_g} \omega_{at}^{(n_g)} - \omega_{RF} = \frac{\omega_{at}^{(n_g)}}{n_g} + \delta_{n_g} = \frac{\omega_{at}^{(n_g)}}{n_g} , \quad (\text{IV.42})$$

car, par choix, $\delta_{n_g} = 0$. La valeur du désaccord entre le champ radiofréquence et les transitions Stark de la multiplicité n_e ne peut donc être arbitrairement grande, ni la pulsation de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma+}$ arbitrairement petite, sinon la rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ serait infiniment lente et il ne serait d'ailleurs plus légitime de négliger l'effet Stark quadratique. En pratique, on désire même que la fréquence de Rabi de la RF soit grande devant l'effet Stark quadratique du niveau le plus affecté :

$$\left[W_{\text{Stark}}^{(2)}(n_1 = 0, \max_{\mathcal{C}}(k)) \right]^2 < \left[\hbar \Omega_{RF}^{\sigma+} \right]^2 \ll \left[\hbar \delta_{n_e} \right]^2 . \quad (\text{IV.43})$$

Ainsi, les rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 engendrent inévitablement la précession du niveau $|51c\rangle = |j', +j'\rangle$ et donc l'accumulation d'une certaine phase dans cette branche de l'interféromètre³. Néanmoins, en choisissant une impulsion dont la durée est un multiple de la période de cette précession $t_c = 2\pi / \sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma+})^2 + \delta_{n_e}^2} \approx 2\pi / \delta_{n_e}$, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ sera de nouveau dans l'état $|j', +j'\rangle$ à l'issue de chacune des deux impulsions RF. La phase accumulée lors de ce nombre entier de rotations est très peu sensible au champ électrique, l'état demeurant proche du pôle Nord de la sphère \mathcal{B}_{51} . Une variation δF_{st} engendrera donc un déphasage négligeable.

IV.1.2.d Synthèse de la mise en œuvre expérimentale

Nous résumons ici l'ensemble de la séquence décrite plus haut et représentée schématiquement à la Figure IV.5. Dans la partie haute est représentée la séquence temporelle expérimentale le long d'un axe des temps, ainsi que l'état de l'atome à certains instants particuliers (pointillés verticaux gris) de la séquence. Initialement dans l'état de Rydberg circulaire $|50c\rangle = |j, +j\rangle$, l'atome est préparé par une impulsion $\pi/2$ micro-onde dans une superposition d'états dont les composantes évoluent par la suite dans deux multiplicités distinctes. Les dynamiques des moments cinétiques dans ces deux multiplicités soumis à une même séquence $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_1, \text{attente durant } t_0, \mathcal{R}_2\}$ sont bien différentes. La phase relative accumulée entre les deux bras de cette structure interférométrique est mesurée *in fine* par la recombinaison des niveaux circulaires sous l'effet d'une seconde impulsion $\pi/2$ dont la phase ϕ_{MW} est variable.

3. A cet égard, le choix de l'état $|52c\rangle$ comme état auxiliaire aurait augmenté ce désaccord d'un facteur deux et l'axe de rotation eût été plus proche de l'axe (Oz). La nécessité de disposer d'une multiplicité vierge de toute population afin de mesurer proprement les probabilités d'occupation et des considérations sur le recouvrement des pics de détection nous ont cependant fait préférer initialement l'état $|51c\rangle$ comme état auxiliaire.

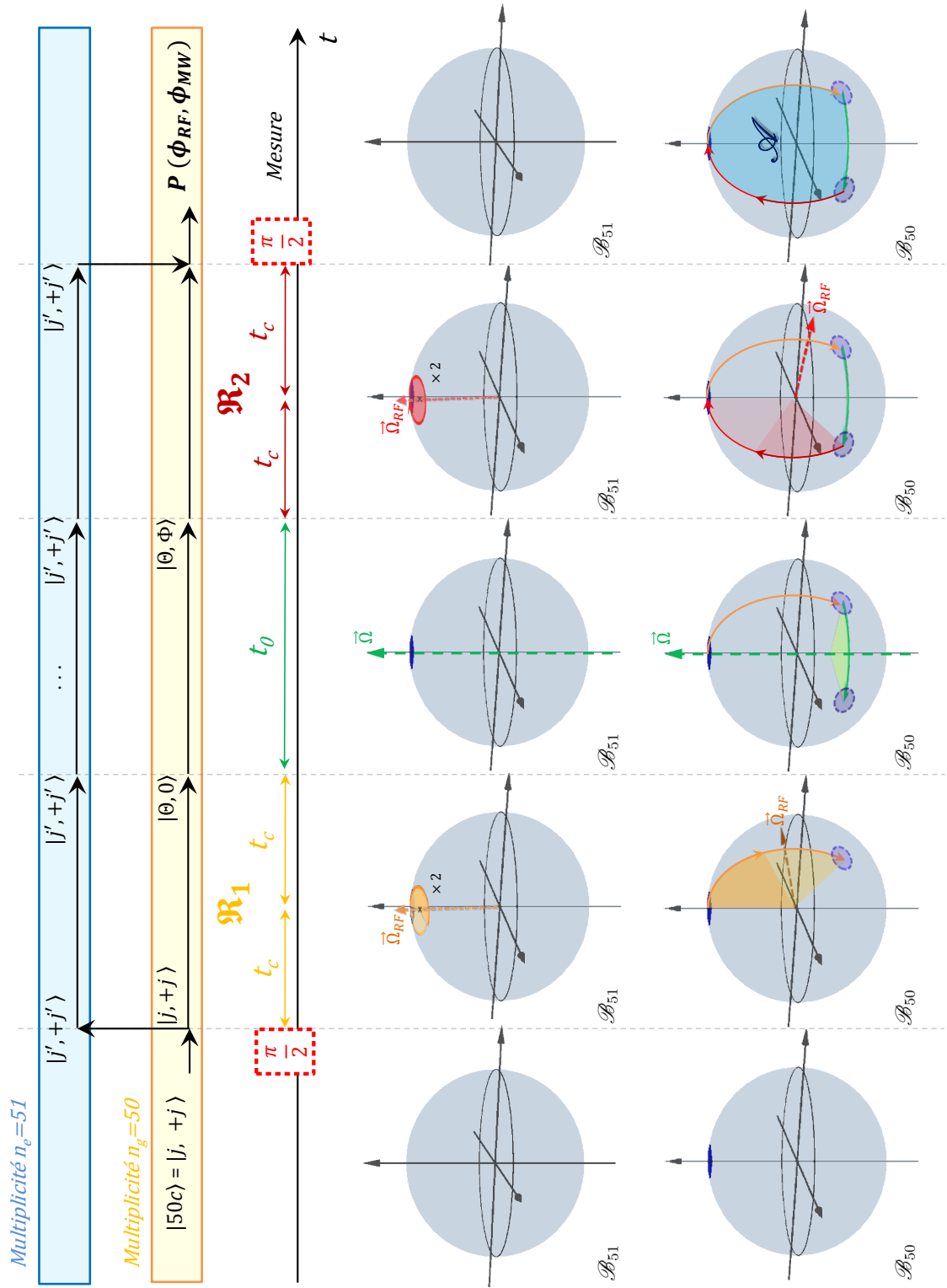


FIGURE IV.5 – Représentation graphique de la méthode de métrologie quantique. **(En haut)** Séquence expérimentale représentant le long d'un axe des temps les différentes phases de la méthode ainsi qu'en chapeau l'état de l'atome au sein des deux multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$. **(En bas)** Représentation de l'évolution des moments cinétiques $\hat{J}_1^{(50)}$ et $\hat{J}_1^{(51)}$ sur les sphères de Bloch généralisées \mathcal{B}_{50} et \mathcal{B}_{51} durant les cinq étapes clés de la méthode.

Dans la partie basse de la Figure IV.5, on représente sur les deux sphères de Bloch généralisées \mathcal{B}_{50} et \mathcal{B}_{51} l'évolution respective des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$. Lors de la première phase, l'état de l'atome est celui du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ dans l'état maximal de spin; la multiplicité $n_e = 51$ est vide de toute population. La première impulsion $\pi/2$ prépare une superposition quantique de deux moments cinétiques de tailles différentes. Cette superposition est soumise dans une deuxième phase à une impulsion radiofréquence de durée $2 \times t_c$ durant laquelle la composante $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$, couplée de manière non résonante avec le champ radiofréquence, précède de précisément deux tours près du pôle Nord de la sphère \mathcal{B}_{51} . Simultanément, la composante $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$, couplée au champ radiofréquence de manière résonante, initie une rotation autour de l'axe de rotation $\Omega_{50} = \Omega_{RF}^+ \mathbf{e}_x$. A l'issue de cette phase de rotation \mathcal{R}_1 , la composante $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ est de nouveau dans l'état $|51c\rangle = |j', +j'\rangle$, tandis que l'autre composante a exploré l'hémisphère sud de la sphère \mathcal{B}_{50} et se trouve dans un état cohérent de spin $|\Theta, 0\rangle$. Les deux moments cinétiques évoluent ensuite librement durant la troisième phase de durée t_0 , puis sont de nouveau soumis à une impulsion radiofréquence de durée $2 \times t_c$ dont la phase est choisie de sorte à maximiser le recouvrement de l'état tourné $|\Theta, \Phi\rangle$ avec l'état $|j, +j\rangle$. A la fin de cette quatrième phase, les deux composantes de la superposition d'états ont repeuplé les états circulaires des deux multiplicités et sont recombinaées par une seconde impulsion micro-onde $\pi/2$ de phase ϕ_{MW} variable.

On peut alors rejouer cette séquence (avec la même phase ϕ_{RF}) pour un champ électrique ayant varié de δF_{st} . Le déphasage des franges d'interférence, obtenues en mesurant la probabilité d'occupation du niveau $|50c\rangle$ en fonction de la phase ϕ_{MW} de la seconde impulsion $\pi/2$, est alors proportionnelle à l'aire du triangle isocèle sphérique de sommets associés aux états $|j, +j\rangle$, $|\Theta, \Phi\rangle$ et $|\Theta, \Phi + \delta\Phi\rangle$, dont la base est de longueur $\hbar j \times \delta\Phi = \hbar j \times \delta\omega_{at} t_0$ (voir aire hachurée Figure IV.2 (c)).

IV.1.3 Lien entre signal interférométrique et fonction de Wigner

L'objet de cette section est de démontrer l'équivalence entre la méthode de métrologie proposée à la fin du chapitre III, utilisant une coupe perpendiculaire des franges de la fonction de Wigner comme signal interférométrique, et la méthode que nous venons de décrire, synthétisée à la Figure IV.5. Il convient cependant de proposer une séquence de métrologie alternative, où la superposition d'états possède deux composantes dans la même multiplicité, et non pas dans les deux multiplicités $n = 50$ et 51 . Dans cet esprit, on propose la séquence représentée à la Figure IV.6, équivalente à la séquence présentée précédemment à la Figure IV.3, où la population du niveau auxiliaire $|Aux\rangle \equiv |51c\rangle$ est cette fois-ci intégralement transférée par une impulsion micro-onde π résonante avec la transition intercirculaires $|51c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ dans la multiplicité $n_g = 50$ à l'issue de la rotation \mathcal{R}_1 .

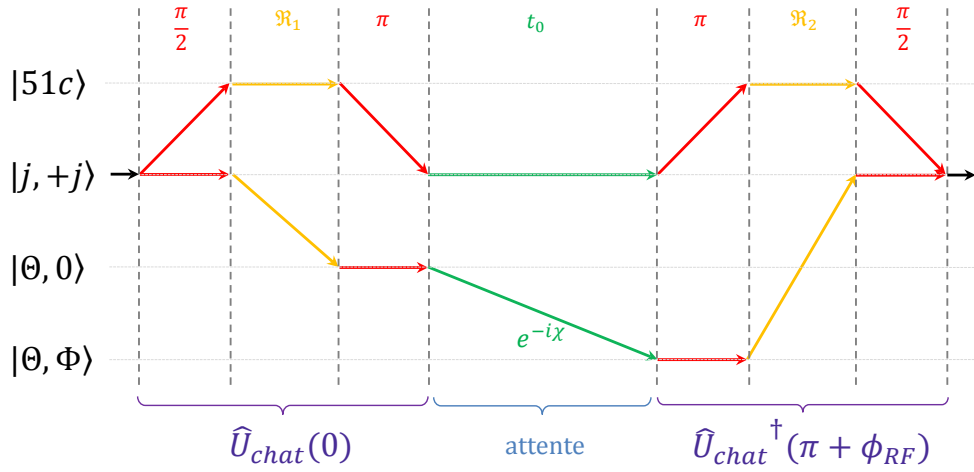


FIGURE IV.6 – Séquence alternative de métrologie quantique. L'état du moment cinétique se lit verticalement, où quatre états particuliers ont été listés : $|51c\rangle$, $|j, +j\rangle$, $|\Theta, 0\rangle$ et $|\Theta, \Phi\rangle$. Les différentes étapes de la séquences sont décrites de la gauche vers la droite. Partant initialement de l'état $|j, +j\rangle$, le moment cinétique subit une impulsion $\pi/2$ qui prépare une superposition à poids égaux avec l'état auxiliaire $|51c\rangle$. Cette superposition est ensuite soumise à la rotation \mathcal{R}_1 qui laisse inchangée la composante auxiliaire, puis à une impulsion micro-onde π conduisant à l'état $|\psi_{chat}\rangle$ (IV.46). L'ensemble de ces trois évolutions est décrite par l'opérateur unitaire noté $\hat{U}_{chat}(0)$. Cet état évolue librement durant un temps t_0 puis subit la transformation inverse $\hat{U}_{chat}^\dagger(\pi + \phi_{RF})$, où la phase $\pi + \phi_{RF}$ de la seconde impulsion RF (rotation \mathcal{R}_2) est choisie de sorte à ramener à composante cohérente $|\Theta, \Phi\rangle$ sur l'état initial $|j, +j\rangle$.

La première impulsion Ramsey, la première impulsion radiofréquence ainsi que cette dernière impulsion micro-onde π sont globalement décrites par l'opérateur unitaire $\hat{U}_{chat}(\Phi_{RF} = 0)$. L'état auxiliaire n'est donc ici utilisé que transitoirement et l'on parvient ainsi à générer au sein de la multiplicité $n_g = 50$ la superposition :

$$|\psi_{chat}\rangle = \hat{U}_{chat}(\Phi_{RF} = 0) |50c\rangle \quad (\text{IV.44})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|j, +j\rangle + |\Theta, 0\rangle) \quad (\text{IV.45})$$

A l'issue d'un temps d'attente de durée t_0 , la superposition est soumise à l'opérateur $\hat{U}_{chat}^\dagger(\pi + \Phi_{RF})$, où la phase Φ_{RF} est choisie de sorte que le recouvrement avec l'état initial soit non nul, ce qui permet, par mesure de la probabilité d'occupation du niveau $|j, +j\rangle$, d'obtenir des franges d'interférence. Dans le cas d'une rotation \mathcal{R}_1 générant l'état $|j, -j\rangle$ au pôle Sud de la sphère de Bloch, on produit par cette méthode la superposition de taille maximale :

$$|\psi_{chat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j, +j\rangle + |j, -j\rangle) \quad (\text{IV.46})$$

Comme analysé plus haut, une telle superposition d'états cohérents aux deux pôles de la sphère de Bloch généralisée présente une sensibilité optimale aux variations de champ électrique.

Dans ce manuscrit, nous ne dériverons le calcul prouvant l'équivalence des deux signaux interférométriques que dans ce cas particulier, qui maximise la sensibilité des deux méthodes. Rappelons que la fonction de Wigner associée au moment cinétique décrivant l'état de l'atome est définie en fonction des harmoniques sphériques $Y_{kq}(\Theta, \Phi)$ par [136, 137] :

$$W(\Theta, \Phi) = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^{+k} Y_{kq}(\Theta, \Phi) \rho_{kq} \quad , \quad (\text{IV.47})$$

où les $\rho_{kq} = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{T}_{kq}^\dagger)$ constituent les coefficients du développement multipolaire de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ atomique, qui s'écrit :

$$\hat{\rho} = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^{+k} \rho_{kq} \hat{T}_{kq} \quad , \quad (\text{IV.48})$$

où les opérateurs tensoriels irréductibles \hat{T}_{kq} sont définis par :

$$\hat{T}_{kq} = \sum_{m=-j}^{+j} \sum_{m'=-j}^{+j} (-1)^{j-m} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} j & k & j \\ -m & q & m' \end{pmatrix} |j, m\rangle \langle j, m'| \quad , \quad (\text{IV.49})$$

où $\begin{pmatrix} j & k & j \\ -m & q & m' \end{pmatrix}$ représente le symbole de Wigner $3j$ usuel. On utilisera aussi dans la suite du calcul la notation suivante $T_{kq}^{jmm'} = \langle j, m | \hat{T}_{kq} | j, m' \rangle$.

Pour l'état considéré, la situation se simplifie grandement, car seuls quatre termes $\rho_{mm'} = \langle j, m | \hat{\rho} | j, m' \rangle$ de la matrice densité $\hat{\rho}_{chat} = |\psi_{chat}\rangle \langle \psi_{chat}|$ sont non nuls et valent $\rho_{jj} = \rho_{-j-j} = \rho_{j-j} = \rho_{-jj} = 1/2$. Ceci simplifie l'expression des coefficients du développement multipolaire de $\hat{\rho}_{chat}$:

$$\begin{aligned} \rho_{kq} &= \sum_{m=-j}^{+j} \sum_{m'=-j}^{+j} \rho_{mm'} T_{kq}^{jmm'} \\ &= \rho_{jj} T_{kq}^{jjj} + \rho_{-j-j} T_{kq}^{j-j-j} + \rho_{-jj} T_{kq}^{j-jj} + \rho_{j-j} T_{kq}^{jj-j} \\ &= \frac{1}{2} (T_{kq}^{jjj} + T_{kq}^{j-j-j} + T_{kq}^{j-jj} + T_{kq}^{jj-j}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

On obtient donc :

$$W(\Theta, \Phi) = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^{+k} \frac{1}{2} Y_{kq}(\Theta, \Phi) \left(T_{kq}^{jjj} + T_{kq}^{j-j-j} + T_{kq}^{j-jj} + T_{kq}^{jj-j} \right) \quad . \quad (\text{IV.51})$$

On utilise alors les règles de sélection des symboles Wigner $3j$ afin de simplifier et d'identifier ces quatre termes :

- Le premier terme $\boxed{T_{kq}^{jjj}} : \begin{pmatrix} j & k & j \\ -j & q & j \end{pmatrix}$ est non nul si et seulement si $q = 0$ et on reconnaît alors directement dans le développement de $W(\Theta, \Phi)$ que le terme associé

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2j} Y_{k0}(\Theta, \Phi) \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} j & k & j \\ -j & 0 & j \end{pmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

correspond à la distribution de Wigner de l'état de Dicke $|j, +j\rangle$, soit la composante de la superposition pointant au pôle Nord de la sphère de Bloch [217] ;

- De même, le deuxième terme $\boxed{T_{kq}^{j-j-j}}$ contribue dans le développement de $W(\Theta, \Phi)$ à former la distribution de Wigner de l'état de Dicke $|j, -j\rangle$, soit la composante de la superposition pointant au pôle Sud de la sphère de Bloch ;

- Les deux derniers termes $\boxed{T_{kq}^{j-jj}}$ et $\boxed{T_{kq}^{jj-j}}$ correspondent donc à la figure d'interférence entre les deux états cohérents de spin précédemment identifiés. On note cette contribution à la distribution de Wigner $W_{\text{franges}}(\Theta, \Phi)$. Les règles de sélection imposent pour ces termes restants que $q = -2j$ pour le premier et $q = 2j$ pour le second. Par ailleurs, les inégalités $|q| \leq k$ et $0 \leq k \leq 2j$ (condition triangulaire) imposent $k = 2j$. Cela dit, une propriété de symétrie permet de mettre en facteur le symbole de Wigner $3j$ et ainsi :

$$W_{\text{franges}}(\Theta, \Phi) = \frac{1}{2} \left(Y_{2j, -2j}(\Theta, \Phi) T_{2j, -2j}^{j-jj} + Y_{2j, 2j}(\Theta, \Phi) T_{2j, j}^{jj-j} \right) \quad (\text{IV.53})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4j+1} \begin{pmatrix} j & 2j & j \\ j & -2j & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & 2j \\ j & j & -2j \end{pmatrix} \left((-1)^{2j} Y_{2j, 2j}(\Theta, \Phi) + Y_{2j, 2j}(\Theta, \Phi) \right). \quad (\text{IV.54})$$

Or, le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle j, j, j, j | 2j, -2j \rangle$ étant égal à l'unité, on calcule alors :

$$\begin{pmatrix} j & 2j & j \\ j & -2j & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & j & 2j \\ j & j & -2j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{4j+1}}. \quad (\text{IV.55})$$

Ainsi,

$$W_{\text{franges}}(\Theta, \Phi) = \frac{1}{2} \left(Y_{2j, -2j}(\Theta, \Phi) + (-1)^{2j} Y_{2j, 2j}(\Theta, \Phi) \right). \quad (\text{IV.56})$$

Or $Y_{l,-m} = (-1)^{-m} Y_{l,m}^*$ et donc

$$W_{\text{franges}}(\Theta, \Phi) = \frac{1}{2}(-1)^{2j} \left(Y_{2j,2j}(\Theta, \Phi) + Y_{2j,2j}^*(\Theta, \Phi) \right) . \quad (\text{IV.57})$$

En utilisant l'expression des harmoniques sphériques en fonction des polynômes de Legendre associés P_j^m , on obtient :

$$W_{\text{franges}}(\Theta, \Phi) = \left[\frac{4j+1}{4\pi} \frac{1}{4j!} \right]^{1/2} P_{2j}^{2j}(\cos \Theta) \cos(2j\Phi) . \quad (\text{IV.58})$$

Finalement, on peut montrer que :

$$P_{2j}^{2j}(\cos \Theta) = \frac{(-1)^{2j} (4j)!}{4^j (2j)!} \sin^{2j} \Theta , \quad (\text{IV.59})$$

et on aboutit à l'expression finale des franges de la fonction de Wigner :

$$W_{\text{franges}}(\Theta, \Phi) = (-1)^{2j} A \sin^{2j} \Theta \cos(2j\Phi) , \quad (\text{IV.60})$$

avec $A = \sqrt{(4j)!(4j+1)/(4\pi)}/[4^j(2j)!] > 0$ qui correspond à l'amplitude maximale des oscillations.

Une variation $\delta\omega_{at}$ de la fréquence du moment cinétique pendant un temps t_0 induit une rotation des franges d'angle $\delta\omega_{at} t_0$, on peut donc écrire que :

$$W_{\text{franges}}(t_0, \Theta, \Phi) = (-1)^{2j} A \sin^{2j} \Theta \cos(2j(\Phi - \delta\omega_{at} t_0)) . \quad (\text{IV.61})$$

L'amplitude de oscillations de $W_{\text{franges}}(t_0, \Theta, \Phi)$ en fonction de t_0 est bien maximale pour une colatitude $\Theta_0 = \pi/2$ ie sur l'équateur de la sphère de Bloch généralisée (Figure IV.7 (a)).

Comparons ce résultat au signal interférométrique obtenu précédemment par mesure de la phase χ (IV.26) avec $\Theta = \pi$. Pour cette valeur de Θ , l'expression de χ se simplifie :

$$\chi = 2j(\omega_{at} t_0 - \phi_{\text{RF}}) . \quad (\text{IV.62})$$

Dans ce cas particulier d'une rotation \mathcal{R}_1 amenant la composante $|j, +j\rangle$ au pôle Sud de la sphère de Bloch, la seconde rotation \mathcal{R}_1 conduira à un recouvrement égal à l'unité quelque soit la phase $\pi + \phi_{\text{RF}}$ de l'impulsion radiofréquence. Ainsi, pour toute valeur de ϕ_{RF} , la mesure de la probabilité $P_{\Theta=\pi, t_0}(\phi_{\text{RF}}, \phi_{\text{MW}})$ de retrouver le moment cinétique dans l'état $|j, +j\rangle$ oscille autour de 1/2, avec une amplitude unité, en $\cos(2j(\omega_{at} t_0 - \phi_{\text{RF}}) - \phi_{\text{MW}})$. Notre méthode permet donc d'obtenir un signal présentant une même sensibilité en phase qu'une coupe de la fonction de Wigner de l'état $|\psi_{\text{chat}}\rangle$. De plus, on remarque

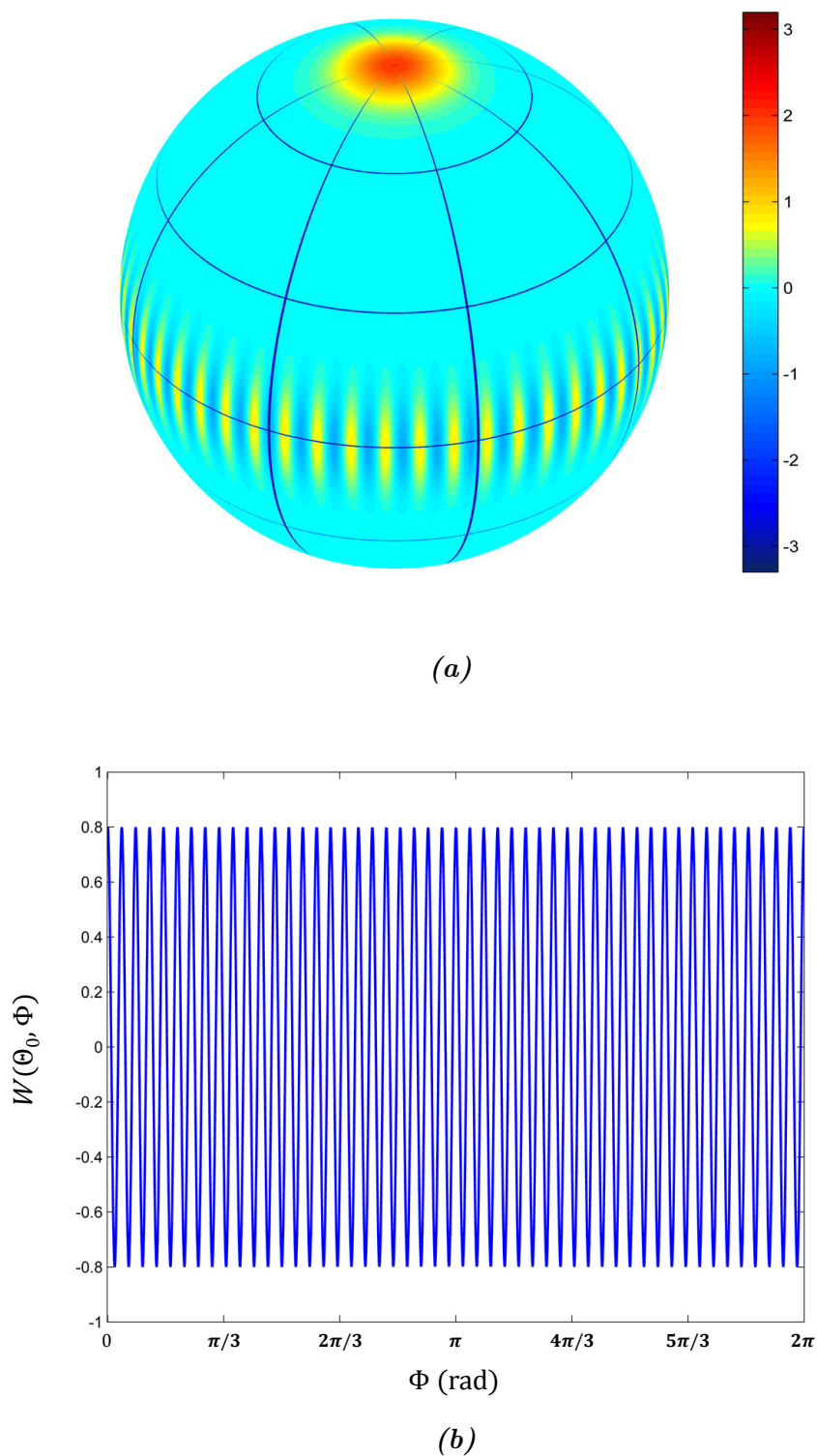


FIGURE IV.7 – Fonction de Wigner de l'état $|\psi_{\text{chat}}\rangle$, état Chat de Schrödinger de taille maximale pour un moment cinétique $j = 25$. **(a)** Fonction de Wigner de l'état $|\psi_{\text{chat}}\rangle$ (IV.46), représentée sur la sphère de Bloch généralisée associée. **(b)** Coupe de cette fonction de Wigner $W(\Theta = \frac{\pi}{2}, \Phi)$ sur toute la longueur de l'équateur ($\Phi \in [0, 2\pi[$).

que l'amplitude $A = 0,8$ pour $j = (n_e - 1)/2 = 25$ de ces franges de la fonction de Wigner (Figure IV.7 (b)) est notablement inférieure à la hauteur de la fonction de Wigner de l'état $|j, +j\rangle$ qui vaut 3,99. Ainsi, la coupe de la fonction de Wigner par mesure des probabilités d'occupation sera de contraste inférieur à celui du signal d'interférence obtenu par notre méthode de métrologie quantique, qui ne nécessite en outre que la mesure de la population du seul niveau $|j, +j\rangle$.

IV.2 Choix d'un champ électrique de travail

Afin de mettre en œuvre la méthode de métrologie quantique que nous venons de décrire, le choix du champ électrique statique qui va déterminer la morphologie des échelles de spin associées aux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ est essentiel. Ce choix et sa justification feront donc l'objet de cette partie.

IV.2.1 Position du problème

Par effet Stark linéaire, qui dépend du nombre quantique principal n , le champ électrique statique F_{st} va déterminer la valeur des transitions d'échelle des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$. Par ailleurs, la condition de résonance imposée entre le champ radiofréquence et les transitions d'échelle du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ ($\delta_{n_g} = \omega_{at}^{(n_g)} - \omega_{RF} = 0$) conduit à un désaccord $\delta_{n_e} = \omega_{at}^{(n_e)} - \omega_{RF}$ tel que (IV.42) :

$$\delta_{n_e} = \frac{\omega_{at}^{(n_g)}}{n_g} = -\frac{3}{2}q \frac{a_0}{\hbar} F_{st} \quad , \quad (\text{IV.63})$$

qui augmente linéairement avec le champ électrique statique. Ce désaccord a une conséquence directe sur la précession du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ sur la sphère \mathcal{B}_{51} et donc sur la phase relative mesurée sur le signal interférométrique final. Ainsi, plus le champ électrique est élevé, plus l'on peut manipuler indépendamment les deux moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$. La phase accumulée dans la branche $n_e = 51$ de l'interféromètre sera d'autant plus faible et la sensibilité de la méthode n'en sera que meilleure.

Néanmoins, à champ électrique élevé, l'effet Stark quadratique n'est plus négligeable. En dégradant l'harmonicité de l'échelle de spin $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$, cet effet quadratique altère la condition de résonance des transitions d'échelle avec le champ radiofréquence à mesure que le moment cinétique descend l'échelle des niveaux Stark, ce qui modifie notablement la trajectoire de ce moment cinétique sur la sphère \mathcal{B}_{50} . La Figure IV.8 représente la trajectoire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur la sphère \mathcal{B}_{50} durant les trois phases majeures de la séquence expérimentale de métrologie $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_1, \text{attente durant } t_0, \mathcal{R}_2\}$. Durant cette

séquence, l'autre composante de la superposition évolue dans la sphère de Bloch \mathcal{B}_{51} . La trajectoire de cette dernière composante, localisée très au nord de la sphère, n'est pas affectée par l'effet Stark quadratique. Les trajectoires rouge et verte correspondent à deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ tel que $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$ et $\delta F_{st} = 1,7 \text{ mV/cm}$. La légère différence des aires entourées se traduit par un déphasage des franges d'interférence qui nous permettra de mesurer cette variation δF_{st} du champ électrique statique.

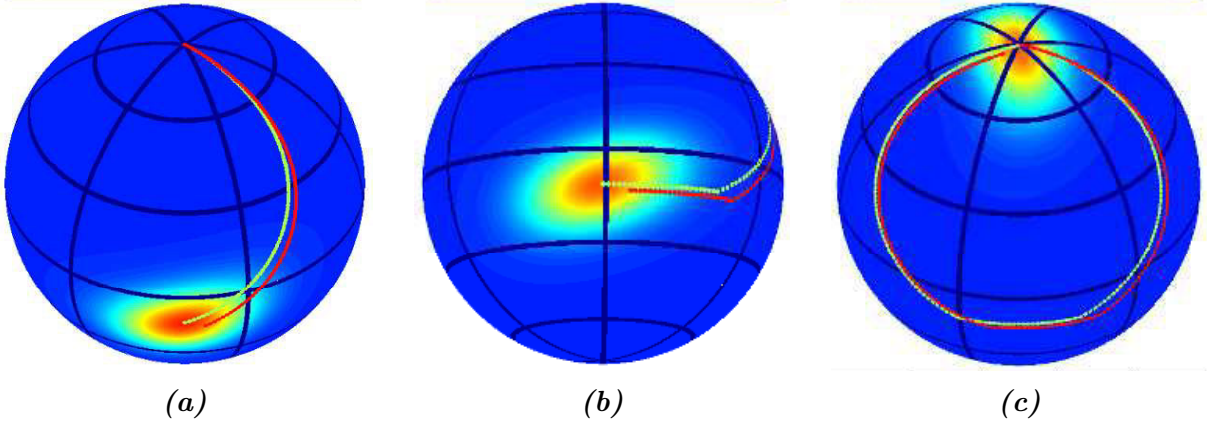


FIGURE IV.8 – Influence de l'effet Stark quadratique sur la dynamique du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} durant les trois phases majeures de la séquence expérimentale de métrologie $\mathcal{S} = \{\mathcal{R}_1, \text{attente durant } t_0, \mathcal{R}_2\}$ représentée respectivement en (a), (b) et (c). Les trajectoires rouge et verte correspondent à deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ tel que $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$ et $\delta F_{st} = 1,7 \text{ mV/cm}$. Le champ radiofréquence à 530 MHz est à résonance avec la première transition d'échelle pour le champ F_{st} . Les impulsions radiofréquences sont de durée $\tau = 2 \times t_c$ avec $\Omega_{RF}^{\sigma+} = 1,6 \text{ MHz}$.

En présence de l'effet Stark quadratique, le désaccord dépend alors de la position de la composante cohérente sur la sphère de Bloch : $\delta_{n_g} = \delta_{n_g}(k)$. Le moment cinétique précesse donc autour d'un axe de rotation qui sort progressivement du plan équatorial. La trajectoire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$, qui débute le long d'un méridien ($\Phi = \text{Cste}$), devient ensuite courbe. Ceci a une conséquence importante : si l'amplitude de la radiofréquence n'est pas suffisante, il sera impossible d'atteindre le pôle Sud de la sphère de Bloch, comme nous l'avions déjà observé au chapitre I à la Figure I.18 page 76. Par ailleurs, comme nous le constaterons un peu plus loin de manière quantitative, l'effet Stark quadratique fait qu'une variation de champ électrique δF_{st} engendrera une variation $\delta\chi$ légèrement inférieure au cas linéaire, ce qui réduit quelque peu la sensibilité de la méthode.

Il existe donc un véritable compromis à faire. Un champ électrique élevé permet de confiner la précession du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ près du pôle Nord de \mathcal{B}_{51} et de faire de cette composante une véritable référence de phase, mais en contrepartie, à puissance RF donnée, ceci limite la taille de la superposition d'états pouvant être générée et déforme par ailleurs progressivement l'état cohérent lors de son parcours sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} (voir Figure IV.8), ce qui réduit *in fine* le contraste des franges $|\langle j, +j | \psi_f \rangle|$. En pratique, un dernier facteur rentre en jeu dans le choix du champ électrostatique F_{st} lié à des

imperfections expérimentales : les inhomogénéités de champ électrique. Au chapitre II, nous avons vu que les inhomogénéités de champ électrique sont principalement transverses. Par effet d'homodynage des inhomogénéités transverses, une augmentation du champ électrique directeur vertical F_{st} va réduire relativement ces inhomogénéités et donner lieu à un meilleur temps de cohérence. C'est cette étude de la décohérence en fonction du champ électrique que nous commencerons par présenter dans cette partie. L'existence de résonances du champ radiofréquence au sein du cryostat nous guidera finalement vers un champ électrique de travail définitif pour toutes les expériences de métrologie.

IV.2.2 Étude de la décohérence par interférométrie Ramsey

La sensibilité de notre méthode dépend du facteur $(\partial\omega_{at}/\partial F_{st})^{-1}$ qui fait le lien entre le champ électrique et la pulsation atomique. Si l'on ne considère que l'effet Stark linéaire, on obtient que :

$$\frac{\partial\omega_{at}}{\partial F_{st}} = -\frac{3}{2}qn\frac{a_0}{\hbar} \quad . \quad (\text{IV.64})$$

Cette sensibilité qui se rapporte à une transition d'échelle constitue une unité élémentaire de sensibilité au champ électrique, identique à celle d'une superposition quantique de l'état circulaire d'une multiplicité n donnée et du premier état elliptique. Pour générer une telle superposition sensible aux inhomogénéités de champ électrique, il est possible de coupler, sous la forme d'une impulsion de très courte durée, l'atome initialement dans l'état circulaire $|51c\rangle$ à un champ radiofréquence. Ceci va avoir pour effet de peupler légèrement le premier niveau elliptique voisin et ainsi de préparer une superposition d'états :

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{1 - \varepsilon^2} |51c\rangle + \varepsilon |51, k = 1\rangle \quad , \quad (\text{IV.65})$$

où $\varepsilon \ll 1$. Une telle superposition de deux états de Dicke voisins n'est pas sensible aux effets non linéaires (effet Stark quadratique) qui auraient affecté un champ cohérent peuplant de multiples niveaux k . Dans la suite, nous allons donc présenter la mesure du temps de cohérence de cette superposition par interférométrie Ramsey.

Remarque : Si une telle superposition est à la fois sensible aux inhomogénéités de champs électrique et magnétique, nous négligerons les inhomogénéités de champ magnétique et nous n'étudierons dans cette partie que l'effet de la valeur du champ électrique statique directeur sur la cohérence de cette superposition.

IV.2.2.a Méthode d'interférométrie Ramsey

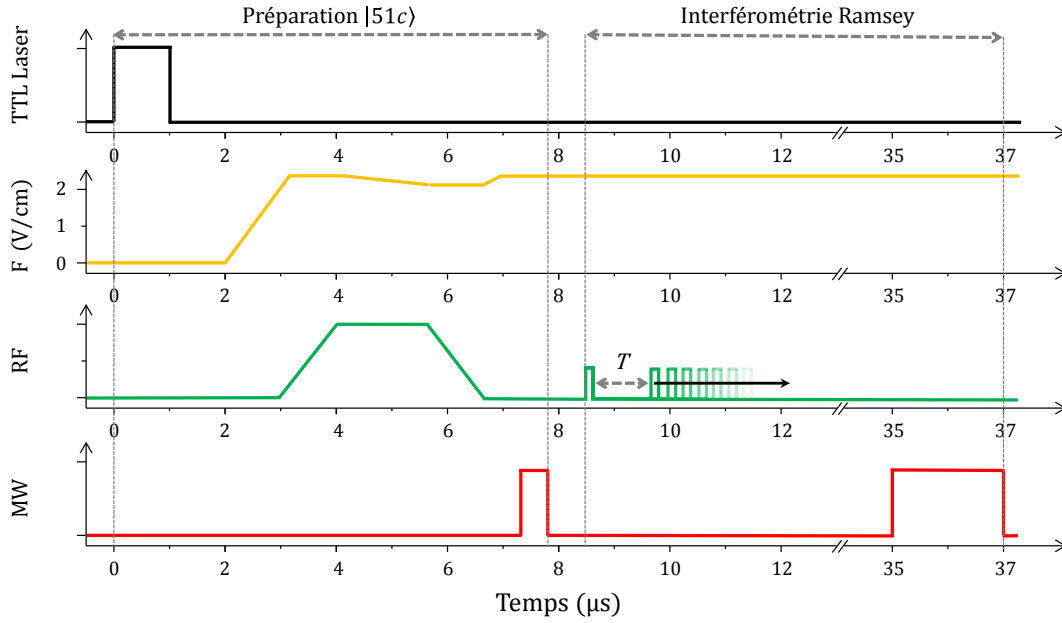
Afin de préparer une telle superposition, il suffit à partir d'un moment cinétique dans l'état $|51c\rangle = |j', +j'\rangle$ d'induire une rotation infinitésimale sous l'effet d'une impulsion radiofréquence de très courte durée et d'amplitude suffisamment faible. Si la transition atomique est de plus désaccordée avec le champ radiofréquence, on s'assure du fait que cette rotation est très petite. La population du deuxième niveau elliptique $|51, k = 2\rangle$ est alors négligeable.

La méthode d'interférométrie Ramsey consiste à générer cette superposition par une première impulsion de durée $t_1 = 60$ ns, le champ radiofréquence à 230 MHz étant désaccordé de $\delta = \omega_{at} - \omega_{RF} = 2\pi \times 2$ MHz avec la transition atomique quand $F_{st} = 2,37$ V/cm. On laisse ensuite évoluer librement cette superposition durant un temps T , avant d'appliquer une seconde impulsion radiofréquence identique à la première. On mesure finalement la probabilité d'occupation du niveau initial circulaire $P_{|51c\rangle}(T)$ en fonction du temps T . La Figure IV.9 (a) résume la séquence expérimentale de la méthode d'interférométrie Ramsey, précédée par une phase de préparation des atomes de Rydberg circulaires $|51c\rangle$ déjà présentée au chapitre II.

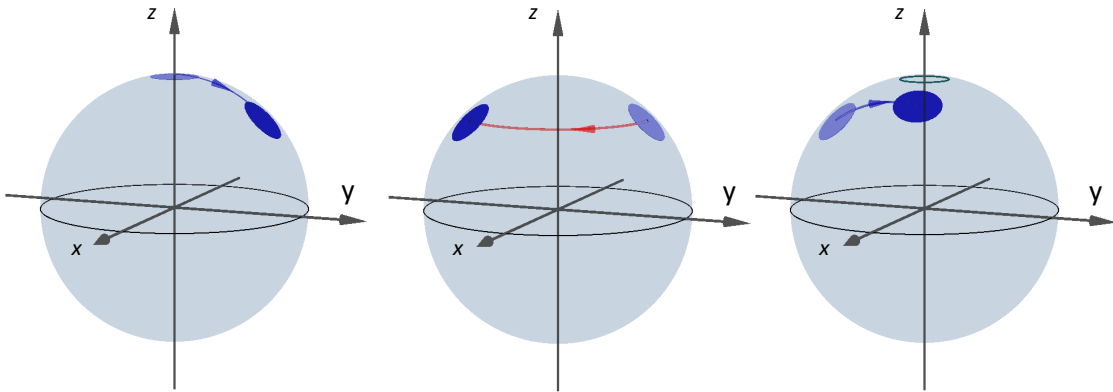
Par ailleurs, il est aisé de se représenter la méthode d'interférométrie Ramsey sur la sphère de Bloch généralisée, dans le référentiel tournant à la fréquence du champ RF $\omega_{RF}/2\pi$ (Figure IV.9 (b)). Partant d'un état cohérent au pôle Nord, la première impulsion génère un état cohérent très légèrement déplacé du pôle Nord, par une rotation infinitésimale autour d'un axe incliné de $\arctan(\Omega_{RF}^{\sigma+}/\delta) = 9,6^\circ$ par rapport à (Oz) , pour $\Omega_{RF}^{\sigma+}/2\pi = 196,1 \pm 2,8$ kHz. Durant le temps d'attente T , le désaccord entre la transition atomique $|51c\rangle \rightarrow |51, k = 1\rangle$ et la radiofréquence engendre une rotation de l'état autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\delta = \omega_{at} - \omega_{RF}$. La seconde impulsion induit une dernière rotation autour d'un axe pareillement incliné de $9,6^\circ$, et permet par mesure de la population dans l'état circulaire de mesurer le recouvrement avec l'état initial. Par souci de clarté, la Figure IV.9 (b) illustre cette méthode en exagérant très fortement la rotation du moment cinétique sous l'effet des deux impulsions radiofréquences.

IV.2.2.b Mesure du temps de cohérence à $F_{st} = 2,37$ V/cm

La mesure de l'évolution des probabilités $P_{|51c\rangle}(T)$ (points noirs) et $P_{|51,k=1\rangle}(T)$ (points rouges) en fonction du délai T entre les impulsions Ramsey est représentée Figure IV.10. On observe l'oscillation des probabilités d'occupation à la fréquence du désaccord $\delta/2\pi$ choisi. En réalité, la méthode d'interférométrie Ramsey a été historiquement imaginée de réaliser de la spectroscopie de précision. La fréquence des oscillations ainsi mesurée de $2,0416 \pm 0,0022$ MHz nous donne une bien meilleure indication sur la valeur réelle de la fréquence de la transition $|51c\rangle \rightarrow |51, k = 1\rangle$ soit ici 232,042 MHz (la fréquence de la



(a)



(b)

FIGURE IV.9 – Mesure du temps de cohérence d'une superposition d'états par interférométrie Ramsey. **(a)** Séquence expérimentale de l'interférométrie Ramsey. La préparation d'atomes circulaires $|51c\rangle$ s'effectue grâce à une excitation optique, un passage adiabatique, puis une impulsion micro-onde dite de purification. La méthode d'interférométrie Ramsey consiste, à partir de cet état circulaire, à préparer par une première impulsion radiofréquence de durée t_1 la superposition $|\psi_1\rangle = \sqrt{1 - \varepsilon^2} |51c\rangle + \varepsilon |51, k = 1\rangle$, de la laisser évoluer durant un temps T variable, puis d'appliquer une seconde impulsion radiofréquence identique à la première et enfin de mesurer la population de l'état circulaire initial grâce à une impulsion micro-onde de sonde à l'instant $t = 35 \mu\text{s}$. **(b)** Représentation des trois étapes majeures de la méthode d'interférométrie Ramsey sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{51} : première impulsion RF de durée t_1 , évolution libre durant une durée T , seconde impulsion RF identique à la première.

signal RF fourni par la carte PCI étant réglée à 230,00 MHz). D'autre part, les valeurs moyennes de ces deux probabilités⁴ valant respectivement 80,2 % pour le niveau circulaire et 14,7 % pour le premier niveau elliptique, montrent que nous avons véritablement généré une impulsion Ramsey minimale conduisant, dans une bonne approximation, à la superposition $|\psi_1\rangle = \sqrt{1 - \varepsilon^2} |51c\rangle + \varepsilon |51, k = 1\rangle$. A titre de contrôle, les points verts correspondent à la probabilité d'occupation du niveau $|51, n_1 = 1, n_2 = 0\rangle$, c'est-à-dire le niveau elliptique à portée d'une transition σ_- du niveau circulaire. Sa valeur constante nulle est une preuve de la bonne polarisation du champ radiofréquence.

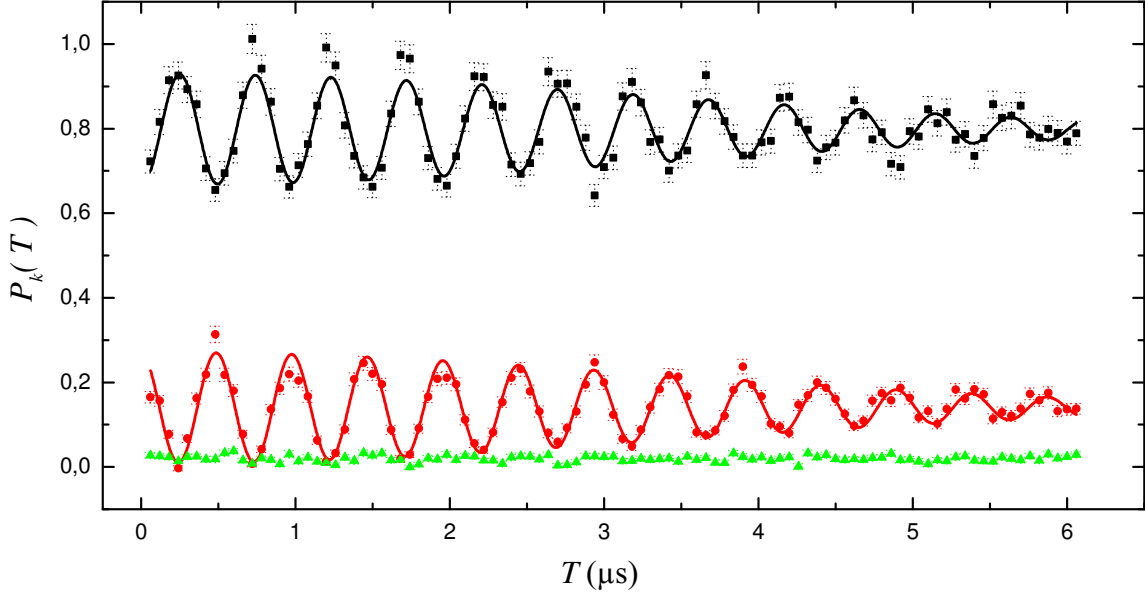


FIGURE IV.10 – *Franges de Ramsey. Probabilités d'occupation en fonction du délai T entre les impulsions Ramsey de l'état circulaire $|51c\rangle$ (courbe noire) et des deux niveaux elliptiques voisins $|51, k = 1\rangle$ (courbe rouge) et $|51, n_1 = 1, n_2 = 0\rangle$ (courbe verte). Les probabilités $P_{51c}(T)$ et $P_{51,k=1}(T)$ oscillent à la fréquence du désaccord entre la fréquence atomique $|51c\rangle \rightarrow |51, k = 1\rangle$ et celle du champ radiofréquence et ont un contraste qui s'atténue avec une enveloppe gaussienne, caractéristique de la décohérence. On mesure un temps d'amortissement des oscillations à $1/e$ de $T_2^* = 4,53 \pm 0,13 \mu\text{s}$.*

Durant le délai T , l'atome se propageant dans la cavité, la superposition est soumise aux inhomogénéités spatiales de champ électrique. Les inhomogénéités sur l'extension spatiale du paquet atomique, du même ordre de grandeur que le déplacement du paquet atomique, sont aussi sondées. Ces inhomogénéités provoquent le brouillage de la phase relative entre les deux composantes de cette superposition d'états, qui se traduit par la diminution progressive de l'amplitude des franges d'interférence Ramsey. Un modèle simple de décohérence induite par gradient de champ électrique conduit à une enveloppe

4. On observe que progressivement l'ajustement devient légèrement en avance de phase, ce qui témoigne d'une légère diminution du désaccord et donc du champ électrique statique. Par ailleurs, l'amplitude de la seconde impulsion augmente légèrement avec la position des atomes dans la cavité, ce qui crée une légère asymétrie entre les deux impulsions radiofréquences. Ainsi, les valeurs stationnaires vers lesquelles tendent les probabilités $P_k(T)$ sont légèrement différentes des valeurs moyennes des premières oscillations.

gaussienne pour le contraste des franges. Utilisant ce modèle comme ajustement (traits pleins noir et rouge Figure IV.10), nous obtenons un temps d'amortissement des oscillations à $1/e$ de $T_2^* = 4,53 \pm 0,13 \mu\text{s}$.

On rappelle que dans toutes les expériences de métrologie, les électrodes « miroirs » mises en place sont planes. Ce temps de cohérence est légèrement supérieur à celui mesuré lorsque le montage expérimental était constitué d'électrodes dites « sphériques ». La réduction de la courbure de ces électrodes nous a fait gagner un facteur 1,6 sur T_2^* . Les simulations présentées au chapitre II concernant les profils de champ électrique comparés dans le cas d'électrodes planes et sphériques, nous avaient laissé espérer mieux. Il n'est cependant jamais à exclure que durant l'échange des miroirs une poussière se soit déposée ici ou là et limite ainsi ce temps de cohérence. Par ailleurs, le temps de cohérence mesuré avec les électrodes sphériques n'était peut-être pas limité par la géométrie des électrodes, mais déjà par des champs parasites. Ce faible temps de cohérence, limitant violemment la taille des *Chats de Schrödinger* du moment cinétique réalisable, semble rédhibitoire à la réalisation de toute expérience de métrologie quantique. En effet, la décohérence étant due aux inhomogénéités de champ électrique, le gain de sensibilité au champ électrique escompté va réduire d'autant ce temps de cohérence. La sensibilité suivant une loi d'échelle en $1/j$ conforme à la limite d'Heisenberg, on peut s'attendre à ce que la superposition de taille maximale ($\Theta = \pi$) ait un temps de cohérence de l'ordre de $T_2^*/(2j) \approx 91 \text{ ns}$. Nous avons donc tenté de comprendre cette limitation et essayé d'accroître, autant que faire se peut, ce temps de cohérence.

IV.2.2.c Influence de la valeur du champ électrique statique directeur

Nous avons donc voulu mesurer le temps de cohérence de cette même superposition à différents champs électriques statiques. Cependant, afin de générer la superposition d'états $|\psi_1\rangle = \sqrt{1 - \varepsilon^2} |51c\rangle + \varepsilon |51, k = 1\rangle$, il est nécessaire de disposer d'un champ radiofréquence polarisé σ_+ proche de la résonance avec la première transition d'échelle. Il n'est malgré tout pas imaginable de changer la fréquence du champ RF pour chaque champ électrique testé, afin de conserver le désaccord précédent d'environ 2 MHz et d'ainsi parvenir à préparer la même superposition $|\psi_1\rangle$ par une courte impulsion radiofréquence⁵. En effet, un tel changement de fréquence impliquerait de régler de nouveau la polarisation du champ radiofréquence, ce qui est une procédure standard mais longue et pénible. C'est pourquoi, nous n'avons pas voulu toucher à la préparation de la superposition d'états et c'est donc à l'issue de la première impulsion Ramsey à 230 MHz de durée $t_1 = 60 \text{ ns}$ que nous désaccordons subitement (en 100 ns) la transition atomique $|51c\rangle \rightarrow |51, k = 1\rangle$ par une marche de champ électrique. On désire alors mesurer ce qu'il subsiste de la cohérence atomique après un temps T , en ramenant le champ électrique à sa valeur d'origine et

5. Pour une puissance du champ radiofréquence donnée, si le désaccord devient trop important il sera même impossible de dépeupler le niveau circulaire au profit du premier niveau elliptique.

en appliquant alors une seconde impulsion Ramsey. La décohérence constatée aura donc deux contributions : la décohérence durant un temps fixe, très court, à 230 MHz au champ de référence et la décohérence lors d'un temps T variable au champ testé. Ceci permet de mesurer, en balayant la durée T de la marche de champ, la décohérence à différents champs électriques statiques.

La Figure IV.11 représente les séquences expérimentales du champ électrique directeur (courbes jaune, orange et marron) et du champ radiofréquence (courbe verte). La courbe jaune représente le champ appliqué dans la séquence où la fréquence de la transition $|51c\rangle \rightarrow |51, k=1\rangle$ demeure constante à 232 MHz (comme dans la sous-section IV.2.2.b). Les courbes en pointillé orange et marron représentent des séquences avec une marche de champ électrique montante et descendante, qui ont lieu dès la fin de la première impulsion Ramsey. Pour une marche de champ de durée T fixée, on balaye la position de la seconde impulsion Ramsey (flèche noire), afin d'observer lors du retour du champ électrique à sa valeur de référence, l'oscillation de la probabilité $P_{|51c\rangle}(t)$. Le contraste de la première oscillation est affecté par un « coût » fixe – correspondant aux courts instants passés au champ de référence, ainsi que durant la montée et la descente du champ électrique – et d'un « coût » variable, dû à la décohérence durant la durée T au champ de la marche. En

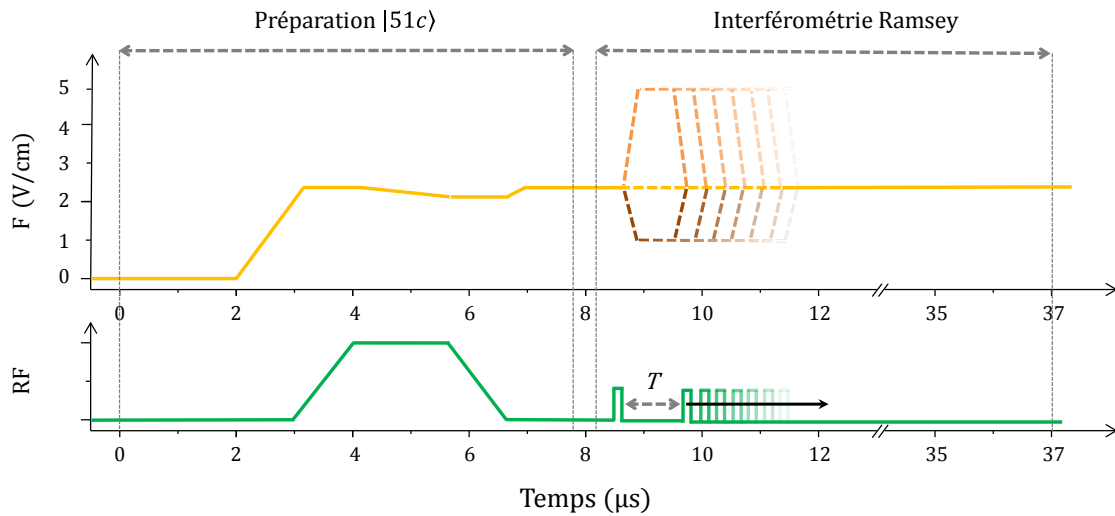


FIGURE IV.11 – Séquence expérimentale d'interférométrie Ramsey avec marche de champ électrique. La superposition $|\psi_1\rangle$ est tout d'abord préparée au champ de référence grâce à une courte impulsion radiofréquence. Durant la phase d'interférométrie Ramsey, le champ électrique décrit ensuite des marches de champ électrique de hauteurs variables. Pour une durée T fixée de ces marches de champ électrique, la position de la seconde impulsion Ramsey est balayée afin d'observer des franges de Ramsey lors du retour au champ de référence à l'issue de la marche. En répétant ces expériences d'interférométrie Ramsey pour différentes durées T , on parvient à mesurer le temps de cohérence de la superposition $|\psi_1\rangle$ au champ de la marche.

répétant l'expérience pour différentes durées T , on parvient à isoler, via la décroissance exponentielle du contraste de la première oscillation suivant la marche, la contribution de la décohérence au champ de la marche.

La Figure IV.12 (a) représente ces premières oscillations de la probabilité d'occupation de l'état $|51c\rangle$ pour différentes durées T d'une marche montante à $F_{st} = 6,87 \text{ V/cm}$ (points noirs). Nous ajustons alors les premières oscillations complètes par une courbe sinusoïdale et reportons la valeur de l'amplitude en fonction de T à la Figure IV.12 (b). La décroissance exponentielle de l'amplitude en fonction du temps T nous permet de mesurer le temps de cohérence T_2^* . On reproduit cette expérience pour différentes marches de champ électrique et représentons à la Figure IV.12 (c) le temps de cohérence mesuré en fonction du champ électrique associé à la marche (points noirs). Le point orange correspond à la précédente valeur mesurée à champ électrique constant (Figure IV.10)

On constate la croissance linéaire du temps de cohérence avec la valeur du champ électrique de la marche. En passant de $F_{st} = 2,84 \text{ V/cm}$ à $F_{st} = 6,4 \text{ V/cm}$, le temps de cohérence est multiplié par 4,6 ! Ce comportement nous donne une indication sur les inhomogénéités qui règnent au sein de la cavité. En effet, si la source des inhomogénéités était justement les électrodes « miroirs », une augmentation du champ vertical réduirait le temps de cohérence. Si la source était des champs parasites dans la direction verticale, augmenter le champ directeur ne changerait rien. Par contre, si les champs parasites sont perpendiculaires à l'axe des miroirs, alors par effet d'homodynage, l'augmentation du champ vertical peut conduire à une augmentation du temps de cohérence. La conclusion est donc sans appel : il convient de travailler à champ électrique élevé afin de gagner en temps de cohérence. Par ailleurs, cette tendance conforte l'idée que la cohérence n'est pas limitée par la géométrie des électrodes mais bien par les champs parasites.

Il convient néanmoins de rappeler quelques garde-fou. Le premier est l'effet Stark quadratique, qui vient altérer de plus en plus l'harmonicité de l'échelle de spin à mesure que le champ électrique augmente. La fréquence de la radiofréquence et le champ électrique statique étant constants durant toutes nos séquences expérimentales métrologiques, cela signifie que le couplage de l'atome au champ radiofréquence polarisé σ^+ sera de moins en moins résonant à mesure que l'atome explore les niveaux de faible moment cinétique orbital. Le couplage d'un champ radiofréquence non résonant avec l'atome induit une rotation autour d'un axe hors du plan équatorial de la sphère de Bloch. On réalise donc que, si l'axe n'est plus inclus dans ce plan équatorial, le moment cinétique n'explore plus les régions les plus au sud de la sphère de Bloch et les états *Chat de Schrödinger* que l'on peut générer avec un champ radiofréquence d'une puissance donnée sont donc de taille plus réduite. On pourrait faire varier le champ électrique à mesure que le moment cinétique tourne sur la sphère de Bloch afin de maintenir à résonance le champ radiofréquence et la fréquence atomique. Ceci exige cependant un contrôle dynamique très précis du champ électrique que ne nous offre pas aujourd'hui notre expérience. Cependant, si nous disposions d'un champ radiofréquence beaucoup plus intense par exemple permettant d'atteindre les niveaux de faible moment cinétique orbital, se poserait alors un second problème, que l'on peut considérer comme un second garde-fou : à partir d'un certain champ, l'effet Stark sera tellement important que les multiplicités vont commencer à se mélanger. Les multiplicités $n_c = 49$ et $n_g = 50$ étant séparées en champ nul de 54,3 GHz, on obtient – en ne prenant

en compte que l'effet Stark linéaire – que pour des transitions d'échelle de 543 MHz, soit $F_{st} = 5,56 \text{ V/cm}$, les deux multiplicités se rencontrent. Finalement, d'autres imperfections expérimentales et arguments, exposés dans la partie suivante, vont nous conduire à préciser ce champ électrique de travail.

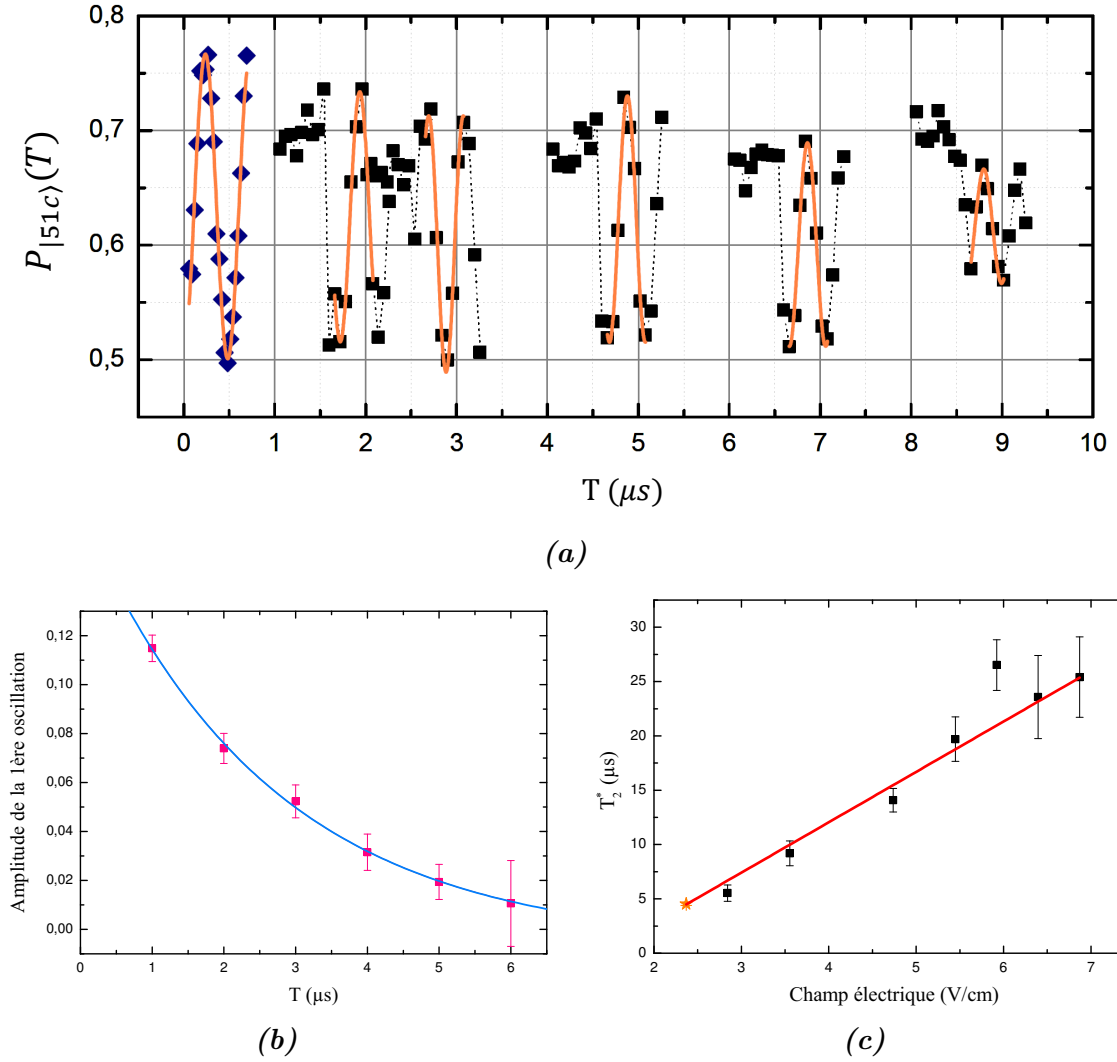


FIGURE IV.12 – Franges de Ramsey en présence d'une marche de champ électrique. **(a)** Mesure des probabilités d'occupation de l'état $|51c\rangle$ pour une marche montante de champ électrique à $F_{st} = 6,87 \text{ V/cm}$ de durées variables T (points noirs). Les losanges bleus sont un rappel des premières oscillations observées à champ constant ($F_{st} = 2,37 \text{ V/cm}$). **(b)** Ajustement exponentiel de l'amplitude des premières oscillations lors d'une marche de champ à $F_{st} = 2,87 \text{ V/cm}$. On mesure un temps de cohérence $T_2^* = 5,53 \mu\text{s}$. **(c)** Temps de cohérence T_2^* en fonction du champ électrique. Le point orange correspond à la donnée précédente mesurée par ajustement gaussien du contraste des franges Ramsey à champ constant (Figure IV.10). On ajuste linéairement l'augmentation de ce temps de cohérence avec le champ électrique suivant l'hypothèse d'un phénomène d'homodynage. La pente de l'ajustement linéaire qui vaut $4,64 \mu\text{s}/(\text{V/cm})$.

IV.2.3 Polarisation du champ RF à 530 MHz

Un compromis est donc nécessaire entre d'une part un temps de cohérence suffisant et d'autre part un déplacement quadratique des niveaux Stark limité. Afin de trouver un champ de travail idoine, nous avons donc exploré la gamme des champs électrostatiques compris entre 5,4 V/cm et 6,1 V/cm, correspondant à des transitions $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ de fréquences comprises entre 519,8 MHz et 587,6 MHz. N'ayant jamais travaillé dans cette gamme de fréquence, nous avons commencé par étudier le champ généré par une électrode radiofréquence seule.

L'étude de la polarisation du champ radiofréquence généré par une électrode seule est reportée en annexe E. Si, en théorie, une électrode seule, ne distinguant pas droite et gauche, produit un champ de polarisation linéaire, nous vérifions dans cette annexe que ce n'est expérimentalement pas le cas. Une première raison à cela est que les électrodes sont en réalité composites, c'est-à-dire formées de deux sous-électrodes reliées entre elles par un fil de cuivre (Figure IV.13 (a)), comme nous l'avons vu précédemment au chapitre II. Ces deux sous-électrodes côte à côte, espacées d'un millimètre, et reliées par un fil de

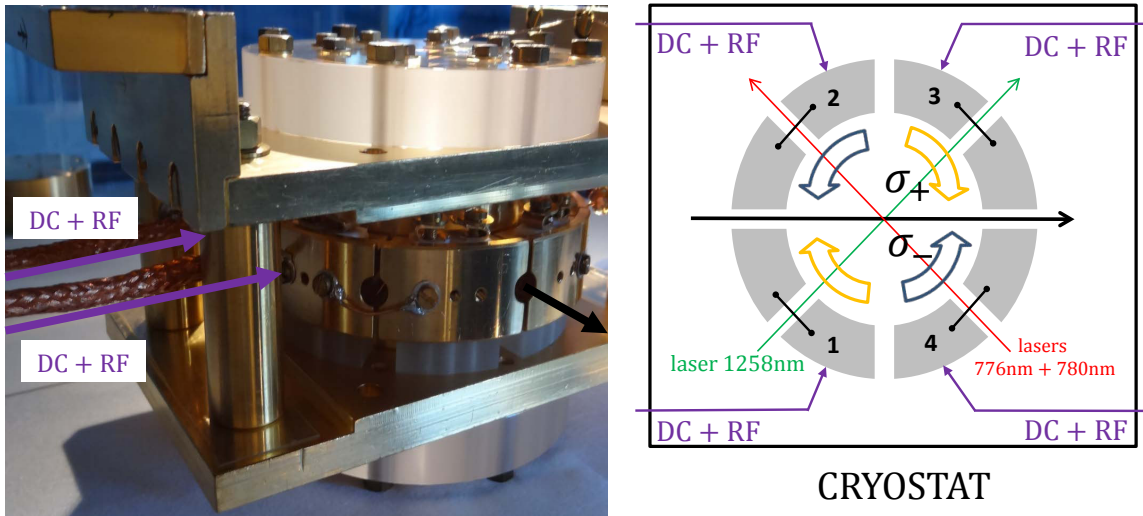


FIGURE IV.13 – Injection du champ radiofréquence sur les électrodes connectées deux à deux. Sur (a), on voit que l'injection du champ radiofréquence se fait de manière latérale. Les masses des câbles radiofréquences sont soudés aux petits pylônes dorés. Sur (b), on schématise le fait que la propagation du champ dans les demi-électrodes induit un retard qui favorise une polarisation σ_{\pm} en particulier.

cuiivre forment ainsi un petit circuit RLC. Le champ radiofréquence étant appliqué sur l'une des deux sous-électrodes, sa propagation jusqu'à l'autre sous-électrode peut induire un retard qui déséquilibre la balance σ^+/σ^- du champ radiofréquence. On présente dans l'annexe E la mesure des ratios $\Omega_{\sigma^+}/\Omega_{\sigma^-}$ pour les quatre électrodes radiofréquences. Les résultats sont résumés schématiquement sur la Figure IV.13 (b). Devant chacune des quatre électrodes est dessinée une flèche jaune ou bleue, si la polarisation du champ radiofréquence généré par l'électrode en question est plutôt σ_+ , c'est-à-dire si $\Omega_{\sigma^+}/\Omega_{\sigma^-} > 1$

ou σ_- , c'est-à-dire si $\Omega_{\sigma+}/\Omega_{\sigma-} < 1$. Ces résultats confirment notre hypothèse : en fonction de la sous-électrode sur laquelle est injecté le champ radiofréquence la polarisation de l'électrode est d'une ellipticité préférentielle. On peut par exemple voir sur la Figure IV.13 que la structure de l'électrode 3 est le symétrique par rapport à l'axe atomique de la structure de l'électrode 4, ce qui expliquerait que l'une favorise la composante σ_+ (flèche jaune) et l'autre la composante σ_- (flèche bleue). Cet effet est d'ailleurs aussi observé sur les électrodes 1 et 2 en conformité avec la symétrie de montage des demi-électrodes.

Par ailleurs, cette étude de la polarisation d'une électrode unique a permis d'observer des phénomènes de résonance pour certaines fréquences du champ RF. La mesure du ratio $\Omega_{\sigma+}/\Omega_{\sigma-}$ pour différentes fréquences du champ RF a révélé des pics de résonance, de largeurs variables (entre 10 et 25 MHz) en fonction des électrodes étudiées (voir Figure E.5 (c) page 309 de l'annexe E). Afin de travailler hors résonance, il convient alors de choisir une fréquence $\nu_{RF} \geq 590$ MHz ou $\nu_{RF} \leq 535$ MHz.

Un dernier argument va finalement préciser la valeur du champ électrique statique de travail. Comme précisé au début de ce chapitre, afin d'obtenir un signal métrologique, nous voulons préparer un atome dans une superposition des états circulaires $|50c\rangle$ et $|51c\rangle$ et le coupler à un champ radiofréquence sous la forme de deux impulsions de durée égale et espacées d'un temps d'attente t_0 , telles qu'à l'issue, les probabilités de présence dans les niveaux circulaires des deux multiplicités soient maximales. Ainsi, la seconde impulsion $\pi/2$ micro-onde de phase ϕ_{MW} variable fera que la probabilité d'occupation du niveau $|50c\rangle$ oscillera avec un contraste \mathcal{C} maximal. La polarisation σ_- résiduelle du champ radiofréquence peut réduire ce contraste. En effet, la composante de la superposition dans la multiplicité $n_e = 51$ est décrite par deux moments cinétiques indépendants $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}$, qui se couplent respectivement – de manière non résonante – aux composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence⁶. Ces deux moments cinétiques précessent avec des périodes de $2\pi/\sqrt{(\Omega_{RF}^\pm)^2 + (\delta_{\sigma^\pm}^{(51)})^2} \simeq 2\pi/\delta_{\sigma^\pm}^{(51)}$ ($\Omega_{RF}^\pm \ll \delta_{\sigma^\pm}^{(51)}$). Il est alors possible de trouver un champ électrique telle que ces deux périodes de précession soient commensurables. Ainsi, même si la polarisation du champ radiofréquence n'est pas parfaitement σ_+ , on retrouvera périodiquement toute la population de la multiplicité $n_e = 51$ dans l'état circulaire $|51c\rangle$.

Si l'on s'intéresse maintenant à la multiplicité $n_g = 50$, la composante σ^+ est à part car en résonance avec la transition atomique $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$. Cependant, la composante σ^- du champ radiofréquence fait aussi précesser le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ à une certaine fréquence, qu'il serait agréable de trouver commensurable elle aussi avec les autres⁷. On représente Figure IV.14, les rapports $\delta_{\sigma+}^{51}/\delta_{\sigma-}^{51}$ et $|\delta_{\sigma-}^{51}/\delta_{\sigma-}^{50}|$ en fonction du champ électrique statique, exprimé en termes de fréquence de la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$.

6. On rappelle que dans les expériences de métrologie quantique, le champ radiofréquence est accordé sur la transition atomique $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$.

7. Ceci n'est vrai que dans l'hypothèse où l'effet Stark quadratique n'est pas trop important de sorte à pouvoir considérer les précessions des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ comme indépendantes. En réalité, la fréquence de précession de $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ dépend de la valeur moyenne $\langle \hat{\mathbf{J}}_1^{(50)} \rangle$ (*cross-Kerr effect*).

Le premier rapport permet d'évaluer la commensurabilité des fréquences de précession dans la multiplicité $n_e = 51$ et le second la commensurabilité des fréquences entre les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$.

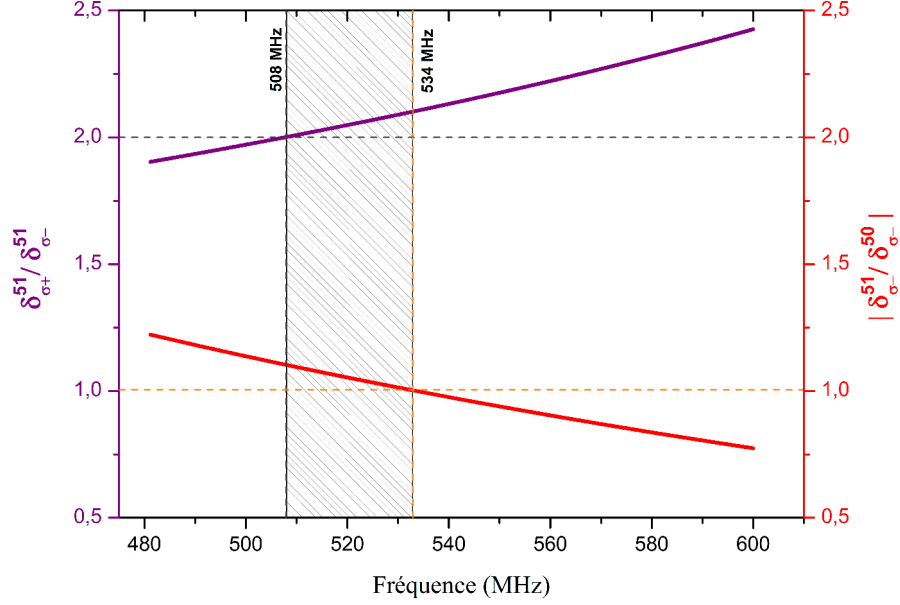


FIGURE IV.14 – Commensurabilité des désaccords dans les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$. La courbe violette représente le rapport des désaccords $\delta_{\sigma+}$ et $\delta_{\sigma-}$ dans la multiplicité $n_e = 51$ en fonction de la fréquence du champ radiofréquence accordé sur la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$. La courbe rouge représente la valeur absolue du rapport entre les désaccords $\delta_{\sigma-}$ dans les deux multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$. Les deux lignes verticales en pointillé correspondent aux fréquences telles que les ratios précédemment cités prennent des valeurs entières. La zone finement hachurée recouvre la gamme de fréquence d'intérêt.

Les deux lignes verticales en pointillé correspondent aux fréquences telles que les ratios précédemment cités prennent des valeurs entières. La zone finement hachurée de gris entre 508 MHz et 534 MHz recouvre donc une zone de compromis où les ratios sont presque entiers. Il convient de noter que le champ radiofréquence couplé à l'atome sera à terme généré par deux électrodes qui, par combinaison de leurs amplitudes et leurs phases, produisent un champ radiofréquence polarisé σ^+ avec une pureté de plus de 90%. Ainsi, pour un bon réglage des électrodes, cette commensurabilité est un raffinement du second ordre puisque la précession des moments $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}$ pourra au premier ordre être négligée. On choisit ainsi de travailler à 530 MHz, ie $F_{st} = 5,505$ V/cm, pour quatre raisons :

- cette fréquence est bien inférieure à 535 MHz et est à ce titre hors résonance de polarisation du circuit RLC que constitue deux sous-électrodes couplées deux à deux ;
- à cette fréquence, les désaccords $\delta_{\sigma+}$ et $\delta_{\sigma-}$ dans les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$ sont quasiment commensurables : $-\delta_{\sigma-}^{51}/\delta_{\sigma-}^{50} = 1,01$ et $\delta_{\sigma+}^{51}/\delta_{\sigma-}^{51} = 2,09$;

- cette fréquence appartient à la borne haute de la gamme de fréquence d'intérêt, qui assure un long temps de cohérence ;
- cette fréquence est un bon compromis vis-à-vis de l'effet Stark quadratique.

En conclusion, ce champ électrique de travail $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$ nous permet d'envisager la réalisation de mesures métrologiques suivant la méthode présentée au début de ce chapitre. A ce champ, la mesure du temps de cohérence par interférométrie Ramsey nous donne un temps de cohérence de $T_2^* = 19 \mu\text{s}$, qui nous permet d'envisager la réalisation de l'état *Chat de Schrödinger* optimal $(|j, +j\rangle + |j, -j\rangle)/\sqrt{2}$ selon la méthode présentée plus haut, cet état présentant une cohérence de près de 380 ns. Le principe d'obtention d'un signal interférométrique, décrit en début de ce chapitre, consiste à tirer profit de la structure étagée des multiplicités Stark d'un atome de Rydberg et de l'effet Stark, qui dépend en particulier du nombre quantique principal n , pour générer deux dynamiques différentes sur deux sphères de Bloch distinctes. La bonne compréhension de la dynamique, analysée en détail dans l'annexe E, d'un atome initialement dans l'état $|51c\rangle$ couplé à un champ radiofréquence non résonant et décrite à l'aide de deux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}$, nous offre en particulier un moyen efficace de régler la polarisation du champ radiofréquence généré par deux électrodes. Le réglage de la polarisation du champ radiofréquence par cette méthode, utilisant le couplage non résonant de l'atome dans le niveau $|51c\rangle$ avec le champ radiofréquence, est reporté en annexe F. Ce réglage effectué, nous visualiserons dans la partie suivante la dynamique des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ à ce champ électrique de $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$, où l'effet Stark quadratique ne peut plus être négligé.

IV.3 Trajectoires des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$

Pour clore ce chapitre, nous présentons, au champ électrique choisi $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$, l'évolution des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ lors de leur couplage au champ radiofréquence polarisé σ_+ tel que $\Omega_{RF}^{\sigma_+} = 2\pi \times 1,64 \text{ MHz}$. Cette valeur de la fréquence de Rabi est dix fois supérieure à celle choisie pour les expériences de dynamique Zénon quantique. En effet, dans le cadre des expériences de métrologie proposées au début de ce chapitre, la taille des superpositions quantiques d'états cohérents du moment cinétique sera nettement plus grande que l'état *Chat de Schrödinger* généré par QZD au chapitre III. Une des composantes cohérentes va donc explorer des régions très au sud de la sphère de Bloch et être soumise à un effet Stark quadratique important, qui est, de surcroît, augmenté par la valeur du champ électrique de travail, qui est 2,3 fois supérieure au champ électrique des manipulations Zénon.

IV.3.1 Énergies des niveaux Stark

Les énergies des niveaux circulaires $|50c\rangle$ et $|51c\rangle$ sont respectivement déplacées par effet Stark quadratique de $-61,38$ MHz et $-69,07$ MHz. L'effet Stark quadratique différentiel entre les deux niveaux circulaires est donc de $7,68$ MHz, ce qui représente $1,45\%$ de la valeur de la transition d'échelle $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ à 530 MHz. Au sein des deux multiplicités, l'effet Stark quadratique différentiel entre deux transitions d'échelle σ_+ successives est de $-70,5$ kHz par transition dans la multiplicité $n_g = 50$ et de $-76,3$ kHz par transition dans la multiplicité $n_e = 51$. Finalement, à $F_{st} = 5,505$ V/cm, le champ radiofréquence à 530 MHz est accordé avec la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ et désaccordé de $\delta_{\sigma_+} = \omega_{at} - \omega_{RF} = +2\pi \times 10,82$ MHz avec la transition $|51c\rangle \rightarrow |51, k=1\rangle$.

La Figure IV.15 reproduit le résultat de la diagonalisation du hamiltonien $\hat{H}_0 - q\mathbf{F}_{st} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ pour des valeurs de champ électrique comprises entre 0 et $7,0$ V/cm. Le zéro des énergies correspond à l'énergie de la multiplicité $n_g = 50$ en champ nul. On voit ainsi représentées les multiplicités $n = 49, 50, 51$ et, à fort champ électrique, le bord des multiplicités $n = 48$ et $n = 52$. Sont pris en compte pour cette diagonalisation l'ensemble des niveaux tels que $40 \leq n \leq 60$ et compris dans la gamme de fréquences ± 500 GHz autour de la multiplicité $n_g = 50$ en champ nul. Le trait vertical bleu est placé au niveau champ électrique $F_{st} = 5,505$ V/cm. On vérifie bien sur cette diagonalisation complète qu'à ce champ les différents états de n différents ne se sont pas mélangés.

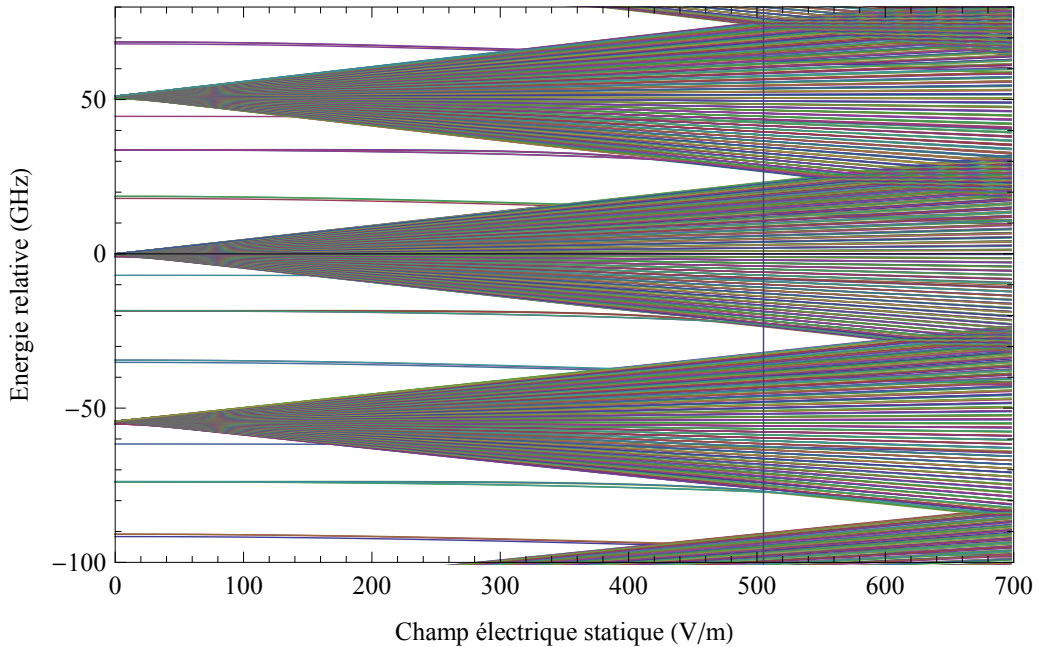


FIGURE IV.15 – Énergies des niveaux Stark pour $n = 49, 50, 51$ en fonction du champ électrique statique obtenues par diagonalisation du hamiltonien $\hat{H}_0 - q\mathbf{F}_{st} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ où l'ensemble des niveaux tels que $40 \leq n \leq 60$ compris dans la gamme de fréquence ± 500 GHz ont été pris en compte. Le trait vertical bleu est placé au niveau champ électrique $F_{st} = 5,505$ V/cm.

IV.3.2 Influence de l'effet Stark quadratique

La Figure IV.16 représente l'évolution des probabilités d'occupation des différents niveaux Stark $|50, k\rangle$ (figures de gauche) et $|51, k\rangle$ (figures de droite) lors du couplage d'un atome au champ radiofréquence polarisé σ_+ sous la forme d'une impulsion de durée variable. Le champ radiofréquence est à une fréquence de 530 MHz avec une pulsation de Rabi de $\Omega_{RF}^{\sigma_+} = 2\pi \times 1,64$ MHz. La première ligne correspond aux simulations numériques au champ de travail $F_{st} = 5,505$ V/cm lorsque l'effet Stark quadratique (et cubique) est pris en compte. La seconde ligne correspond au modèle du spin parfait. Pour ce modèle qui ne prend en compte que l'effet Stark linéaire, le champ radiofréquence est résonant avec toutes les transitions de l'échelle de spin de $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$.

i) Trajectoire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$

Pour le spin parfait, le couplage résonant au champ radiofréquence engendre la rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ autour de l'axe (Ox) , depuis le niveau $|j, +j\rangle = |50, k=0\rangle$ au pôle Nord de la sphère de Bloch jusqu'au niveau $|j, -j\rangle = |50, k=49\rangle$ au pôle Sud, avant d'initier sa remontée vers le pôle Nord. Dans les conditions de l'expérience, lorsque l'on prend en compte l'effet Stark d'ordres supérieurs, on observe que le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ ne parvient plus jusqu'au pôle Sud, mais explore tout de même – pour cette amplitude du champ radiofréquence – plus d'une trentaine de niveaux Stark. Ceci est une conséquence de l'effet Stark quadratique, qui désaccorde un peu plus, à chaque transition d'échelle successive, la fréquence atomique et la fréquence du champ RF. Ceci explique aussi que pour des impulsions radiofréquences de courtes durées, la trajectoire est très similaire avec un spin parfait. Cet effet cumulatif fait que, malgré la puissance du couplage, l'évolution du moment cinétique n'est pas une rotation autour de l'axe (Ox) . La trajectoire est donc plus complexe qu'une simple précession puisque le vecteur rotation tourne à mesure que l'état du moment cinétique évolue. Un gain de puissance aurait permis de peupler des niveaux k plus élevés. Cependant, cette amplitude est l'amplitude maximale que pouvait fournir notre synthétiseur et notre électronique en l'état.

ii) Trajectoire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$

Le couplage non résonant du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ avec le champ radiofréquence engendre la précession autour d'un axe incliné d'environ 9° par rapport à l'axe (Oz) . Sa trajectoire demeure donc très proche du pôle Nord. Ainsi, comme on peut le voir sur les figures de droites, seuls les 4 premiers niveaux de l'échelle de spin sont peuplés. L'effet Stark quadratique, qui s'élève à $-76,3$ kHz par transition dans la multiplicité $n_e = 51$, reste très inférieur sur ces premiers niveaux de l'échelle de spin à la fréquence de Rabi du champ radiofréquence. Ceci explique que les trajectoires du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ (ligne du haut) et du spin parfait (ligne du bas) soient très similaires.

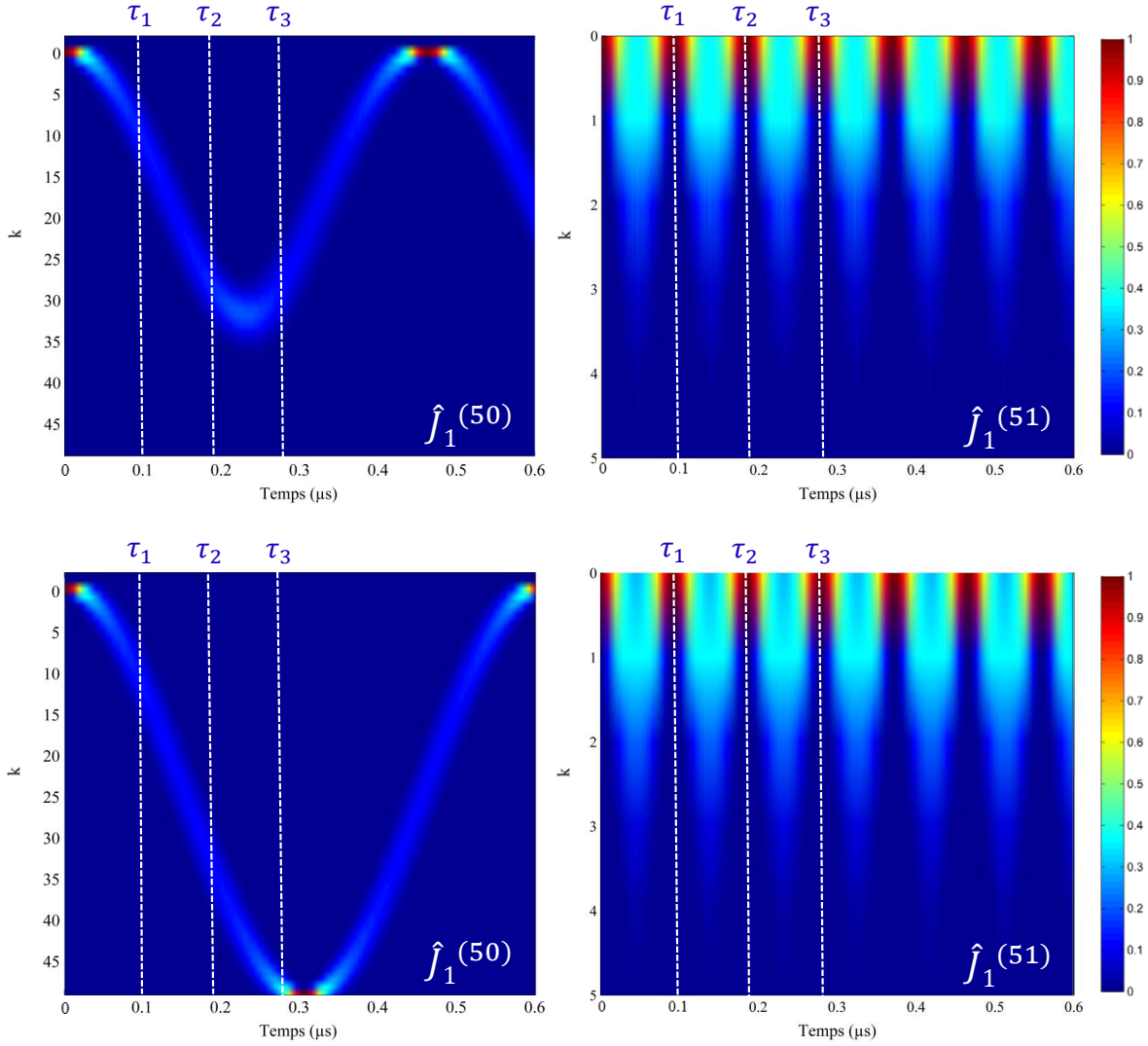


FIGURE IV.16 – Évolution des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$. Probabilités d'occupation des différents niveaux Stark $|50, k\rangle$ (figures de gauche) et $|51, k\rangle$ (figures de droite) lors du couplage d'un atome au champ radiofréquence polarisé σ_+ , avec $\Omega_{RF}^{\sigma_+} = 2\pi \times 1,64$ MHz, sous la forme d'une impulsion de durée variable. Les deux graphiques du haut correspondent à des simulations numériques où l'effet Stark quadratique (et cubique) est pris en compte. Les deux graphiques du bas correspondent au modèle du spin parfait, où seul l'effet Stark linéaire est considéré.

Dans cette très bonne approximation, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$, de même que le spin parfait, précesse à la pulsation $\Omega_s = \sqrt{(\Omega_{RF}^{\delta_+})^2 + (\sigma_+^{(51)})^2}$. Le moment cinétique revient donc périodiquement au pôle Nord de la sphère de Bloch généralisée avec une période, notée τ_1 , telle que $\tau_1 = 2\pi/\Omega_s = 91,4$ ns. On a représenté par des lignes verticales blanches, sur les quatre graphiques de la Figure IV.16, la durée τ_1 , ainsi que ses deux premiers multiples τ_2 et τ_3 . On observe bien sur les figures de droites que pour ces durées de l'impulsion radiofréquence la probabilité d'occupation de l'état circulaire $|51c\rangle$ est égale à 1.

IV.3.3 Métrologie quantique : durées des impulsions RF

On peut mesurer expérimentalement ces durées τ_i , $i = 1, \dots, 3$ en mesurant l'évolution de la la probabilité d'occupation du niveau circulaire $|51c\rangle$. La Figure IV.17 (a) représente la mesure de $P_{|51c\rangle}(t)$ en fonction de la durée t de l'impulsion radiofréquence. Sur cette prise de données, on mesure $\tau_1 = 91,7 \pm 1,6$ ns, $\tau_2 = 184,8 \pm 1,5$ ns et $\tau_3 = 277,8 \pm 1,6$ ns. Pour ces trois durées de l'impulsion radiofréquence, on constate que la probabilité mesurée est très proche de l'unité. Ainsi, dans le cadre des expériences de métrologie, l'impureté du niveau circulaire aux nombres entiers de tours du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ est négligeable. Cette impureté n'affecte donc pas le contraste du signal d'interférence lorsque la seconde impulsion $\pi/2$ micro-onde va recombiner les deux canaux interférométriques afin de mesurer le recouvrement $\langle j, +j | \psi_f \rangle$.

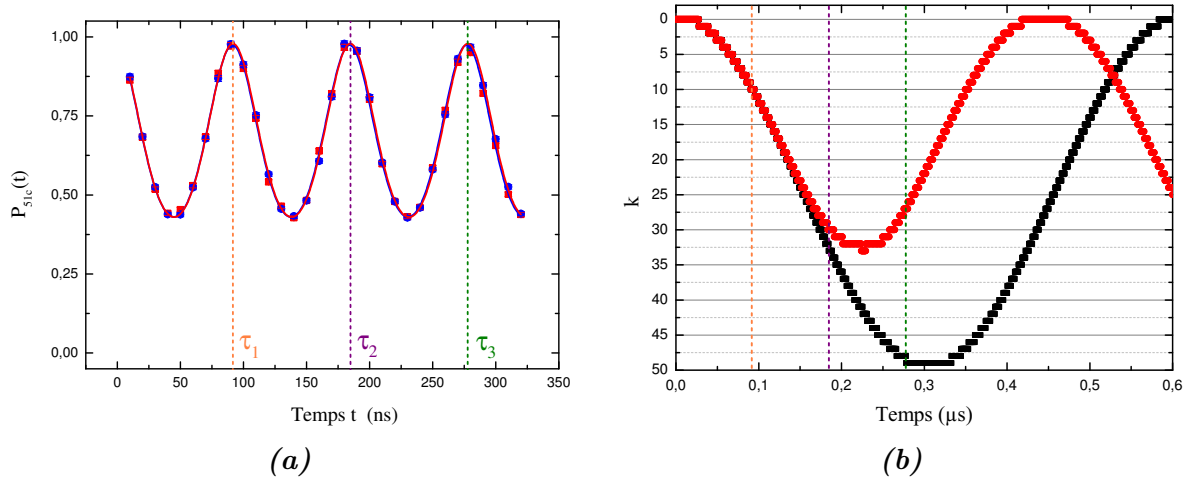


FIGURE IV.17 – Périodes entières de précession de $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$. (a) Mesure de la probabilité d'occupation $P_{|51c\rangle}(t)$ du niveau circulaire $|51c\rangle$ en fonction de la durée t de l'impulsion radiofréquence. Le couplage avec le champ radiofréquence étant non résonant, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ précesse près du pôle Nord de la sphère de Bloch \mathcal{B}_{51} et repeuple périodiquement le niveau $|51c\rangle$ pour des durées τ_i , $i = 1, \dots, 3$ représentées par des lignes verticales colorées. (b) État $|50, k\rangle$ le plus peuplé en fonction de la durée de l'impulsion radiofréquence, en présence (points rouges) ou non (points noirs) d'effet Stark quadratique. Les trois lignes verticales de couleur sont positionnées aux durées τ_1 , τ_2 et τ_3 , correspondant à des nombres entiers de tours du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$.

Cette courbe IV.17 (a) permet donc de fixer la durée de l'impulsion radiofréquence qui réalisera les rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 de la séquence \mathcal{S} de métrologie quantique, où le moment cinétique sera dans une superposition d'états dans les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$. Dans le cas d'une impulsion de durée τ_2 par exemple, la composante du moment cinétique dans la multiplicité $n_e = 51$ aura effectué deux précessions entières et pointera de nouveau vers le pôle Nord de la sphère de Bloch \mathcal{B}_{51} . La composante dans la multiplicité $n_g = 50$ sera bien plus au Sud au niveau de l'état $k = 30$. Durant la durée d'attente t_0 , le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ restera en permanence au pôle Nord et le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ va tourner d'un angle Φ autour de l'axe (Oz) . Finalement, la rotation \mathcal{R}_2 va ramener la

composante dans la multiplicité $n_g = 50$ vers l'état $|j, +j\rangle$, tandis que le moment $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ effectuera de nouveau deux précessions entières.

On remarque finalement sur la Figure IV.17 (b), qui représente l'état $|50, k\rangle$ le plus peuplé en fonction de la durée de l'impulsion radiofréquence, en présence (points rouges) ou non (points noirs) d'effet Stark quadratique, que pour une durée τ_1 , la latitude jusqu'à laquelle descend le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ n'est pas affectée par l'effet quadratique ($k = 10$). Pour une durée τ_2 , le moment cinétique en présence de l'effet Stark quadratique peuple majoritairement le niveau $k = 30$, ce qui est légèrement inférieur à la situation du spin parfait ($k = 33$). Pour une durée τ_3 , la situation est complètement différente, puisque le spin parfait avoisine le pôle Sud ($k = 49$), alors que le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ a déjà, en présence d'effet Stark quadratique, initié son retour vers le pôle Nord et peuple majoritairement le niveau $k = 24$.

Dans cette dernière partie, nous avons donc visualisé les trajectoires respectives des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$. L'effet Stark différentiel entre les multiplicités $n_g = 50$ et $n_e = 51$ fait que ces dynamiques sont fort différentes. C'est cet effet qui sera exploité dans les expériences de métrologie quantique, où c'est le déphasage entre les deux composantes $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ de la superposition d'états du moment cinétique que nous mesurerons et dont la grande sensibilité à une variation de champ électrique nous permettra de battre la limite quantique standard.

Conclusion

Nous avons vu au cours de ce chapitre que le couplage d'un atome préparé dans une superposition d'états circulaires à un champ radiofréquence polarisé σ_+ engendrait des évolutions bien différentes des deux composantes de la superposition, permettant ainsi d'envisager des expériences de métrologie quantique. Le principe de notre méthode de métrologie consiste à tirer profit de la grande sensibilité au champ électrique du déphasage accumulé lors de l'évolution distincte des composantes de la superposition. Le fort désaccord entre le champ radiofréquence et l'atome dans l'état $|51c\rangle$ engendre en effet une précession minime de ce moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ et fait donc de l'état $|51c\rangle$ une bonne référence de phase. Le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ quasi-résonant avec le champ radiofréquence va lui explorer des niveaux Stark au bas de l'échelle de spin et ainsi accumuler une phase conséquente liée à l'aire entourée par sa trajectoire sur la sphère de Bloch généralisée. Il convient cependant de scander l'évolution de ce moment cinétique au rythme des précessions entières du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$.

La génération de telles superpositions de deux grands moments cinétiques nécessite, afin de conserver la cohérence de phase entre leurs deux évolutions distinctes, un temps de cohérence suffisant. Ce temps de cohérence limité par des gradients de champ électrique

est inversement proportionnel à la sensibilité de la superposition au champ électrique. Afin de disposer d'un temps de cohérence suffisant pour préserver la cohérence des superpositions d'états de grandes tailles, nous avons constaté qu'il convenait d'augmenter considérablement le champ électrique afin de réduire relativement par homodynage les gradients transverses de champ électrique qui limitaient ce temps de cohérence. Après avoir constaté un phénomène de résonance de la polarisation RF, nous avons été conduits à choisir un champ électrique statique de travail de $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$. Nous avons donc optimisé la polarisation du champ radiofréquence à 530 MHz. Nous disposons donc de tous les outils expérimentaux et théoriques nécessaires à la réalisation des expériences de métrologie.

Chapitre V

Électrométrie quantique avec un atome de Rydberg

Traînant derrière elle des serpentins lancés, lentes algues de toutes couleurs, elle détachait parfois sa main pour rajuster sa coiffure et n'y parvenait pas, oh tant pis, et puis son nez brillait peut-être, oh tant pis puisqu'elle était sa belle, puisqu'il le lui disait. La belle du seigneur, se disait-elle, souriant aux anges. Murmures de leur amour en cette valse écœurante étalant ses traînes.

Albert Cohen, Belle du Seigneur (1968)

Sommaire

V.1 Séquences expérimentales et calibrations	229
V.1.1 Séquences expérimentales	229
V.1.2 Calibration des champs électriques	234
V.2 Métrologie quasi-classique	239
V.2.1 Séquence expérimentale	239
V.2.2 Signaux métrologiques quasi-classiques	240
V.2.3 Influence du temps d'attente t_0	243
V.2.4 Influence de la durée des impulsions radiofréquences τ_i	246
V.3 Métrologie quantique	248
V.3.1 Mesure de la phase χ en fonction de la trajectoire de $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$	248
V.3.2 Analyse du signal d'interférence	250
V.3.3 Sensibilité de la méthode de métrologie quantique	255
V.3.4 Comparaison avec la SQL et la limite d'Heisenberg	260
V.3.5 Décohérence et réduction du contraste	263
V.4 Mesure résolue en temps	268

Nous avons établi théoriquement au chapitre précédent une méthode de métrologie permettant, par la manipulation de superpositions d'états quantiques mésoscopiques du moment cinétique, d'atteindre une sensibilité en $1/j$ qui se comporte comme la limite fondamentale de Heisenberg. Cette méthode repose sur la mesure de la variation de la phase quantique globale χ (IV.26) occasionnée par une variation δF_{st} du champ électrique directeur. Nous avons vu que ce déphasage $\delta\chi$ possède une interprétation géométrique simple en termes d'aire algébrique sur la sphère de Bloch généralisée. Il est en effet proportionnel à la différence des aires entourées par les trajectoires du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} aux champs électriques F_{st} et $F_{st} + \delta F_{st}$.

Cependant, afin que la cohérence de ces superpositions d'états de grandes tailles soit suffisante pour les manipuler et obtenir *in fine* un signal interférométrique de contraste suffisant, nous avons dû augmenter considérablement le champ électrique directeur. Par homodynage des inhomogénéités transverses de champ électrique, la décohérence a été réduite, rendant possible la manipulation de superpositions de très grande taille du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ durant plusieurs centaines de nanosecondes. Le temps de cohérence est, dans le cadre de ces expériences d'électrométrie, une quantité intimement liée à la sensibilité de notre méthode. En effet, pour notre système, la décohérence étant principalement due aux effets d'inhomogénéités du champ électrique, la préparation d'états de grande sensibilité vis-à-vis du champ électrique les rend d'autant plus sensibles à la décohérence. Cette augmentation du champ électrique à $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$ n'est cependant pas sans contrepartie, puisque l'effet Stark quadratique a été considérablement augmenté. Ceci a des conséquences notables sur les trajectoires du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} dont nous discuterons les effets sur la sensibilité de nos mesures dans ce chapitre.

Après avoir présenté les séquences expérimentales de métrologie, l'ajustement du champ électrique de travail F_{st} ainsi que la calibration de la variation de champ électrique δF_{st} , nous présenterons les résultats expérimentaux qui montrent la grande sensibilité de notre méthode. Nous montrerons que la sensibilité de notre méthode se comporte comme la limite de Heisenberg et permet la mesure de très faibles champs électriques de l'ordre du mV/cm à l'aide d'un seul atome. Le temps d'intégration de la mesure, correspondant au temps de vol de nos atomes, conduit à une sensibilité de $20 \mu\text{V/cm}/\sqrt{\text{Hz}}$. Notre méthode permet de dépasser la limite quantique standard d'un facteur 2, 3 et ainsi de nous rapprocher de la limite ultime de Heisenberg. Nous discuterons les effets de décohérence qui réduisent le contraste de nos signaux métrologiques et nous éloignent en pratique de la limite d'Heisenberg. Nous concluons ce chapitre en montrant que cette méthode non invasive d'électrométrie effectuée par un unique atome de Rydberg permet des mesures résolues en temps avec une résolution inférieure à la micro-seconde, dont nous proposerons une preuve de principe dans ce manuscrit.

V.1 Séquences expérimentales et calibrations

La méthode de métrologie quantique présentée au chapitre précédent ne nécessite finalement que peu de manipulations atomiques. Outre les impulsions micro-ondes $\pi/2$ en début et fin de séquence (impulsions Ramsey), seules des rotations d'états cohérents de spin réalisées par couplage avec un champ radiofréquence classique sont à l'œuvre. La calibration précise des champs électriques est évidemment un autre élément crucial de l'expérience.

V.1.1 Séquences expérimentales

La Figure V.1 représente l'ensemble de la séquence expérimentale de métrologie. Y figurent les séquences des différents éléments concourant à la manipulation de l'atome de Rydberg, à savoir (de haut en bas sur la Figure) les lasers d'excitation, le champ électrique directeur, les champs radiofréquences et micro-ondes. La séquence générale se décompose en deux temps. Le premier temps correspond à la préparation des atomes circulaires $|50c\rangle$, qui dure au total $7,9\mu\text{s}$ conformément à ce qui a été décrit dans la section II.2.3 du chapitre II traitant de la génération d'atomes de Rydberg circulaires par passage adiabatique. Le second temps correspond à l'étape de métrologie proprement dite, dont le principe a été décrit en détail au chapitre IV.

i) Étape 1 : Préparation $|50c\rangle$

Nous ne reviendrons pas en détail sur la première étape de préparation des atomes de Rydberg circulaires $|50c\rangle$. La durée de l'impulsion du laser L_3 réalisant le dernier échelon de l'excitation laser a cependant été légèrement réduite à 500 ns. En effet, même si la taille du paquet atomique est majoritairement déterminée par la taille des faisceaux laser (de l'ordre de $600\mu\text{m}$), nous avons constaté une réduction de l'effet des inhomogénéités en réduisant légèrement la durée de l'impulsion laser tout en préservant un nombre d'atomes excités par paquet suffisant. Pour une telle excitation, on détecte ainsi en moyenne un atome de Rydberg circulaire $|50c\rangle$ par paquet. Ce chiffre est à pondérer par l'efficacité de détection du *channeltron*. Les potentiels des lentilles électrostatiques ont néanmoins été optimisés pour la détection d'atomes dans ce niveau et l'efficacité de détection est usuellement de l'ordre de l'unité. Par ailleurs, la micro-onde dite de *purification*, qui transfère sélectivement les atomes du niveau $|49c\rangle$ issus du passage adiabatique de circularisation vers l'état $|50c\rangle$ a lieu à $t = 7,2\mu\text{s}$ après que le champ électrique ait été élevé à sa valeur stationnaire F_{st} . Ceci permet de prévenir une éventuelle contamination des états circulaires $|50c\rangle$ par non-adiabaticité lors de cette marche de champ électrique.

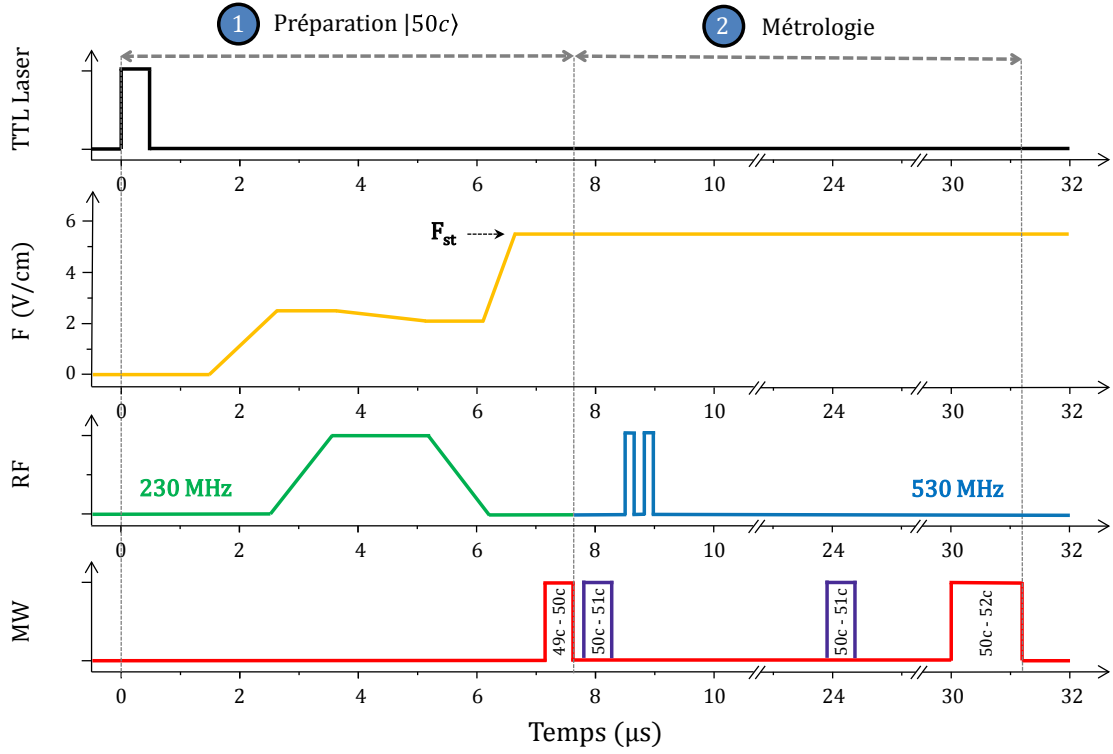


FIGURE V.1 – Séquence expérimentale de métrologie quantique. Sont représentées de haut en bas les séquences des différents éléments concourant à la manipulation de l'atome de Rydberg, à savoir les lasers d'excitation, le champ électrique directeur, les champs radiofréquences et micro-ondes. Sur la courbe du champ électrique directeur est représentée la séquence de référence pour laquelle la valeur du plateau final est à $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$. Le champ radiofréquence à 230 MHz nécessaire à la préparation des atomes de Rydberg circulaires $|50c\rangle$ est représenté en vert et celui manipulant les moments cinétiques $\hat{J}_1^{(50)}$ et $\hat{J}_1^{(51)}$ par deux impulsions successives durant la phase de métrologie est dessiné en bleu. Les impulsions micro-ondes π , $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ et $|50c\rangle \rightarrow |52c\rangle$, sont représentées en rouge et les deux impulsions $\pi/2$ Ramsey $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$ en violet.

Rappelons finalement que le champ radiofréquence polarisé σ_+ , généré par la paire d'électrodes (1 & 2) via deux cartes PCI RF et servant à la préparation des atomes circulaires $|49c\rangle$, est à une fréquence de 230 MHz.

ii) Étape 2 : Métrologie - Impulsions Ramsey

La réalisation des deux impulsions micro-ondes $\pi/2$ de durées ($\tau_{MW} = 0,36 \mu\text{s}$), sur la transition $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$, ont lieu à $7,90 \mu\text{s}$ et $23,90 \mu\text{s}$: l'intervalle de temps entre ces deux impulsions Ramsey est donc de $T = 16 \mu\text{s}$. Ces deux impulsions $\pi/2$ sont représentées en violet sur la Figure V.1. La deuxième impulsion micro-onde a été autant déportée dans le temps afin de préserver une marge de manœuvre quant à la position des deux impulsions radiofréquences qui s'y intercalent. Par ailleurs, à $t \approx 12 \mu\text{s}$ et $t \approx 20 \mu\text{s}$ la micro-onde présentait deux nœuds spatiaux pour $\nu_{MW} = 51,091435 \text{ GHz}$. Ces deux impulsions micro-ondes étant réalisées par un même générateur micro-onde Anritsu, la

puissance des deux impulsions ne pouvait pas être modifiée entre les deux impulsions. Ainsi, afin de réaliser une impulsion $\pi/2$ entre $t \approx 12 \mu\text{s}$ et $t \approx 20 \mu\text{s}$, la deuxième impulsion devait être considérablement plus longue que la première et ne parvenait parfois même pas à 50 % de transfert de la population. Pour $t = 23,90 \mu\text{s}$, les deux impulsions micro-ondes $\pi/2$ sont strictement identiques en puissance, durée ($\tau_{\text{MW}} = 0,36 \mu\text{s}$) et fréquence.

La dernière impulsion micro-onde π à $t = 30 \mu\text{s}$ d'une durée de $\tau_{\text{sonde}} = 1,36 \mu\text{s}$, représentée en rouge Figure V.1, permet de sonder le niveau $|50c\rangle$ en transférant sélectivement la population de ce niveau vers le niveau $|52c\rangle$ (transition à deux photons micro-ondes) avant détection par ionisation.

iii) Étape 2 : Métrologie - Impulsions RF

La manipulation des atomes durant la phase de métrologie s'effectue avec un champ radiofréquence polarisé σ_+ à 530 MHz généré par le synthétiseur quatre voies. La première impulsion est générée par la paire d'électrodes (3 & 4) via les voies 1 et 2 du synthétiseur et la seconde sur la même paire d'électrodes via les voies 3 et 4 du synthétiseur. Comme justifié à la fin du chapitre IV aux sections IV.3.2 et IV.3.3, la durée des deux impulsions radiofréquences est telle que la composante $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ de la superposition de moments cinétiques ait réalisé un nombre entier de précessions, retournant ainsi finalement dans son état initial $|j', +j'\rangle = |51c\rangle$ (voir Figure IV.17 (a) page 224). Dans ce chapitre, trois durées différentes seront utilisées, permettant ainsi de générer des superpositions d'états du moment cinétique de tailles différentes : $\tau_1 = 91,0 \text{ ns}$, $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$ et $\tau_3 = 276,1 \text{ ns}$.

iv) Étape 2 : Métrologie - Mesure de la probabilité d'occupation de l'état $|50c\rangle$

La méthode de métrologie que nous allons mettre en œuvre dans ce chapitre ne nécessite la mesure de la probabilité d'occupation que d'un seul niveau, l'état $|50c\rangle$, afin de mesurer le recouvrement de l'état final du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$, à l'issue de la séquence de métrologie, avec l'état initial. Toute mesure d'une population atomique dans l'état $|50c\rangle$ s'effectue par le biais d'une sonde micro-onde à deux photons qui transfère sélectivement la population du niveau $|50c\rangle$ vers l'état $|52c\rangle$ avant détection par ionisation. Il nous faut cependant normaliser la population mesurée dans l'état $|50c\rangle$ à l'issue de la séquence \mathcal{S} par le nombre d'atomes initialement préparés dans l'état $|50c\rangle$. Pour cela, avant toute séquence présentée Figure V.1, nous réalisons une séquence dite de normalisation, sans impulsion radiofréquence ni micro-onde Ramsey, qui permet de prévenir les effets d'une dérive à long terme du flux atomique à la sortie du four. De plus, afin de compter précisément les atomes dans l'état $|50c\rangle$ à l'issue de la séquence \mathcal{S} et de soustraire un éventuel fond de comptage dû à des atomes dans des niveaux elliptiques s'ionisant au même seuil

que le $|52c\rangle$, nous soustrayons à la population mesurée dans l'état $|52c\rangle$ la population mesurée à ce même seuil de détection en l'absence de sonde micro-onde $|50c\rangle \rightarrow |52c\rangle$. Finalement, le calcul de la probabilité d'occupation s'effectue par la formule :

$$P_{|50c\rangle} = \frac{\#|52c\rangle_{\text{métr.}} - \#|52c\rangle_{\text{fond}}}{\#|52c\rangle_{\text{norm.}}} . \quad (\text{V.1})$$

Ces deux séquences de mesure du fond de comptage et de normalisation coûte un certain nombre de ressources (atomes, temps d'intégration), qui pourraient néanmoins être économisées afin d'optimiser les performances de la méthode de métrologie.

v) Étape 2 : Métrologie - Champs électriques

Sur la courbe du champ électrique directeur est représentée la séquence de référence pour laquelle la valeur du plateau final est à $F_{st} = 5,505 \text{ V/cm}$, ce qui, rappelons-le, accorde la première transition d'échelle $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ avec le champ radiofréquence à 530 MHz. Notre méthode permet de mesurer la variation de phase quantique $\delta\chi$ résultant d'une modification δF_{st} du champ électrique directeur. Afin de réaliser cette mesure, nous fixons la phase $\pi + \phi_{\text{RF}}$ de la seconde impulsion telle que l'état tourné ait un recouvrement maximal avec l'état initial pour un champ électrique de F_{st} . Le choix de ϕ_{RF} s'effectue au champ F_{st} . Au champ $F_{st} + \delta F_{st}$, l'expression exacte de χ dans le cas le plus général (IV.26) montre que cette grandeur admet, par le biais de sa dépendance en Φ , un développement de Taylor en puissance de F_{st} :

$$\chi(F_{st} + \delta F_{st}) = \chi(F_{st}) + \left. \frac{\partial \chi}{\partial F_{st}} \right|_{F_{st}, \phi_{\text{RF}}} \cdot \delta F_{st} + \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial F_{st}^2} \right|_{F_{st}, \phi_{\text{RF}}} \cdot (\delta F_{st})^2 + \mathcal{O}(F_{st}^3) . \quad (\text{V.2})$$

Ainsi, afin d'annuler la dépendance quadratique en champ électrique de $\delta\chi$, on choisira deux champs électriques $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et $F_{st} + \delta F_{st}/2$ centrés sur F_{st} de sorte que :

$$\delta\chi = \chi\left(F_{st} + \frac{\delta F_{st}}{2}\right) - \chi\left(F_{st} - \frac{\delta F_{st}}{2}\right) = \left. \frac{\partial \chi}{\partial F_{st}} \right|_{F_{st}, \phi_{\text{RF}}} \cdot \delta F_{st} + \mathcal{O}(F_{st}^3) . \quad (\text{V.3})$$

On accède ainsi directement à la sensibilité de la phase au champ électrique, intervenant dans le calcul de la sensibilité globale de la méthode.

Dans toutes nos expériences, l'ensemble de la séquence de champ électrique (phase de préparation incluse) sera déplacé de $\pm \delta F_{st}/2$. Étant donné la très faible valeur de δF_{st} de l'ordre de quelques centaines de $\mu\text{V/cm}$, correspondant à une variation de l'effet Stark de quelques dizaines de kHz, cet *offset* n'affecte en rien l'efficacité de la préparation des atomes $|50c\rangle$.

vi) Enchaînement des séquences

Il nous faut donc mesurer les probabilités d'occupation du niveau $|50c\rangle$ pour les deux séquences de champ électrique à $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Ainsi, afin de nous affranchir des dérives de champ électrique à long terme, les séquences à $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ sont jouées successivement par paire. Pour ces deux champs, il nous faut mesurer les atomes dans le niveau $|52c\rangle$ ($\#|52c\rangle_{\text{métr.}}$), le fond de comptage au seuil d'ionisation ($\#|52c\rangle_{\text{fond.}}$), ainsi que la normalisation ($\#|52c\rangle_{\text{norm.}}$). Cependant, nous avons vérifié que le nombre d'atomes mesuré lors de la séquence de normalisation ne dépendait pas de l'*offset* $\pm \delta F_{st}/2$ du champ électrique, ce qui permet de réaliser une unique séquence de normalisation et de disposer d'une séquence supplémentaire. Nous avons donc décidé d'insérer une séquence de contrôle identique à un comptage $\#|52c\rangle_{\text{métr.}}$ qui permet de doubler un jeu de données, avec un bruit différent cependant. Cette séquence peut éventuellement servir à traiter *a posteriori* les données en recalant les données par rapport aux dérives à long terme du champ électrique. Cette séquence de contrôle distincte permet d'éviter les effets systématiques du recalage, qui pourraient artificiellement augmenter le contraste des franges d'interférence en mettant le bruit en phase.

La Figure V.2 résume le déroulement des six séquences en jeu lors de toute mesure métrologique aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Les lignes teintées en rouge correspondent à des séquences réalisées à un champ de $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et les autres sont réalisées à $F_{st} + \delta F_{st}/2$. Les colonnes *RF* et *μ -onde 50c-52c* indiquent pour chaque nature de séquence la présence ou non des deux impulsions radiofréquences (rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2) et de la sonde micro-onde $|50c\rangle \rightarrow |52c\rangle$.

N°	Champ électrique	Description	RF	μ -onde 50c-52c	Durée
1	$F_{st} + \delta \frac{F_{st}}{2}$	Normalisation : $\# 52c\rangle_{\text{norm.}}$		✓	311 μ s
2	$F_{st} - \delta \frac{F_{st}}{2}$	Fond de comptage : $\# 52c\rangle_{\text{fond.}}$	✓		311 μ s
3	$F_{st} + \delta \frac{F_{st}}{2}$	Fond de comptage : $\# 52c\rangle_{\text{fond.}}$	✓		311 μ s
4	$F_{st} - \delta \frac{F_{st}}{2}$	Compte métrologie : $\# 52c\rangle_{\text{métr.}}$	✓	✓	311 μ s
5	$F_{st} + \delta \frac{F_{st}}{2}$	Compte métrologie : $\# 52c\rangle_{\text{métr.}}$	✓	✓	311 μ s
6	$F_{st} - \delta \frac{F_{st}}{2}$	Contrôle : $\# 52c\rangle_{\text{métr.}}$	✓	✓	311 μ s

FIGURE V.2 – Déroulement des six séquences élémentaires en jeu lors de toute mesure métrologique aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Les lignes teintées en rouge correspondent à des séquences réalisées à un champ de $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et les autres sont réalisées à $F_{st} + \delta F_{st}/2$. Les colonnes *RF* et *μ -onde 50c-52c* indiquent pour chaque nature de séquence la présence ou non des deux impulsions radiofréquences (rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2) et de la sonde micro-onde $|50c\rangle \rightarrow |52c\rangle$.

La mesure du temps de vol des atomes excités jusqu’au détecteur donne environ $225\text{ }\mu\text{s}$. Nous avons alors décidé que le déclenchement de la séquence expérimentale présentée sur la Figure V.1 aurait lieu toutes les $311\text{ }\mu\text{s}$ de manière à nous donner une marge par rapport au temps de vol des atomes. Ainsi, dans l’enchaînement des séquences, une séquence de $311\text{ }\mu\text{s}$ avec un *offset* global de $+\delta F_{st}/2$ succède à une séquence de $311\text{ }\mu\text{s}$ avec un *offset* global de $-\delta F_{st}/2$ et ainsi de suite. Pour un jeu de paramètres donné, la mesure de la probabilité d’occupation $P_{|50c\rangle}$ (V.1) aux deux champs électriques prend donc un temps égal à six fois celui d’une séquence élémentaire soit $1,87\text{ ms}$. Nous discuterons de l’optimisation du nombre de ces séquences en clôture du chapitre.

V.1.2 Calibration des champs électriques

Afin de réaliser les expériences d’électrométrie proposées au chapitre précédent, il est nécessaire de fixer le champ électrique de travail F_{st} et calibrer la variation δF_{st} que nous désirons mesurer avec précision. Il nous faut tout d’abord fixer le champ électrique F_{st} , tel que la fréquence de la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ soit accordée avec la fréquence du champ RF, soit 530 MHz . Nous savons quel potentiel appliquer sur les électrodes planes pour obtenir un champ de $5,505\text{ V/cm}$. Cependant à cause de l’existence de champs parasites qui dérivent à long terme (voir la section II.1.4.c), cette équivalence $V \leftrightarrow V/\text{cm}$ évolue et il est alors plus efficace d’utiliser la méthode de spectroscopie micro-onde entre les multiplicités $n_c = 49$ et $n_g = 50$, afin de mesurer directement la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ et d’ajuster finement les potentiels sur les électrodes pour accorder cette transition avec le champ RF.

Par ailleurs, la variation de tension sur les électrodes « miroirs », correspondant à une variation δF_{st} de champ électrique de l’ordre du mV/cm que nous désirons produire, est à la limite de résolution de nos générateurs de fonctions arbitraires. Nous verrons en effet à l’annexe G que la calibration de la tension de sortie de l’Agilent en fonction de la valeur programmée en entrée est quelque peu surprenante. Ainsi, nous mesurons directement cette variation δF_{st} grâce à une méthode standard d’interférométrie Ramsey micro-onde. Par cette méthode, on mesure la variation de la fréquence de la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ occasionnée par la variation de champ électrique δF_{st} . Connaissant précisément le champ F_{st} grâce aux spectroscopies micro-ondes que nous venons d’évoquer, nous pouvons donc calculer, à l’aide de la formule de l’effet Stark, précisément la variation de champ δF_{st} .

V.1.2.a Mesure de F_{st} par spectroscopie micro-onde

Nous avons décidé de mesurer la variation $\delta\chi$ entre les champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ centrés sur F_{st} de sorte à obtenir des recouvrements de même amplitude pour ces deux champs et de s'assurer d'une dépendance linéaire du déphasage $\delta\chi$ avec la variation δF_{st} comme nous l'avons vu aux équations (V.2) et (V.3). Par ailleurs, nous avons vu au chapitre IV qu'à un champ de $F_{st} = 5,505$ V/cm, la première transition d'échelle $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ était résonante avec le champ radiofréquence à 530 MHz. Ainsi, afin de mesurer la fréquence de la première transition d'échelle aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, nous allons donc réaliser les spectres micro-ondes des transitions $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ et $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$. Par différence de ces deux spectres micro-ondes, nous accédons à la fréquence de la transition radiofréquence d'échelle $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$. Nous ajustons finement la valeur du potentiel sur les électrodes, afin que les deux fréquences de la première transition d'échelle mesurées aux champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ soient centrées autour de 530 MHz. La valeur de δF_{st} n'est pas modifiée, seul un *offset* global est appliqué aux séquences associées aux deux champs différents.

La Figure V.3 représente le résultat des spectroscopies micro-ondes effectuées sur les transitions $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ **(a)** et $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ **(b)** pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ centrés autour de F_{st} . Les impulsions micro-ondes de spectroscopie sont centrées en $t = 8,50$ μ s, où débutera la première impulsion radiofréquence de métrologie, et durent toute deux 2 μ s. On vérifie par ailleurs que les signaux ne sont pas élargis par saturation de la puissance micro-onde. La transition $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ entre deux états circulaires insensibles à l'effet Stark linéaire ($n_1 - n_2 = 0$ pour les états circulaires) n'est

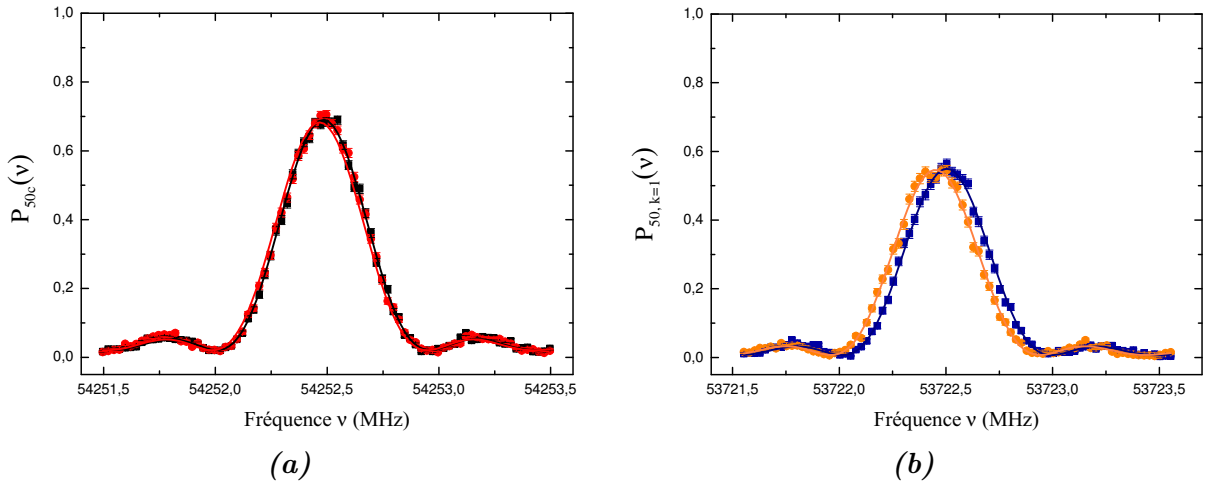


FIGURE V.3 – Spectres micro-ondes des transitions $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ et $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ centrés autour de F_{st} . **(a)** Spectres micro-ondes de la transition $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ à deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. **(b)** Spectres micro-ondes de la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ à deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, ajustés par le carré d'une fonction sinus cardinal.

donc sensible qu'à l'effet Stark quadratique différentiel. Ainsi, les deux sinus cardinaux (courbes noire et rouge) ne sont séparés que d'une fréquence (mesurée) de 1,5 kHz. Par contre, la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ est sensible à l'effet Stark linéaire via le niveau elliptique $|50, k=1\rangle$, d'où la séparation plus importante entre les courbes orange et bleue.

Pour le champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$, on mesure les fréquences centrales des pics de spectroscopie micro-ondes :

$$\begin{cases} \nu[|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle] = 54\,252,484 \pm 0,001 \text{ MHz} & (\text{courbe noire}) \\ \nu[|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 53\,722,504 \pm 0,002 \text{ MHz} & (\text{courbe bleue}) \end{cases} \quad . \quad (\text{V.4})$$

Par différence de ces deux fréquences, on obtient :

$$\nu_{F_{st}-\delta F_{st}}[|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 529,979 \pm 0,002 \text{ MHz} \quad . \quad (\text{V.5})$$

Pour le champ électrique $F_{st} + \delta F_{st}/2$, on obtient par la même méthode :

$$\nu_{F_{st}+\delta F_{st}}[|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 530,030 \pm 0,002 \text{ MHz} \quad . \quad (\text{V.6})$$

Grâce à cette méthode de spectroscopie, nous avons donc trouvé les potentiels à appliquer sur les électrodes « miroirs », afin que les premières transitions d'échelle aux deux champs électriques soient centrées autour de 530 MHz. En effet, la moyenne de ces deux fréquences (V.5) et (V.6) vaut $530,005 \pm 0,001 \text{ MHz}$. Grâce à l'expression de l'effet Stark, on peut en déduire la valeur du champ électrique :

$$F_{st} = 5,505\,130 \text{ V/cm} \quad . \quad (\text{V.7})$$

Pour obtenir cette valeur de F_{st} , chacun des quatre spectres présentés à la Figure V.3 comportait 81 points de mesures, équidistants de 25 kHz. La valeur de chacun des points a été moyennée sur 3000 répétitions, où, pour chacune d'entre elles, 0,53 atome de Rydberg circulaire dans l'état $|49c\rangle$ était en moyenne initialement préparé.

Les erreurs sur les fréquences présentées plus haut correspondent aux erreurs des ajustements des données par le carré d'une fonction sinus cardinal. En réalité, la reproductibilité de ces spectroscopies donne une dispersion (*shot to shot*) de 15 kHz. Ce qui conduit à une précision suffisante sur la valeur du champ de référence F_{st} . Par ailleurs, par différence des deux fréquences (V.5) et (V.6), on peut aussi estimer la variation de champ électrique δF_{st} entre les deux séquences codées sur le générateur de forme arbitraire : $\delta\nu[|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 51,43 \pm 21,2 \text{ kHz}$, soit $\delta F_{st} = 531 \pm 220 \mu\text{V/cm}$. Cette méthode de spectroscopie donne donc une erreur importante sur la variation de champ électrique δF_{st} et nous allons donc dans la partie suivante présenter une meilleure méthode pour mesurer cette quantité.

V.1.2.b Mesure de δF_{st} par interférométrie Ramsey

Afin d'améliorer la précision sur la mesure de δF_{st} , nous avons donc mesuré la fréquence de la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ par la méthode d'interférométrie Ramsey, dont nous avons déjà décrit le principe précédemment. Dans ce cas précis, il s'agit d'une méthode par interférométrie Ramsey micro-onde, puisque nous préparons sous l'action d'une impulsion micro-onde $\pi/2$ une superposition à poids égaux $|49c\rangle + |50, k=1\rangle$ (ou $|49c\rangle + |50c\rangle$) que nous laissons évoluer durant un temps d'interrogation T , avant d'appliquer une seconde impulsion micro-onde $\pi/2$. Nous mesurons la probabilité d'occupation du niveau $|50, k=1\rangle$ (ou $|50c\rangle$) en fonction de la fréquence du champ micro-onde balayée autour de la fréquence de résonance de la transition associée.

Les Figures V.4 (a) et (b) représentent les franges de Ramsey obtenues sur les transitions atomiques $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ et $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Les deux impulsions micro-ondes $\pi/2$ sont déclenchées à $t_1 = 7,5 \mu\text{s}$ et $t_2 = 9,5 \mu\text{s}$ et durent respectivement 200 ns et 180 ns. On sonde donc la même zone de l'espace qu'avec la spectroscopie micro-onde de la section précédente V.1.2.a. La valeur de chacun des 41 points des franges de Ramsey, espacés deux à deux de 50 kHz, correspond à la moyenne sur 8400 répétitions, où était en moyenne préparé pour chacune d'entre elles 0,21 atome dans le niveau $|49c\rangle$.

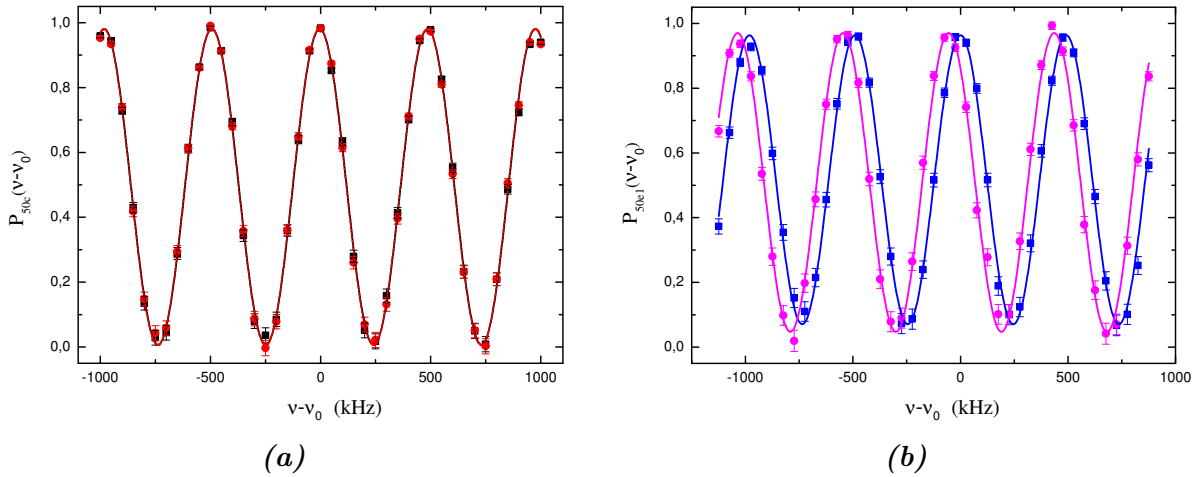


FIGURE V.4 – Mesure de δF_{st} par interférométrie Ramsey micro-onde. Franges de Ramsey obtenues sur les transitions atomiques $|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle$ (a) et $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ (b) aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Les deux impulsions micro-ondes $\pi/2$ sont déclenchées à $t_1 = 7,5 \mu\text{s}$ et $t_2 = 9,5 \mu\text{s}$ et durent respectivement 200 ns et 180 ns. Les points de couleur correspondent aux mesures de la probabilité d'occupation du niveau $|50c\rangle$ (a) ou $|50, k=1\rangle$ (b) en fonction de la fréquence du champ micro-onde balayée autour de la fréquence de résonance de la transition associée. Les courbes en trait plein de couleur associée correspondent aux meilleurs ajustements sinusoïdaux.

L'ajustement des données expérimentales (points de couleur) par des fonctions sinusoïdales permet d'obtenir, via leurs déphasages, la variation des fréquences de ces deux transitions atomiques due à la variation δF_{st} de champ électrique. On mesure ainsi :

$$\begin{cases} \delta\nu[|49c\rangle \rightarrow |50c\rangle] = 0,95 \pm 0,62 \text{ kHz} \\ \delta\nu[|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 55,25 \pm 1,03 \text{ kHz} \end{cases} . \quad (\text{V.8})$$

Le contraste des franges est de 97,4 % pour la transition entre les deux niveaux circulaires (courbes **(a)**) et d'environ 92 % pour la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ (courbes **(b)**). On déduit par différence des mesures (V.8) que $\delta\nu[|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 54,28 \pm 1,20 \text{ kHz}$, soit :

$$\boxed{\delta F_{st} = 561 \pm 13 \text{ } \mu\text{V/cm}} , \quad (\text{V.9})$$

ce qui est une valeur légèrement différente et plus précise que la valeur mesurée par spectroscopie micro-onde. On mesure une dispersion statistique sur la mesure de la fréquence $\delta\nu[|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle]$ de l'ordre de 3 kHz, qui donne cette fois-ci une erreur statistique du même ordre de grandeur que l'erreur de l'ajustement sinusoïdal des données.

Nous nous attendions à une amélioration de la précision de la mesure de cet ordre de grandeur. En effet pour la spectroscopie micro-onde, dans des conditions non saturantes, l'écart en fréquence entre les deux premiers zéros du pic de spectroscopie est égal à $2/T$, où T est la durée de l'impulsion. Pour des franges de Ramsey, la période des oscillations est égale à $1/T$, où T est la durée entre les deux impulsions. Pour des signaux de même amplitude, on gagne donc un facteur deux sur la pente du signal et donc finalement ce même facteur deux pour l'erreur sur $\delta\nu$. Dans notre cas, l'amplitude des franges Ramsey est 1,7 fois plus grande que le pic de spectroscopie. En effet, afin de ne pas induire de déplacements lumineux sur les niveaux voisins de la transition sondée, la puissance du champ micro-onde de spectroscopie est limitée : l'impulsion micro-onde n'est pas une impulsion π . Finalement, la pente de notre signal est multipliée par un facteur 3,4 qui se retrouve sur la réduction de l'erreur statistique de notre mesure.

Comme nous le montrons dans l'annexe G, cette variation de champ électrique correspond au plus petit incrément de potentiel électrique que notre électronique peut produire sur les deux électrodes « miroirs ». A une exception près (section V.3.2), cette valeur de δF_{st} sera inchangée dans tout ce chapitre.

V.2 Métrologie quasi-classique

Grâce à toutes les calibrations qui viennent d'être présentées, nous sommes maintenant en mesure d'obtenir un premier signal métrologique suivant la méthode présentée théoriquement au chapitre IV (sous-section IV.1.1.a). Nous commençons dans cette partie par présenter les résultats obtenus via la méthode de métrologie dite quasi-classique. Puis, dans la partie suivante, par l'ajout des impulsions $\pi/2$ micro-ondes en début et fin de séquence (impulsions Ramsey), nous obtiendrons une mesure interférométrique permettant de gagner en sensibilité - stratégie de métrologie quantique.

V.2.1 Séquence expérimentale

Conformément à la méthode décrite au chapitre IV à la sous-section IV.1.1.a et ici résumée à la Figure V.5, le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ est soumis à une première impulsion radiofréquence de durée τ_i (rotation \mathcal{R}_1), puis, à l'issue d'un temps d'attente (ou d'interrogation) t_0 , à une seconde impulsion d'amplitude et de durée identiques à la première (rotation \mathcal{R}_2). La phase $\pi + \phi_{\text{RF}}$ de cette seconde impulsion est variable. On évalue finalement le recouvrement de l'état final $|\psi_f\rangle$ avec l'état initial $|j, +j\rangle = |50c\rangle$. Toute mesure de la probabilité d'occupation de l'état initial s'effectue selon l'enchaînement des six séquences présenté dans le tableau V.2 page 233. On évalue donc toujours ces probabilités aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, avec F_{st} correspondant à un champ tel que la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ soit à 530 MHz et $\delta F_{st} = 561 \pm 13 \mu\text{V/cm}$.

Comme nous l'avons vu au chapitre IV, la sensibilité de la méthode quasi-classique est optimale pour une première impulsion radiofréquence amenant le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur l'équateur ($\Theta = \pi/2$). Cependant, le but de ce chapitre n'est pas de réaliser une mesure optimale du champ électrique δF_{st} par une stratégie de métrologie classique. Le but de ces mesures quasi-classiques préliminaires est de bien comprendre la caractéristique de la trajectoire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et d'étudier l'influence de l'effet Stark quadratique par rapport à la théorie du spin parfait décrite au chapitre IV. Ainsi, la durée des impulsions radiofréquences est ici choisie telle qu'elle devra être dans le contexte de la stratégie quantique, c'est-à-dire de durée égale à τ_i , $i = 1, 2$ ou 3 , de sorte que le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ (pour l'instant absent) précède d'un nombre entier de tours durant les impulsions radiofréquences (voir sections IV.3.3 et V.1.1 iii)).

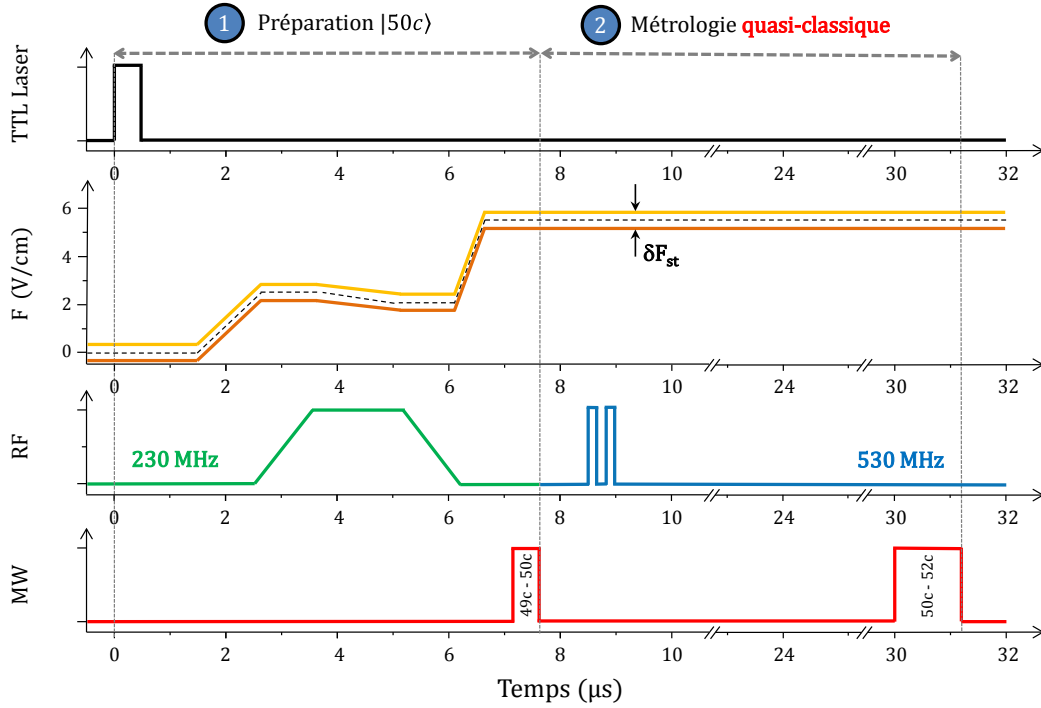


FIGURE V.5 – Séquence de métrologie quasi-classique. Sont représentées, de haut en bas, les séquences des lasers, du champ électrique, du champ radiofréquence et du champ micro-onde. A la différence de la séquence de métrologie quantique présentée à la Figure V.1, il n'y a pas d'impulsion Ramsey micro-onde dans la séquence micro-onde. Ainsi, les deux impulsions radiofréquences manipulent uniquement le moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$.

V.2.2 Signaux métrologiques quasi-classiques

On représente Figure V.6 l'évolution du recouvrement $P(\phi_{\text{RF}}) = |\langle j, +j | \psi_f \rangle|^2$ en fonction de la phase $\pi + \phi_{\text{RF}}$ de la seconde impulsion RF, dans le cas d'impulsions radiofréquences de durée $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$, pour deux durées d'attente t_0 différentes. Nous avons constaté des variations de la puissance de la radiofréquence à l'échelle de la journée donnant pour des mesures répétées de la pulsation de Rabi $\Omega_{\text{RF}}^{\sigma+}$ une dispersion de 50 kHz (soit 3%). A cette erreur près, la fréquence de Rabi de la radiofréquence est très proche de la valeur $\Omega_{\text{RF}}^{\sigma+} = 2\pi \times 1,64 \text{ MHz}$, pour laquelle nous avons, à la fin du chapitre IV, simulé les trajectoires des moments cinétiques $\hat{J}_1^{(50)}$ et $\hat{J}_1^{(51)}$ (voir Figure IV.16 page 223). Grâce à ces simulations, on sait donc que la première impulsion radiofréquence amène le moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$ à une colatitude très proche de $\Theta = 103^\circ$ (l'état $k = 30$ étant majoritairement peuplé). Le temps d'attente entre les deux impulsions RF est de $t_0 = 56,1 \text{ ns}$ pour la sous-figure (a) et de $t_0 = 206,1 \text{ ns}$ pour la sous-figure (b). Les points noirs et rouges correspondent respectivement aux mesures expérimentales aux champs électriques $F_{\text{st}} - \delta F_{\text{st}}/2$ et $F_{\text{st}} + \delta F_{\text{st}}/2$ et les lignes pleines correspondent aux meilleurs ajustements gaussiens. On note $\phi_{\text{RF}}^{(+)}$ et $\phi_{\text{RF}}^{(-)}$ les valeurs centrales des gaussiennes associées aux champs

électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Les courbes en pointillé bleu gris sont des gaussiennes de largeur déterminée par la SQL et centrées en $\phi_{RF}^{(0)} = (\phi_{RF}^{(+)} + \phi_{RF}^{(-)})/2$. Pour ces données, chacune des six séquences du tableau V.2 page 233 a été répétée 12 000 fois, ce qui représente au total 39 700 atomes détectés par paire de points associée aux champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$.

Durant la phase d'attente, le moment cinétique tourne à la fréquence du désaccord entre le champ radiofréquence et la transition atomique moyenne de l'état cohérent de spin généré par la rotation \mathcal{R}_1 . On observe ainsi que les angles $\phi_{RF}^{(\pm)}$ qui maximisent le recouvrement $P(\phi_{RF})$ ne sont pas les mêmes pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Ce déphasage $\Delta\phi_{RF} = \phi_{RF}^{(+)} - \phi_{RF}^{(-)}$ a deux contributions : d'une part, le déphasage $\delta\Phi = \delta\omega_{at}t_0$ durant le temps d'attente t_0 et d'autre part, la variation différentielle de l'angle azimutal $\Delta\Phi_{\mathcal{R}_i}$ lors des deux rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . En effet, nous ne vérifions pas les conditions de l'hypothèse faite dans la partie théorique d'une impulsion très puissante par rapport à l'effet Stark quadratique, vérifiant la condition (IV.43). La puissance finie du champ radiofréquence fait que la trajectoire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur la sphère de Bloch généralisée est différente avec le champ électrique $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, comme on le voit très clairement sur la Figure V.7.

Par ailleurs, on note en comparant les Figures V.6 (a) et (b) que les hauteurs des coupes gaussiennes des états cohérents finaux ne sont tout d'abord pas unité (contraire-

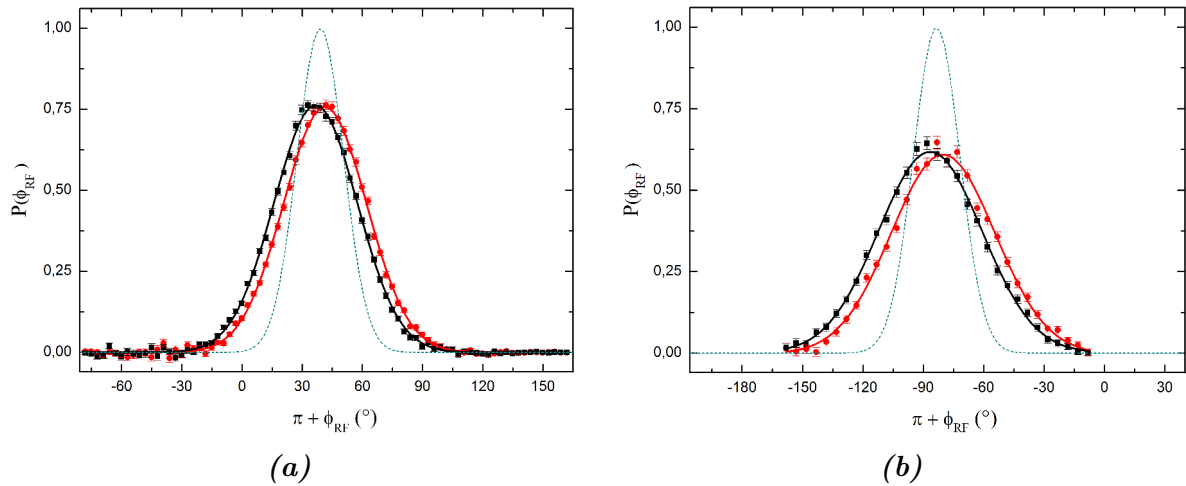


FIGURE V.6 – Électrométrie par méthode quasi-classique. Mesure du recouvrement $P(\phi_{RF}) = |\langle j, +j | \psi_f \rangle|^2$ en fonction de la phase $\pi + \phi_{RF}$ de la seconde impulsion RF, dans le cas d'impulsions radiofréquences de durée $\tau_2 = 183,9$ ns. (a) Pour un temps d'attente entre les deux impulsions radiofréquences de $t_0 = 56,1$ ns. Les points noirs et rouges correspondent aux mesures expérimentales pour respectivement $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et $F_{st} + \delta F_{st}/2$ et les lignes pleines correspondent aux meilleurs ajustements gaussiens. Les courbes en pointillé bleu gris sont des gaussiennes de largeur déterminée par la SQL et centrées en $\phi_{RF}^{(0)} = (\phi_{RF}^{(+)} + \phi_{RF}^{(-)})/2$. On mesure un déphasage de $\Delta\phi_{RF} = 4,63^\circ$. (b) Idem, mais pour un temps d'attente entre les deux impulsions radiofréquences de $t_0 = 206,1$ ns. On mesure un déphasage de $\Delta\phi_{RF} = 6,35^\circ$.

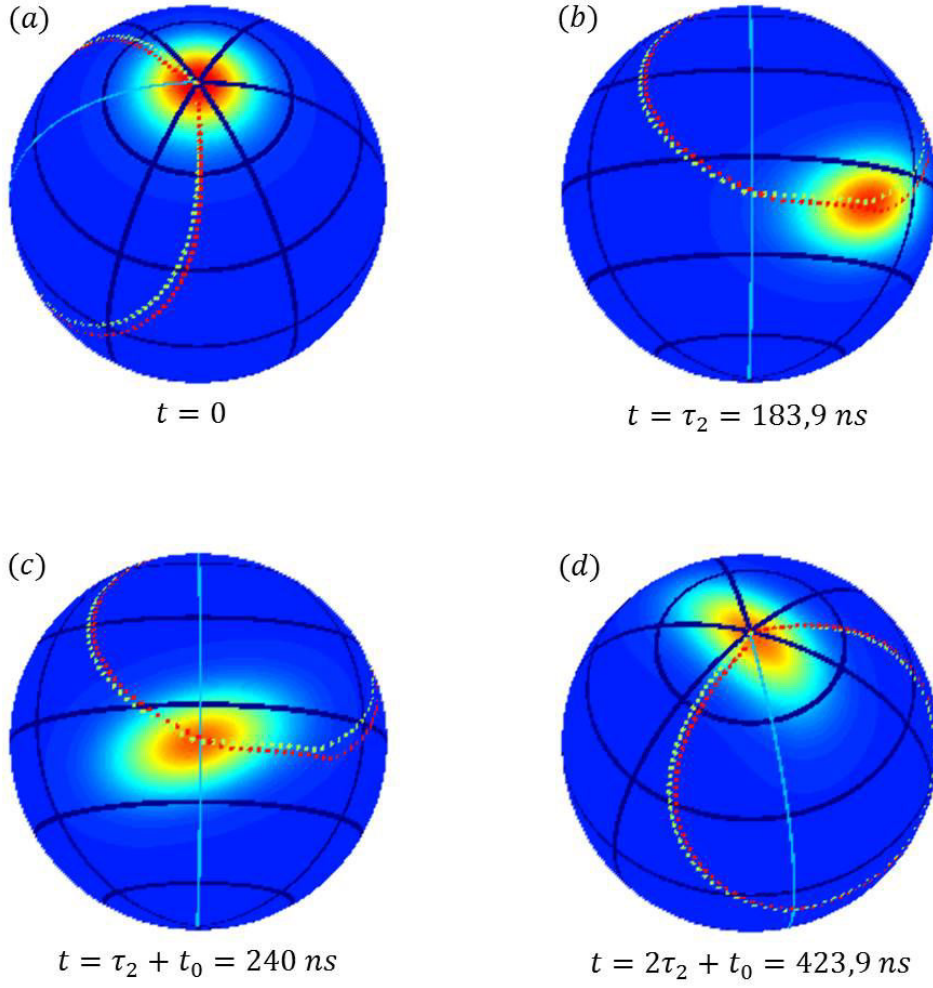


FIGURE V.7 – Trajectoires comparées du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. On représente sur cette Figure la fonction Q du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ lors des quatre instants majeurs de la séquence de métrologie pour le champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$: (a) à l'instant initial $t = 0$ où le moment cinétique est dans l'état $|j, +j\rangle$, (b) à l'issue de la première impulsion radiofréquence d'une durée τ_2 , (c) à l'issue de la phase d'attente de durée $t_0 = 56,1$ ns et finalement (d) après la seconde impulsion radiofréquence de durée τ_2 , où la phase de cette seconde impulsion est choisie de sorte à maximiser le recouvrement au champ de référence F_{st} . Les pointillés vert et rouge représentent le chemin suivi par le moment cinétique aux champs électriques de $F_{st} \mp \delta F_{st}/2$ respectivement.

ment à la SQL), et qu'elle diminue avec le temps d'attente t_0 . Ceci est dû à l'effet Stark quadratique, qui peut formellement être décrit comme un hamiltonien en \hat{J}_z^2 . L'effet Stark quadratique, qui rend l'échelle de spin légèrement anharmonique, courbe la trajectoire du moment cinétique et, affectant différenciellement les différentes composantes $|j, m\rangle$ de l'état cohérent de spin, distord sa forme comme nous l'avons vu au chapitre I (Figure I.18 page 76) de même que sur la Figure V.7. Cette distorsion affecte de fait la hauteur du signal $P(\phi_{RF})$ qui n'est rien d'autre qu'une coupe de la fonction Q de l'état cohérent de spin à l'issue du temps d'attente t_0 .

Finalement, on remarque que le déphasage $\Delta\phi_{\text{RF}}$ induit par la variation δF_{st} de champ électrique est petit comparé à la largeur du signal gaussien. Pour $t_0 = 56,1 \text{ ns}$ **(a)**, on mesure un déphasage $\Delta\phi_{\text{RF}} = 4,63^\circ$ à comparer aux largeurs des gaussiennes de $59,3^\circ$. Pour $t_0 = 206,1 \text{ ns}$ **(b)**, on mesure un déphasage $\Delta\phi_{\text{RF}} = 6,35^\circ$ à comparer aux largeurs des gaussiennes de $72,7 \pm 0,8^\circ$. Afin de comparer la sensibilité de ces deux mesures, on peut former un facteur de mérite en multipliant le déphasage $\Delta\phi_{\text{RF}}$ par la pente à $1/e$ du signal gaussien. On obtient ainsi une sensibilité légèrement supérieure pour la première mesure ; l'allongement du temps d'attente t_0 provoquant une augmentation du déphasage $\Delta\phi_{\text{RF}}$ (multiplié par 1,37) légèrement inférieure à la diminution de la pente (divisée par 1,54).

V.2.3 Influence du temps d'attente t_0

On peut répéter ces mesures de $P(\phi_{\text{RF}}) = |\langle j, +j | \psi_f \rangle|^2$ pour différentes valeurs du temps d'attente t_0 . On reporte Figure V.8 **(a)** les valeurs centrales $\phi_{\text{RF}}^{(\pm)}$ des ajustements gaussiens des données obtenues aux deux champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ en fonction du délai t_0 entre les deux impulsions RF (points noirs et rouges respectivement). La Figure V.8 **(b)** correspond aux déphasages $\Delta\phi_{\text{RF}} = \phi_{\text{RF}}^{(+)} - \phi_{\text{RF}}^{(-)}$ occasionnés par la variation de champ électrique δF_{st} , obtenus par soustraction des données rouges et noires de la Figure V.8 **(a)**. Dans les deux sous-figures **(a)** et **(b)**, les droites en trait plein correspondent aux meilleurs ajustements linéaires des données expérimentales.

Les pentes des droites de la Figure V.8 **(a)** indiquent à quelles fréquences le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ tourne autour de l'axe (Oz) durant la phase d'attente. On constate que pour le champ le moins élevé $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (courbe noire), le moment cinétique tourne plus vite – à une fréquence $-2,116 \text{ MHz}$ – que pour le champ $F_{st} + \delta F_{st}/2$ (courbe rouge), pour lequel il tourne à $-2,081 \text{ MHz}$. Or, une simulation de la trajectoire du moment cinétique sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} , telle la Figure V.7, montre que la trajectoire au champ le moins élevé (courbe verte) est légèrement plus au nord lors de la phase d'attente que la trajectoire au champ $F_{st} + \delta F_{st}/2$. En nous référant à l'analyse théorique menée au début du chapitre IV, ceci semble à première vue contradictoire.

En réalité, la fréquence de rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ autour de l'axe (Oz) a deux origines :

- l'effet Stark linéaire, qui est différent à cause des champs électriques distincts $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. On sait que la radiofréquence à 530 MHz est accordée avec la première transition d'échelle pour le champ de référence F_{st} . Ainsi, dans le référentiel tournant à la fréquence du champ RF, le moment cinétique va donc tourner à une pulsation de $\pm \delta\nu^{(1)}/2$ respectivement aux champs électriques de $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Nous

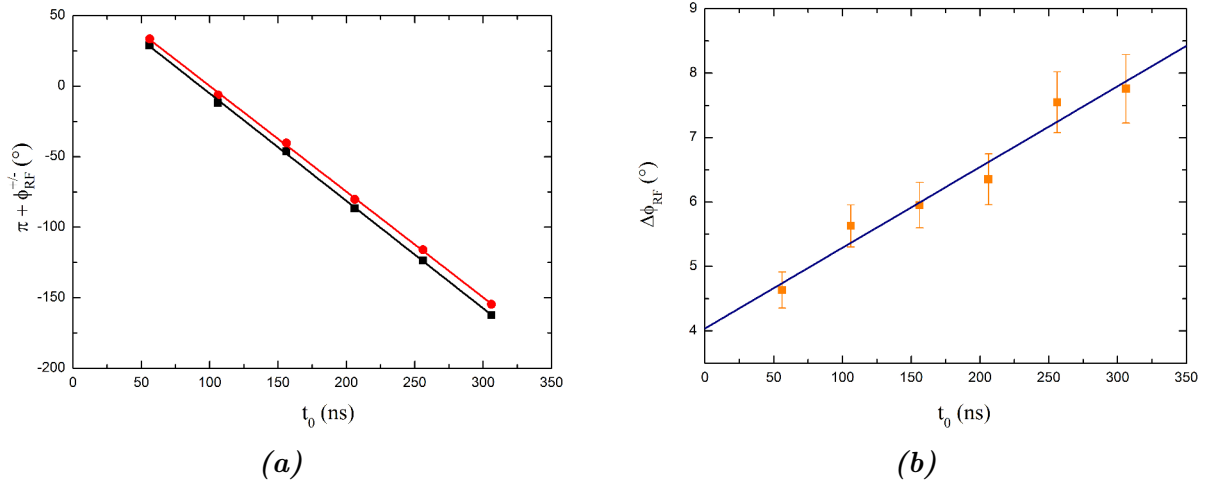


FIGURE V.8 – Influence du temps d’attente t_0 sur la mesure du déphasage $\Delta\phi_{RF}$ dans le cas d’impulsions radiofréquences de durée $\tau_2 = 183,9$ ns dans le cadre de la stratégie de métrologie quasi-classique. **(a)** Phase optimale ϕ_{RF}^{opt} de la seconde impulsion radiofréquence maximisant le recouvrement $P(\phi_{RF})$ avec l’état initial en fonction de la durée d’attente t_0 , pour les champs électriques $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (points noirs) et $F_{st} + \delta F_{st}/2$ (points rouges). Les droites en trait plein correspondent au meilleur ajustement linéaire des données expérimentales. **(b)** Déphasage $\Delta\phi_{RF}$ occasionné par la variation de champ électrique δF_{st} en fonction du temps d’attente t_0 , obtenu par soustraction des données rouges et noires de la Figure V.8 (a). La droite en trait plein correspondant au meilleur ajustement linéaire des données expérimentales possède une pente de $+34,778$ kHz.

avons mesuré par interférométrie Ramsey micro-onde $\delta\nu^{(1)} = 54,28 \pm 1,20$ kHz (voir résultat V.9) ;

- l’effet Stark quadratique, qui dépend de la valeur moyenne $\langle \hat{J}_{1,z}^{(50)} \rangle$, c’est-à-dire de la valeur moyenne de k , notée \tilde{k}_{\pm} , respectivement pour les champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, et du champ électrique. Les valeurs de l’effet Stark quadratique par transition d’échelle aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ ne sont différentes que de 14 Hz pour une variation $\delta F_{st} = 561 \pm 13$ $\mu\text{V}/\text{cm}$. Ainsi, on simplifiera les équations en prenant la valeur moyenne $\Delta\nu^{(2)}(F_{st}) = -70,455$ kHz.

En prenant en compte ces deux contributions, on peut donc écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} +\frac{\delta\nu^{(1)}}{2} + \tilde{k}_{+} \times \Delta\nu^{(2)}(F_{st}) = \frac{\partial\phi_{RF}^{(+)}}{\partial t_0} \\ -\frac{\delta\nu^{(1)}}{2} + \tilde{k}_{-} \times \Delta\nu^{(2)}(F_{st}) = \frac{\partial\phi_{RF}^{(-)}}{\partial t_0} \end{array} \right., \quad (\text{V.10})$$

où les deux termes à droite des signes égal correspondent aux pentes des deux droites

ajustées sur les données à la Figure V.8 (a). On en déduit ainsi que :

$$\tilde{k}_- = 29,643 \pm 0,30 < \tilde{k}_+ = 29,916 \pm 0,28 \quad . \quad (\text{V.11})$$

Le moment cinétique à $F_{st} + \delta F_{st}/2$ tourne donc effectivement moins vite, bien qu'il soit plus au sud de la sphère de Bloch généralisée \mathcal{B}_{50} . On déduit de ces données les colatitudes des champs cohérents tournés après \mathcal{R}_1 :

$$\Theta_- = +102,12 \pm 0,73^\circ \quad \text{et} \quad \Theta_+ = 102,77 \pm 0,68^\circ \quad , \quad (\text{V.12})$$

qui sont effectivement très proches de la valeur $\Theta = 103^\circ$ des simulations de la fin du chapitre IV effectuées au champ F_{st} pour $\Omega_{RF}^{\sigma+} = 2\pi \times 1,64$ MHz. Le moment cinétique semble descendre très légèrement moins au sud ($< 1^\circ$) et on peut donc en déduire que la fréquence de Rabi du champ radiofréquence est très légèrement inférieure à 1,64 MHz. Nous allons voir dans la partie suivante une méthode pour mesurer effectivement très précisément l'amplitude du champ radiofréquence.

Cette analyse permet donc d'expliquer la pente du déphasage en fonction du temps d'attente t_0 (Figure V.8 (b)), qui n'est pas comme dans le cas théorique au chapitre IV – où nous avons négligé l'effet Stark quadratique – simplement égale à $\delta\nu^{(1)} = 54,28 \pm 1,20$ kHz c'est-à-dire la variation d'effet Stark linéaire occasionnée par la variation δF_{st} de champ électrique. Grâce au système d'équations (V.10), on déduit par différence que la pente de $\Delta\phi_{RF}$ en fonction de t_0 , exprimée en unité de fréquence, vaut :

$$a = \delta\nu^{(1)} + (\tilde{k}_+ - \tilde{k}_-) \times \Delta\nu^{(2)}(F_{st}) \quad . \quad (\text{V.13})$$

Le différentiel d'effet Stark quadratique agit donc en sens contraire et vient réduire le taux de variation du déphasage avec le temps t_0 ($\Delta\nu^{(2)}(F_{st}) \leq 0$). Dans notre cas, le second terme, dû à l'effet Stark quadratique dans l'équation (V.13) vaut $-19,635$ kHz ce qui donne une pente de $+34,778$ kHz. La valeur du premier terme $\delta\nu^{(1)}$ de (V.13) étant fixée par la variation de champ électrique δF_{st} , on comprend qu'à cause de l'effet Stark quadratique la sensibilité de cette méthode quasi-classique d'électrométrie va être une fonction de Θ différente du $\sin \Theta$ dérivé pour un moment cinétique parfait au chapitre IV. En particulier, pour une certaine durée d'impulsion radiofréquence, le terme dû à l'effet Stark quadratique peut annuler exactement le terme linéaire $\delta\nu^{(1)}$ et le déphasage mesuré $\Delta\phi_{RF}$ sera constant quel que soit t_0 ! Afin de prolonger cette analyse, nous avons reproduit cette courbe du déphasage $\Delta\phi_{RF}$ en fonction de t_0 pour différentes durées d'injection τ_i .

V.2.4 Influence de la durée des impulsions radiofréquences τ_i

La Figure V.9 représente l'évolution du déphasage $\Delta\phi_{\text{RF}}$ en fonction du temps d'attente t_0 pour différentes durées τ_i des impulsions RF. Les données expérimentales correspondent aux points de couleur, noirs pour $\tau_1 = 91,0 \text{ ns}$, rouges pour $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$ et verts pour $\tau_3 = 276,1 \text{ ns}$. Les droites en trait plein sont les résultats de simulations dans les conditions de l'expérience pour une amplitude du champ radiofréquence de $\Omega_{\text{RF}}^{\sigma+} = 2\pi \times 1,61 \text{ MHz}$. On ajuste ainsi les simulations sur les données avec ce seul paramètre libre. Cette méthode est très précise pour avoir accès à la fréquence de Rabi du champ radiofréquence, car elle prend en compte un grand nombre de résultats pour différents temps d'injection du champ radiofréquence τ_i , $i = 1, 2$ et 3 . Les valeurs des pentes de ces simulations valent respectivement $a_1 = +54,16 \text{ kHz}$, $a_2 = +34,11 \text{ kHz}$ et $a_3 = -16,60 \pm 7,6 \text{ kHz}$. On constate par ailleurs le très bon accord des simulations avec l'ensemble des données réalisées pour différentes durées d'attente t_0 et pour des impulsions RF de différentes durées τ_i , $i = 1, 2$ et 3 .

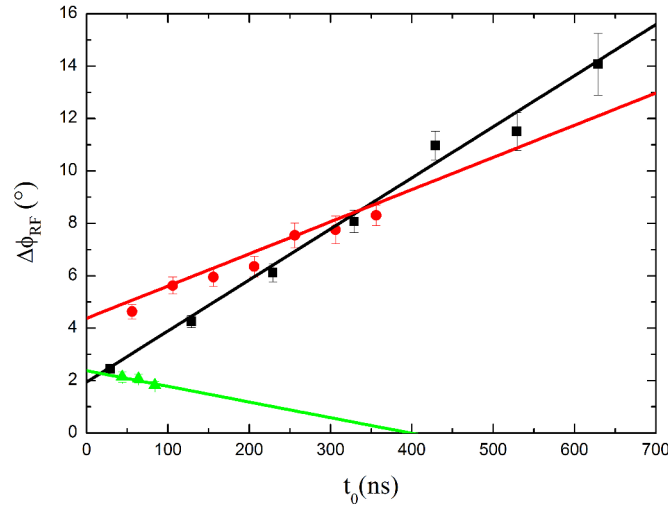


FIGURE V.9 – Évolution du déphasage $\Delta\phi_{\text{RF}}$ en fonction du temps d'attente t_0 pour différentes durées τ_i des impulsions radiofréquences. Les données expérimentales correspondent aux points de couleur, noirs pour $\tau_1 = 91,0 \text{ ns}$, rouges pour $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$ et verts pour $\tau_3 = 276,1 \text{ ns}$. Les droites en trait plein sont les résultats de simulations dans les conditions de l'expérience pour une amplitude du champ radiofréquence de $\Omega_{\text{RF}}^{\sigma+} = 2\pi \times 1,61 \text{ MHz}$. On note le très bon accord entre les données et les simulations.

Comme nous le pressentions plus haut, les pentes de ces déphasages dépendent de la durée d'injection radiofréquence τ_i qui détermine les positions relatives du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} . Grâce à l'équation (V.13), on déduit les valeurs $\delta_i \tilde{k} = \tilde{k}_+ - \tilde{k}_-$ pour une durée de l'impulsion τ_i : $\delta_1 \tilde{k} = 0,002$, $\delta_2 \tilde{k} = 0,29$ et $\delta_3 \tilde{k} = 0,86$. On constate que cet écart entre les valeurs moyennes $\langle \hat{\mathbf{J}}_{1,z}^{(50)} \rangle$ associées aux champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ augmente avec la durée de l'impulsion. L'effet cumulatif de l'effet Stark quadratique fait que plus le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$

parcourt de distance verticalement sur la sphère de Bloch (*ie* plus la durée de l'impulsion RF est longue), plus l'écart entre les valeurs moyennes $\langle \hat{J}_{1,z}^{(50)} \rangle$ associées aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ se creuse. Autrement dit, le terme $\delta_i \tilde{k} = \tilde{k}_+ - \tilde{k}_-$ de l'équation V.13 augmente avec la durée d'injection RF τ_i .

La Figure V.10 représente l'état du moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$ sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} aux trois instants τ_i . On voit sur les deux dernières sous-figures, associées à des impulsions radiofréquences de durée τ_2 et τ_3 , que le moment cinétique est pour ces deux durées d'injection quasiment à même colatitude. Dans le modèle du spin parfait, le déphasage accumulé lors de la phase d'attente, ne dépendant que de δF_{st} , serait le même. Ce n'est en réalité pas le cas, car l'effet Stark quadratique différentiel accumulé lors de la phase d'injection a une importance capitale. Comme on le visualise très bien sur la Figure V.10, les valeurs de $\delta_2 \tilde{k}$ et $\delta_3 \tilde{k}$, qui correspondent à la différence de latitude entre les points verts et rouges, sont très différentes. Pour comprendre le déphasage $\Delta\phi_{RF}$ en fonction du temps d'attente t_0 , il faut donc considérer la colatitude du moment cinétique lors de la phase d'attente et « l'histoire » du moment cinétique avant la phase d'attente (rotation \mathcal{R}_1).

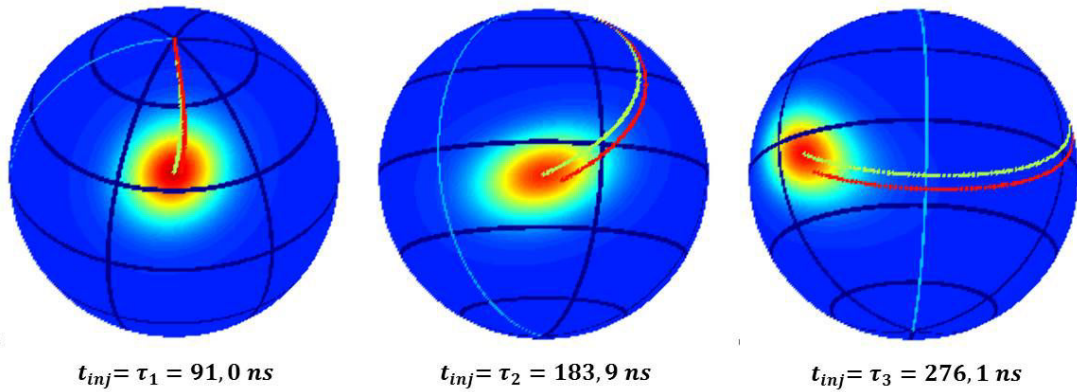


FIGURE V.10 – Positions comparées du moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$ aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ à l'issue de la première impulsion radiofréquence. On représente sur cette Figure la fonction Q du moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$ à l'issue de la première impulsion radiofréquence de différentes durées : (**à gauche**) $t_{inj} = \tau_1 = 91,0 \text{ ns}$, (**au centre**) $t_{inj} = \tau_2 = 183,9 \text{ ns}$, (**à droite**) $t_{inj} = \tau_3 = 276,1 \text{ ns}$. Les pointillés vert et rouge représentent le chemin suivi par le moment cinétique aux champs électriques de $F_{st} \mp \delta F_{st}/2$ respectivement.

En conclusion de cette partie qui s'attache à décrire le pendant quasi-classique de notre méthode de métrologie quantique, nous ne pouvons que constater l'effet délétère de l'effet Stark quadratique sur cette stratégie quasi-classique. Elle consiste en effet à mesurer le déphasage de la valeur moyenne du moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$ et nous avons vu que l'effet Stark quadratique venait jouer à contre-courant et réduisait la sensibilité de la méthode. En pratique cette méthode est, dans les conditions de notre expérience, loin de la limite quantique standard. Néanmoins, nous allons maintenant montrer que l'ajout de deux impulsions Ramsey micro-ondes en début et fin de séquence métrologique permet de

dépasser cette limite quantique standard et d'approcher la limite ultime de Heisenberg. Cette nouvelle stratégie consiste donc en la manipulation d'une superposition de deux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ de grandes tailles. Ce n'est donc plus la trajectoire du moment cinétique qui sera importante, mais la phase quantique χ accumulée entre les deux composantes de la superposition. L'effet néfaste de l'effet Stark quadratique sera ainsi bien moindre.

V.3 Métrologie quantique

Maintenant la dynamique quasi-classique du moment cinétique étudiée en détail, nous procédons à la séquence de métrologie quantique complète synthétisée graphiquement Figure IV.5 page 200. Par rapport à la séquence de métrologie quasi-classique de la partie précédente, il convient simplement d'ajouter les deux impulsions $\pi/2$ micro-ondes à $t_1 = 7,90 \mu\text{s}$ et $t_2 = 23,90 \mu\text{s}$ résonantes avec la transition $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$. La méthode de métrologie quantique consiste à mesurer la phase quantique χ accumulée entre les deux composantes de la superposition d'états du moment cinétique appartenant respectivement aux multiplicité $n_g = 50$ et $n_e = 51$. Cette phase quantique correspond donc à la phase du recouvrement entre l'état initial $|j, +j\rangle$ et l'état final $|\psi_f\rangle$ du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ à l'issue de la séquence $\mathcal{S} = \{ 1^{\text{ère}} \text{ impulsion RF, attente durant } t_0, 2^{\text{nde}} \text{ impulsion RF } \}$:

$$\langle j, +j | \psi_f \rangle = |\langle j, +j | \psi_f \rangle| e^{-i\chi} \quad . \quad (\text{V.14})$$

V.3.1 Mesure de la phase χ en fonction de la trajectoire de $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$

La Figure V.11 (a) représente le signal d'interférence obtenu en mesurant la probabilité $P(\phi_{\text{RF}})$ en fonction de la phase $\pi + \phi_{\text{RF}}$ de la seconde impulsion radiofréquence (rotation \mathcal{R}_2), pour des impulsions radiofréquences de durée $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$ et un temps d'attente fixe de $t_0 = 56,1 \text{ ns}$. La phase de la seconde impulsion micro-onde Ramsey, notée ϕ_{MW} , est ici nulle. Comme toujours, la séquence a été jouée aux deux champs électriques $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (points noirs) et $F_{st} + \delta F_{st}/2$ (points rouges). Les courbes en trait plein correspondent à un ajustement phénoménologique :

$$P_{\varphi_0}(\phi_{\text{RF}}) = P_0 + A_1 \exp \left[-2 \frac{(\phi_{\text{RF}} - \phi_{\text{RF}}^c)^2}{w_c^2} \right] + A_2 \exp \left[-2 \frac{(\phi_{\text{RF}} - \phi_{\text{RF}}^f)^2}{w_f^2} \right] \sin \left(\alpha (\phi_{\text{RF}} - \phi_{\text{RF}}^f) + \beta (\phi_{\text{RF}} - \phi_{\text{RF}}^f)^2 + \tilde{\phi}_{\text{RF}} \right) \quad (\text{V.15})$$

qui est formé d'un terme d'*offset* P_0 et de la somme de deux enveloppes gaussiennes dont une vient moduler des oscillations dont la fréquence est développée jusqu'au deuxième

ordre en ϕ_{RF} , plus un terme de déphasage $\tilde{\phi}_{\text{RF}}$. Nous justifierons dans quelques instants la forme de cet ajustement par une analyse précise des données présentées. Pour ces données, chacune des six séquences du tableau V.2 page 233 a été répétée 4 800 fois pour donner la valeur d'une paire de points aux deux champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ à ϕ_{RF} donné, ce qui représente au total 12 960 atomes par paire de points.

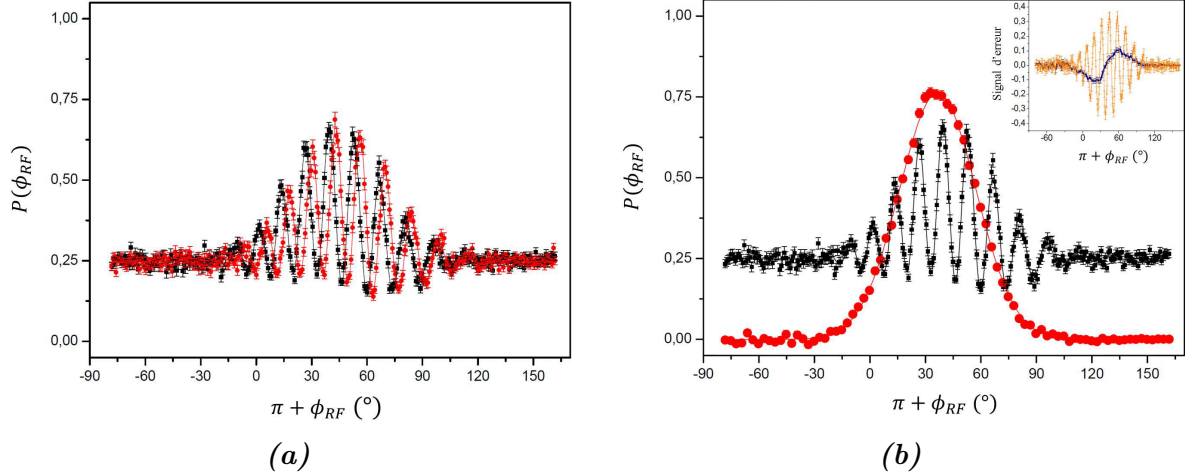


FIGURE V.11 – Métrologie quantique : Variation de la probabilité $P(\phi_{\text{RF}})$ en fonction de la phase $\pi + \phi_{\text{RF}}$ de la seconde impulsion radiofréquence (rotation \mathcal{R}_2). Les impulsions radiofréquences sont de durée $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$ et le temps d'attente est fixe $t_0 = 56,1 \text{ ns}$. La phase de la seconde impulsion micro-onde Ramsey, notée ϕ_{MW} , est ici nulle. **(a)** La séquence a été jouée aux deux champs électriques $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (points noirs) et $F_{st} + \delta F_{st}/2$ (points rouges). Les courbes en trait plein correspondent à un ajustement phénoménologique par la fonction (V.15). **(b)** Comparaison des méthodes quasi-classique et quantique. Pour un champ de $F_{st} - \delta F_{st}/2$, on reporte sur une même figure la mesure du recouvrement avec l'état initial en présence (courbe noire) ou non (courbe rouge) des deux impulsions micro-ondes $\pi/2$. En encart, une comparaison d'un signal d'erreur correspondant à la soustraction brute des signaux $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ dans le cas quasi-classique (points bleus) et quantique (points oranges) reliés entre eux par des droites pour guider l'œil.

La probabilité $P(\phi_{\text{RF}})$ révèle une figure d'interférence dont les oscillations traduisent la rapide variation de la phase quantique χ avec la phase ϕ_{RF} . La norme $|\langle j, +j | \psi_f \rangle|$ qui varie avec la phase de retour ϕ_{RF} vient moduler les franges d'interférence. Le fond de probabilité, noté P_0 dans l'équation (V.15), s'élève à 0,25. En effet, quand le moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$ ne retourne pas près du pôle Nord de la sphère \mathcal{B}_{50} , il ne contribue plus au signal, son recouvrement avec l'état initial étant nul. Néanmoins, la moitié des 50% de la population totale « stockée » dans la multiplicité $n_e = 51$, soit 25% de la population initiale, retourne dans le niveau initial $|j, +j\rangle$ lors de la seconde impulsion micro-onde Ramsey. Finalement, on note que la variation de champ électrique δF_{st} engendre un déphasage d'environ un quart de la période d'oscillation.

La Figure V.11 (b) permet de comparer les signaux obtenus par les méthodes quasi-classique (points rouges) et quantique (points noirs). La période des oscillations de la phase quantique est bien inférieure à la largeur du signal gaussien quasi-classique. De

manière cruciale, malgré une réduction du contraste des franges due à la décohérence, la variation du signal d'interférence δP maximale engendrée par la variation δF_{st} de champ électrique demeure plus importante que celle du signal gaussien. Ceci peut se visualiser dans l'encart à la Figure V.11 (b), où l'on soustrait les signaux obtenus à $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ dans les cas quasi-classique (points bleus) et quantique (points orange). L'amplitude de ce signal d'erreur permettant de comparer qualitativement les deux approches, on constate que la sensibilité $\delta P_{\varphi_0}^{max}/\delta F_{st}$ est plus de deux fois meilleure sur le signal d'erreur de métrologie quantique que sur celui associé à la stratégie quasi-classique.

On remarque de plus une asymétrie de la figure d'interférence qu'il convient ici d'analyser. L'analyse *in extenso* du signal d'interférence constituera l'objet de la partie suivante et justifiera *in fine* la forme de la fonction d'ajustement phénoménologique (V.15) proposée plus haut.

V.3.2 Analyse du signal d'interférence

Les signaux d'interférence obtenus aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ et présentés à la section précédente sont des fonctions sinusoïdales, dont nous allons déterminer l'amplitude $\mathcal{A}(\phi_{RF})$ et la phase $\chi(\phi_{RF})$ (ainsi que le fond $\mathcal{C}(\phi_{RF})$). Pour obtenir ces grandeurs, on mesure un signal similaire à celui présenté à la Figure V.11, mais pour quatre¹ valeurs de la phase ϕ_{MW} de la seconde impulsion micro-onde Ramsey. La Figure V.12 (a) représente sur un même graphique les franges d'interférence obtenues par la mesure de $P(\phi_{RF})$ pour $\phi_{MW} = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$ au champ² $F_{st} - \delta F_{st}/2$. La Figure V.12 (b) représente, pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, l'évolution de la phase χ en fonction de la phase ϕ_{RF} . La Figure V.12 (c) représente le déphasage $\delta\chi(\phi_{RF})$ obtenu par soustraction des phases $\chi(\phi_{RF})$ aux deux champs électriques, venant d'être présentées à la Figure V.12 (b). Finalement, l'amplitude (crête à crête) $\mathcal{A}(\phi_{RF})$ du signal d'interférence pour le champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$ est représenté à la Figure V.12 (d), en comparaison avec le signal quasi-classique gaussien au même champ électrique.

Sur la Figure V.12 (b), les points carrés orange correspondent à la mesure de la phase des franges d'interférence pour un champ de $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et les points ronds bleus pour le champ $F_{st} + \delta F_{st}/2$. Les courbes en trait plein correspondent à l'évolution quadratique de la phase extraite du meilleur ajustement phénoménologique des franges réalisées à $\phi_{MW} = 0$

1. En théorie seules trois valeurs de la phase ϕ_{MW} sont nécessaires pour accéder aux amplitudes $\mathcal{A}(\phi_{RF})$, phase $\chi(\phi_{RF})$ et fond $\mathcal{C}(\phi_{RF})$ du signal d'interférence.

2. Pour les quatre figures dont nous allons discuter, la variation δF_{st} est de l'ordre du mV/cm et le champ $F_{st} - \delta F_{st}/2 = 5,505079$ V/cm tel que la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ soit résonante avec le champ radiofréquence à 530 MHz. Cette légère différence ne change en rien l'analyse qualitative des franges d'interférence qui va suivre.

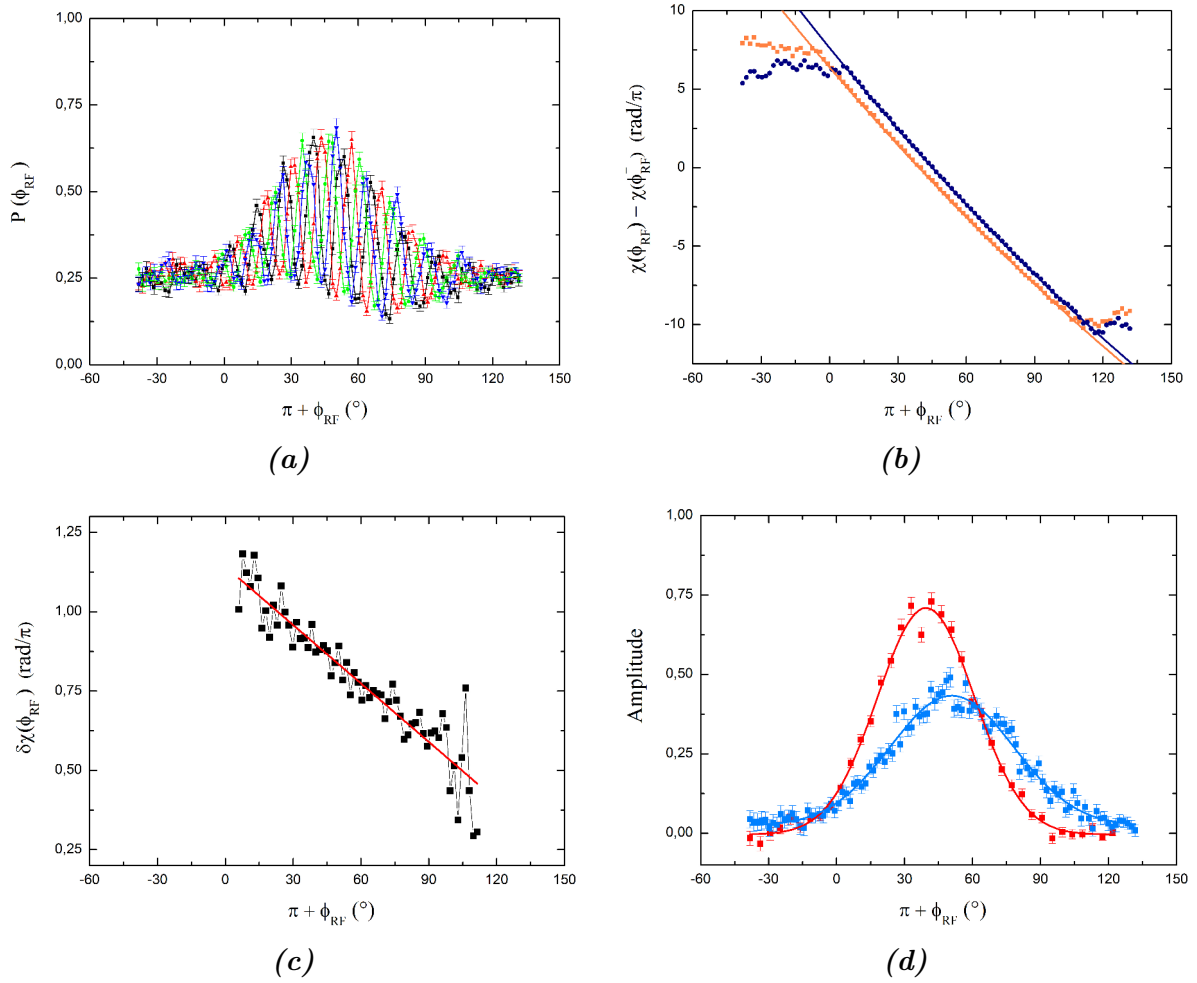


FIGURE V.12 – Analyse de l'amplitude et de la phase du signal d'interférence. Les impulsions radiofréquences sont de durée $\tau_2 = 183,9$ ns. **(a)** Pour un champ électrique donné, franges d'interférence obtenues par la mesure de la probabilité $P(\phi_{RF})$ en fonction de la phase ϕ_{RF} de la seconde impulsion radiofréquence, pour des phases de la seconde impulsion micro-onde Ramsey de $\phi_{MW} = 0$ (courbe noire), $\phi_{MW} = \frac{\pi}{2}$ (courbe rouge), $\phi_{MW} = \pi$ (courbe verte) et $\phi_{MW} = \frac{3\pi}{2}$ (courbe bleue). **(b)** Phase relative $\chi(\phi_{RF}) - \chi(\phi_{RF}^-)$ en unité de π des franges d'interférence pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, où ϕ_{RF}^- correspond à la phase de la seconde impulsion radiofréquence qui maximise le recouvrement au champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$. Les courbes en trait plein correspondent aux termes de phase extraits des ajustements phénoménologiques (V.15) des franges d'interférence aux deux champs. **(c)** Déphasage $\delta\chi(\phi_{RF})$ en unité de π obtenu par soustraction des phases $\chi(\phi_{RF})$ aux deux champs électriques, venant d'être présentées en Figure V.12 (b). L'ajustement linéaire donne $\delta\chi(\phi_{RF}) = 1,14 - 0,0061 \times \phi_{RF}$. **(d)** Amplitude crête à crête $\mathcal{A}(\phi_{RF})$ du signal d'interférence pour le champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$, en comparaison avec le signal quasi-classique gaussien. Les courbes en trait plein correspondent aux meilleurs ajustements gaussiens.

par l'équation (V.15). On remarque le très bon accord entre notre modèle d'ajustement et les phases extraites des quatre jeux de franges d'interférence de la Figure V.12 (a). On observe ainsi que la phase du signal d'interférence n'évolue pas de manière linéaire avec la phase de la seconde impulsion radiofréquence. On peut en effet observer directement sur le signal d'interférence que les franges de la Figure V.11 (a) oscillent en réalité plus rapidement à gauche qu'à droite; ceci s'observe plus aisément sur la Figure V.11. Cela

veut donc dire que sur la fenêtre angulaire où le recouvrement entre l'état $|\psi_f\rangle$ et l'état initial $|j, +j\rangle$ est non nul, soit pour $\pi + \phi_{\text{RF}} \in [0^\circ, 120^\circ]$ environ, la sensibilité n'est pas constante.

Un premier élément d'explication vient du fait que l'état du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ n'est plus, à la fin de la durée d'attente t_0 , dans un état cohérent de spin. On sait en effet que l'effet Stark quadratique, jouant le rôle d'un hamiltonien en \hat{J}_z^2 , vient distordre la forme de l'état cohérent de spin. Lors de la phase d'attente, la dispersion angulaire de l'état se réduit dynamiquement dans une certaine direction (*dynamical squeezing*), tout en augmentant dans la direction perpendiculaire, processus vérifiant bien le principe d'Heisenberg à chaque instant. Pour le champ électrique $F_{st} - \delta F_{st}/2$, la Figure V.13 est le résultat de simulations, prenant en compte l'ensemble des conditions expérimentales, qui représentent la fonction Q du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ au début de la phase d'attente (**à gauche**), après 56,1 ns d'attente (**au centre**) et après 156,1 ns d'attente (**à droite**). On remarque sur cette Figure que l'effet Stark quadratique fait avancer plus rapidement la partie la plus au sud de l'état cohérent de spin, conduisant, au cours de la phase d'attente, à une compression dynamique de l'état du moment cinétique. L'état qui, sous l'effet de la seconde impulsion radiofréquence, remonte au pôle Nord de la sphère de Bloch n'est plus un état cohérent de spin. N'étant plus un état cohérent, il devient justifié de s'intéresser à la trajectoire différentielle parcourue par les points représentés en bleu et violet sur la Figure V.13. Des simulations, présentées en annexe I, montre alors que pour les faibles angles ϕ_{RF} ($\phi_{\text{RF}} < \phi_{\text{RF}}^{(-)}$), c'est la partie de l'état du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ qui est passée

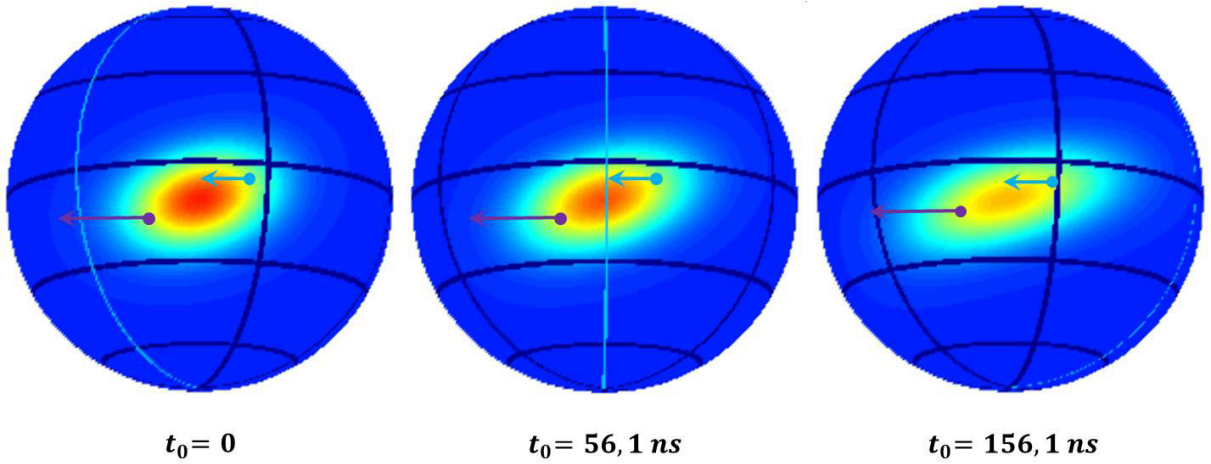


FIGURE V.13 – Compression dynamique de l'état du moment cinétique durant la phase d'attente. Pour le champ électrique $F_{st} - \delta F_{st}/2$, la fonction Q de l'état du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ est représentée sur la sphère de Bloch généralisée \mathcal{B}_{50} au début de la phase d'attente $t_0 = 0$ ($t = \tau_2$), après $t_0 = 56,1 \text{ ns}$ d'attente ($t = \tau_2 + t_0 = 240 \text{ ns}$) et après $t_0 = 156,1 \text{ ns}$ d'attente ($t_2 = \tau_2 + t_0 = 340 \text{ ns}$). Les longueurs différentes des flèches bleues et violettes schématisent le fait que la partie la plus au sud tourne autour de l'axe (Oz) plus vite que la partie au nord. Ceci est dû à l'effet Stark quadratique qui joue le rôle d'un hamiltonien en \hat{J}_z^2 .

le plus au sud de la sphère de Bloch qui possède un recouvrement non nul avec l'état $|j, +j\rangle$. Pour des angles ϕ_{RF} plus grands ($\phi_{\text{RF}} > \phi_{\text{RF}}^{(-)}$), c'est la partie qui est demeurée le plus au nord qui possède un recouvrement non nul. La Figure V.14 résume cet effet en représentant la fonction Q de l'état du moment cinétique à l'issue de la seconde impulsion radiofréquence pour trois valeurs de l'angle $\phi_{\text{RF}} : \pi + \phi_{\text{RF}} = 25^\circ, 40^\circ$ et 55° . Les points de couleur correspondent aux mêmes « régions » de la fonction Q que sur la Figure V.13.

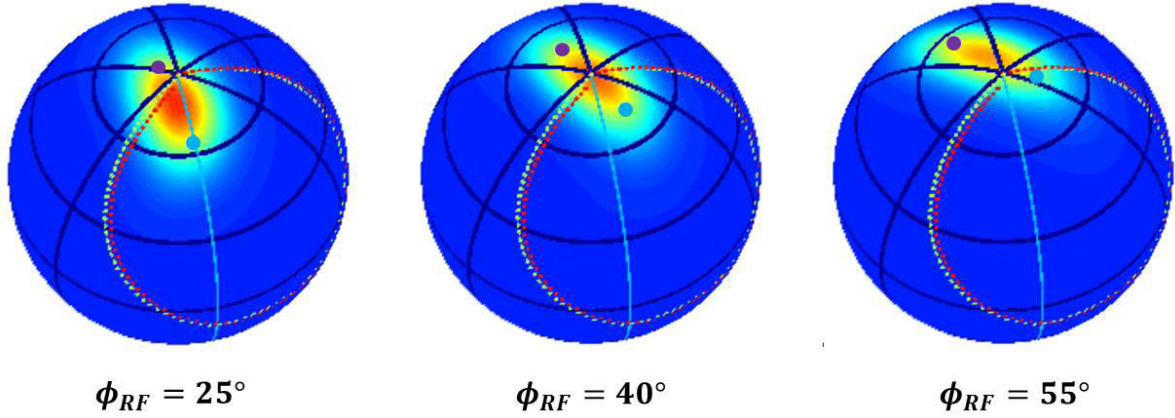


FIGURE V.14 – Évolution du recouvrement $\langle j, +j | \psi_f \rangle$. On représente la fonction Q du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ au champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$ à l'issue de la seconde impulsion radiofréquence pour trois valeurs de l'angle $\phi_{\text{RF}} : \pi + \phi_{\text{RF}} = 25^\circ, 40^\circ$ et 55° . Les points de couleur correspondent aux mêmes « régions » de la fonction Q que sur la Figure V.13. Pour les petits angles ϕ_{RF} ($\phi_{\text{RF}} < \phi_{\text{RF}}^{(-)}$), c'est la partie qui a effectué le chemin le plus au sud (point violet) qui possède un recouvrement non nul avec l'état initial $|j, +j\rangle$. C'est la raison pour laquelle les franges d'interférence oscillent plus vite pour ces angles ϕ_{RF} .

L'origine de l'évolution quadratique de la phase $\chi(\phi_{\text{RF}})$ est donc bien comprise. Ceci a pour conséquence que le déphasage $\delta\chi(\phi_{\text{RF}})$ varie linéairement avec la phase ϕ_{RF} . En effet, comme on peut le voir sur la Figure V.12 (c), le déphasage de π pour $\pi + \phi_{\text{RF}} \approx 20^\circ$ ne vaut plus que $\pi/2$ pour $\pi + \phi_{\text{RF}} \approx 100^\circ$. Ceci veut dire que la sensibilité au champ électrique dépend de la phase de la radiofréquence ϕ_{RF} , comme nous l'avons déjà dit. Le déphasage $\delta\chi(\phi_{\text{RF}})$ étant plus important pour les petits angles ϕ_{RF} , on conclut que les franges sur la gauche de la figure d'interférence à la Figure V.11 (a) sont plus sensibles au champ électrique que celles sur la droite. A cause des effets de la décohérence induite par inhomogénéité de champ électrique, cette sensibilité plus importante va avoir un effet sur le contraste des franges qui en sera d'autant plus réduit.

C'est ce que l'on observe à la Figure V.12 (d), qui représente l'amplitude $\mathcal{A}(\phi_{\text{RF}})$ des signaux d'interférence présentés à la Figure V.12 (a) (points bleus). On remarque que le maximum d'amplitude n'a pas la même position que dans le cas quasi-classique (points rouges), c'est-à-dire que la phase de retour de la seconde impulsion radiofréquence permettant d'obtenir le meilleur recouvrement n'optimise pas l'amplitude des franges d'interférence. Cette différence est loin d'être négligeable : on mesure par différence des valeurs

centrales des meilleurs ajustements gaussiens un écart de $11,4^\circ$ qui correspond sur le signal quasi-classique à une réduction de $13,5\%$ sur signal mesuré. A cause de la variation linéaire de la sensibilité avec la phase ϕ_{RF} , l'amplitude crête à crête du signal d'interférence correspond à la racine carrée du signal quasi-classique convolué par cette variation linéaire de la sensibilité en phase. Ceci conduit à une gaussienne de moindre amplitude et décalée vers les angles pour lesquels la sensibilité est moindre (Figure V.12 (b)).

Cet effet de réduction de contraste est bien un effet de l'environnement expérimental qui présente des inhomogénéités de champ électrique. Afin de s'assurer de ce fait, on réalise des simulations numériques présentées Figure V.15, où l'on compare les signaux d'interférence issus de simulations réalisées sans inhomogénéités de champ électrique, avec (Figure V.15 (a)) ou sans (Figure V.15 (b)) effet Stark quadratique. La comparaison de ces deux simulations prouve bien que l'effet Stark quadratique est à l'origine de la compression de l'état cohérent de spin durant la phase d'attente - entre autre - et fait osciller les franges plus rapidement aux faibles phases ϕ_{RF} . Cependant en l'absence d'inhomogénéités de champ électrique, cette sensibilité qui évolue avec ϕ_{RF} n'a pas d'influence sur le contraste des franges qui restent symétriques.

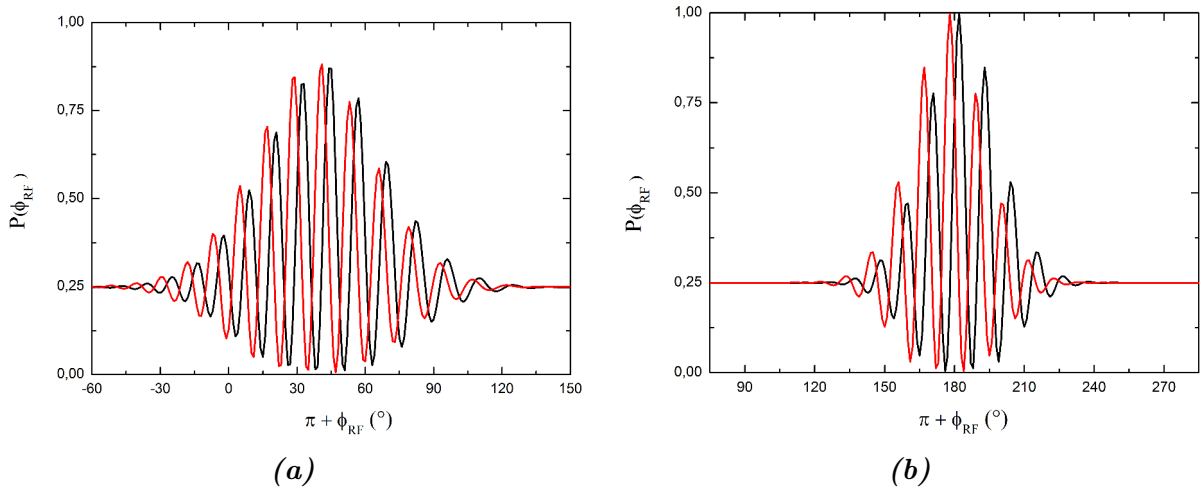


FIGURE V.15 – Figure d'interférence et effet Stark quadratique. (a) Simulations numériques en l'absence d'inhomogénéités de champ électrique du signal d'interférence présenté Figure V.11 page 249. (b) Idem en l'absence d'effet Stark quadratique (modèle du moment cinétique parfait).

Cette analyse de l'amplitude et de la phase du signal d'interférence a permis de mieux comprendre la forme de ce signal et justifie donc le choix de notre ajustement phénoménologique (V.15). Nous allons cependant préférer à ce signal quelque peu complexe, un signal équivalent, où cette fois-ci la phase de la seconde impulsion radiofréquence $\pi + \phi_{\text{RF}}$ restera fixe et où la phase de la seconde impulsion micro-onde ϕ_{MW} sera balayée. En somme, nous réaliserons dans la partie suivante une expérience d'interférométrie Ramsey micro-onde, afin de mesurer directement le déphasage $\delta\chi$ de la phase quantique dû à une variation

δF_{st} de champ électrique. Ceci nous permettra d'évaluer de manière plus aisée le gain de notre méthode de métrologie quantique par rapport à la limite quantique standard.

V.3.3 Sensibilité de la méthode de métrologie quantique

Nous allons commencer par présenter un signal de franges de Ramsey micro-ondes et par vérifier que le déphasage $\delta\chi$ est bien linéaire avec δF_{st} , pour des variations de champ électrique de quelques $\mu\text{V}/\text{cm}$. Pour ce faire, on mesure la probabilité d'occupation du niveau initial $|j, +j\rangle$, notée $P(\phi_{\text{MW}})$, en fonction de la phase ϕ_{MW} de la seconde impulsion micro-onde Ramsey à $t_2 = 23,9 \mu\text{s}$, cela pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. La phase de la seconde impulsion radiofréquence est fixée de sorte qu'elle maximise la norme du recouvrement au champ de référence F_{st} : $\phi_{\text{RF}} = \phi_{\text{RF}}^{(0)} = [\phi_{\text{RF}}^{(+)} + \phi_{\text{RF}}^{(-)}]/2$. La Figure V.16 (a) représente les franges centrales d'interférence obtenues en faisant varier la fréquence relative du champ micro-onde par rapport à la fréquence de la transition atomique $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$. Pour une durée fixe entre les deux impulsions micro-ondes, une légère variation de la fréquence du champ micro-onde des deux impulsions produit au premier ordre un déphasage entre ces deux impulsions. Les courbes en trait plein correspondent aux meilleurs ajustements sinusoïdaux des données expérimentales à $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (points noirs) et $F_{st} + \delta F_{st}/2$ (points rouges). La durée de l'impulsion radiofréquence est ici de $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$ et le temps d'attente est évalué à $t_0 = 56,1 \text{ ns}$. Les points orange correspondent au signal d'interférométrie Ramsey micro-onde « simple », c'est-à-dire en l'absence des deux impulsions radiofréquences de métrologie.

Pour une variation $\delta F_{st} = 561 \pm 13 \mu\text{V}/\text{cm}$, on observe un déphasage des franges d'interférence de $0,543 \pm 0,004 \text{ rad}/\pi$ ce qui est 20,99 fois plus grand que le déphasage des deux signaux gaussiens quasi-classiques présentés Figure V.6 page 241. Ce déphasage $\delta\chi$ est donc environ j fois plus grand que le déphasage quasi-classique. On note par ailleurs une nette diminution du contraste des franges d'interférence en comparaison des franges obtenues par interférométrie sans impulsion radiofréquence (points orange). Cette réduction de contraste due aux effets de décohérence lors de l'application des impulsions radiofréquences et du temps d'attente t_0 , où l'atome est dans une superposition d'états de grande taille, sera discutée en fin de chapitre. Néanmoins, on peut déjà dire qu'une partie de cette réduction de contraste est justement due à la grande sensibilité de notre méthode de métrologie dans un environnement où persistent des inhomogénéités de champ électrique.

On vérifie par ailleurs la dépendance linéaire du déphasage $\delta\chi$ avec la variation de champ électrique δF_{st} . La Figure V.16 (b) présente le déphasage des franges d'interférence mesuré expérimentalement en fonction du champ électrique traduit en termes

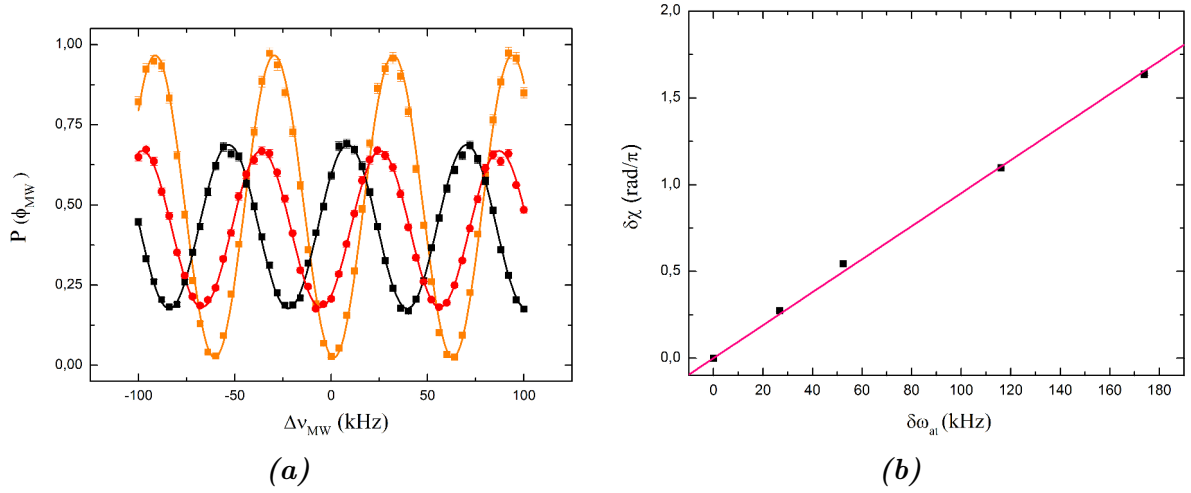


FIGURE V.16 – Métrologie quantique : Signal interférométrique Ramsey. **(a)** La phase de la seconde impulsion radiofréquence est fixée telle qu'elle maximise la norme du recouvrement au champ F_{st} ($\phi_{RF} = \phi_{RF}^{(0)} = (\phi_{RF}^{(+)} + \phi_{RF}^{(-)})/2$) et nous faisons varier la phase ϕ_{MW} de la seconde impulsion micro-onde Ramsey à $t_2 = 23,9 \mu s$. En noir, les franges centrales au champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$, en rouge, les franges centrales au champ $F_{st} + \delta F_{st}/2$ et en orange le signal d'interférométrie Ramsey micro-onde en l'absence des deux impulsions radiofréquences de métrologie, ainsi que leurs meilleurs ajustements sinusoidaux en traits pleins. **(b)** Mesure du déphasage $\delta\chi$ des franges d'interférence en fonction de la variation de champ électrique δF_{st} exprimée en unité de fréquence et mesurée indépendamment par interférométrie Ramsey sur la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$, comme présentée dans l'annexe G.

de fréquence et calibré indépendamment par interférométrie Ramsey sur la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$, comme présenté dans l'annexe G. La pente de l'ajustement linéaire permet de déduire la quantité $\partial\chi/\partial\omega_{at}$ intervenant dans le calcul de la sensibilité de la méthode :

$$2\pi \times \left. \frac{\partial\chi}{\partial\omega_{at}} \right|_{\tau_2, t_0=56,1 \text{ ns}} = 29,86 \pm 0,48 \text{ rad/Hz} \quad . \quad (V.16)$$

Pour les données de métrologie quantique présentées à la Figure V.16, la durée des impulsions radiofréquences et le temps d'attente t_0 étaient fixés : $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$ et $t_0 = 56,1 \text{ ns}$. Comme décrit théoriquement au chapitre IV, si l'on augmente le temps d'attente, l'aire différentielle balayée par les moments cinétiques aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ va croître, augmentant ainsi le déphasage $\delta\chi$. Afin de rendre cette analyse plus quantitative, nous répétons la mesure de ce déphasage $\delta\chi$ pour différentes durées d'attente t_0 . La Figure V.17 représente les résultats de la mesure de la quantité $\partial\chi/\partial F_{st}$ en fonction du délai t_0 entre les deux impulsions radiofréquences dans le cas d'impulsion de durée τ_1 (carrés noirs), τ_2 (ronds rouges) et τ_3 (triangles verts). Les droites en traits pleins sont des simulations numériques dans les conditions de l'expérience (sans paramètre libre). On constate le très bon accord entre l'expérience et nos simulations. Les droites en pointillé correspondent au modèle du moment cinétique idéal en l'absence d'ef-

et Stark quadratique. Dans le cadre de ce modèle idéal, nous avons calculé au chapitre IV que :

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial F_{st}} \right|_{\tau_i} = j (1 - \cos \Theta_i) \times \left. \frac{\partial \omega_{at}}{\partial F_{st}} \right|_{\tau_i} t_0 \quad . \quad (\text{V.17})$$

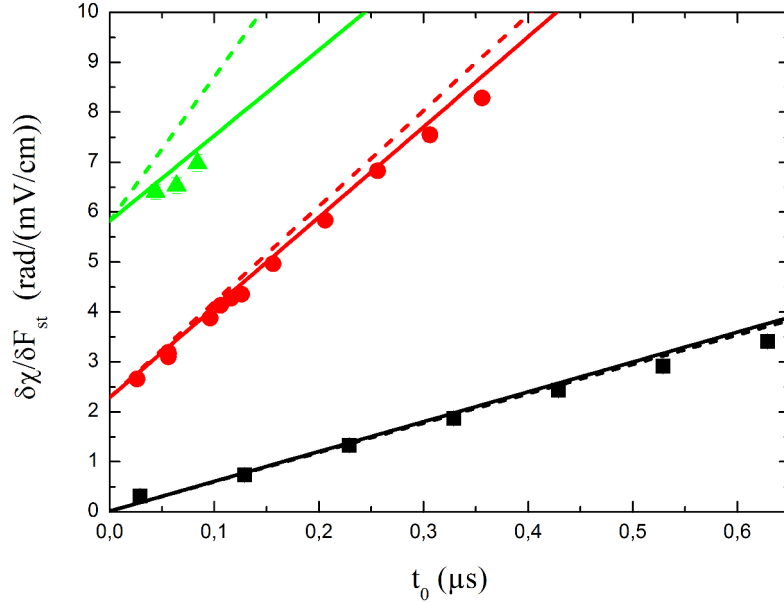


FIGURE V.17 – Métrologie quantique : Influence du temps d'attente t_0 et de la durée d'injection radiofréquence τ_i . On mesure le déphasage $\delta\chi$ des franges de Ramsey dû à une variation de champ électrique δF_{st} en fonction de la durée d'attente t_0 , cela pour différentes durées des impulsions radiofréquences τ_i . Les droites en traits pleins sont des simulations numériques dans les conditions de l'expérience et les droites en pointillé correspondent au modèle du spin parfait (sans effet Stark quadratique). Les droites en trait plein noire, rouge et verte, associées respectivement à des durées d'injection τ_i , $i = 1, 2$ et 3 , ont des pentes de $5,97 \text{ rad mV}^{-1} \text{ cm } \mu\text{s}^{-1}$, $18,1 \text{ rad mV}^{-1} \text{ cm } \mu\text{s}^{-1}$ et $17,1 \text{ rad mV}^{-1} \text{ cm } \mu\text{s}^{-1}$. Les ordonnées à l'origine des droites en pointillé ont été arbitrairement égalisées à celles des droites en trait plein correspondantes. Les pentes de ces droites sont calculées à partir de l'équation (V.17) avec $\Theta_i = \Omega_{RF}^{\sigma+} \cdot \tau_i = 52,7^\circ$; $106,6^\circ$ et $160,0^\circ$.

On observe ici que la sensibilité en phase $\partial\chi/\partial F_{st}$ augmente linéairement avec le temps d'attente t_0 avec une pente d'autant plus grande que l'impulsion radiofréquence est longue, comme nous nous y attendions depuis l'interprétation du déphasage $\delta\chi$ en termes d'aire sur la sphère de Bloch généralisée présentée au chapitre IV. On note par ailleurs en comparant les courbes en pointillé et en trait plein que l'effet Stark quadratique n'a pas une influence importante sur la sensibilité de la méthode pour les durées τ_1 et τ_2 d'injection. Nous avons déjà fait cette remarque auparavant en comparant les trajectoires du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ à la fin du chapitre IV. Néanmoins, si les trajectoires du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sont affectées par l'effet Stark quadratique, ce qui modifie la colatitude Θ à laquelle la phase d'attente s'effectue, il n'en demeure pas moins, comme nous allons le montrer de suite, que nous mesurons une sensibilité qui évolue en $j' = j(1 - \cos \Theta)$, c'est-à-dire linéairement avec la taille de la superposition d'états qui vient sonder le champ électrique.

La Figure V.18 présente la pente de la sensibilité de la phase avec le champ électrique $\partial\chi/\partial F_{st}(t_0)$ pour les trois tailles de *Chat de Schrödinger* associée aux durées d'injection RF τ_i , $i = 1, 2$ et 3. A partir de l'analyse menée à la section V.2.3 sur les signaux de métrologie

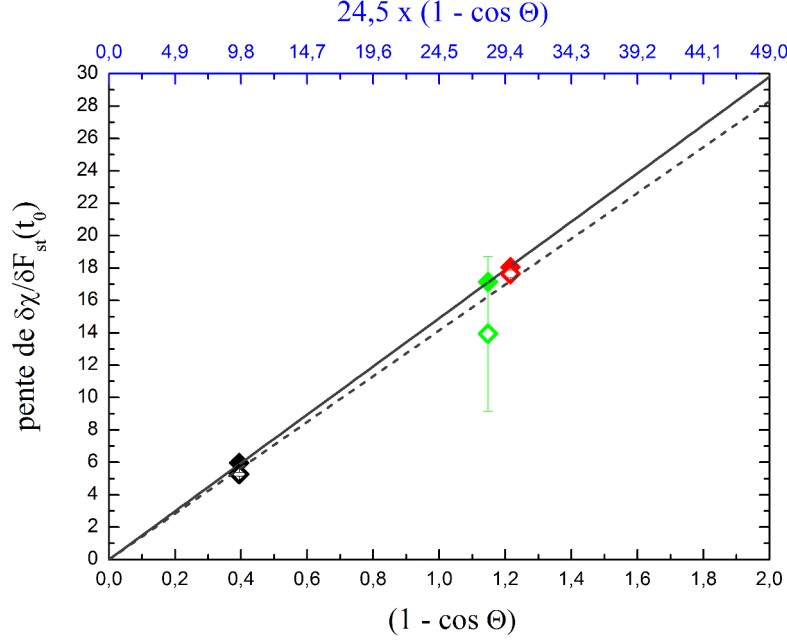


FIGURE V.18 – Évolution de la sensibilité de la phase χ en fonction de la taille de la superposition d'états du moment cinétique. On extrait par ajustement linéaire des données présentées Figure V.17 les pentes de $\partial\chi/\partial F_{st}$ en fonction de t_0 pour les trois durées d'injection τ_i , $i = 1, 2$ et 3 (points noirs, rouges et verts respectivement). La pente des droites $\partial\chi/\partial F_{st}(t_0)$ est soit extraite des simulations (points pleins) ou issue de l'ajustement linéaire de nos mesures (points creux). L'abscisse des points est calculée à partir des données expérimentales (signaux de métrologie quasi-classique) comme expliqué précédemment à la section V.2.3. Les deux droites en trait plein et pointillé correspondent aux meilleurs ajustements linéaires passant par l'origine.

quasi-classique, on obtient les colatitudes Θ auxquelles se trouve expérimentalement le moment cinétique à l'issue de la première impulsion radiofréquence pour les trois durées d'injection τ_i , $i = 1, 2$ et 3. Ces valeurs donnent les abscisses des points présentés à la Figure V.18. Pour les ordonnées de ces points, on peut décider – vu le très bon accord de nos simulations et de nos mesures – d'utiliser soit la pente des droites $\partial\chi/\partial F_{st}(t_0)$ issues des simulations (points pleins), soit d'ajuster linéairement les mesures de la Figure V.17 et d'en extraire les pentes (points creux). Le point creux vert associé à une injection d'une durée τ_3 est issu de l'ajustement linéaire de seulement trois points (voir Figure V.17), ce qui est à l'origine de cette grande barre d'erreur. Néanmoins, les points creux noirs et rouges pour des durées d'injection τ_1 et τ_2 sont très proches des points pleins. L'ajustement linéaire par une droite passant par l'origine confirme que la sensibilité évolue linéairement en $j' = j(1 - \cos \Theta)$ avec $j = 24,53 \pm 0,08$, ce qui est en accord avec la taille du moment cinétique que nous manipulons : $j = 49/2$. L'ajustement linéaire des données expérimentales (droite en pointillé) est de pente proportionnelle à $j = 23,29 \pm 0,6$.

On note par ailleurs que ce déphasage $\delta\chi$ mesuré n'est pas strictement nul pour $t_0 = 0$, ceci est particulièrement vrai pour les plus longues durées de l'impulsion radiofréquence (points rouges et verts). Ce déphasage à l'origine est dû à la puissance finie de l'impulsion radiofréquence. Durant la durée de la première impulsion radiofréquence, le désaccord existant entre les fréquences atomiques et le champ radiofréquence fait que les trajectoires du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ sur la sphère de Bloch \mathcal{B}_{50} sont légèrement différentes pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$. Ainsi, même pour une durée d'attente $t_0 = 0$, il existe une variation de l'aire entourée par le chemin du moment cinétique dû à la variation de champ électrique δF_{st} , ce qui se traduit formellement par un déphasage à l'origine $\delta\chi_0$. On écrit donc :

$$\delta\chi = \delta\chi_0 + \alpha_S t_0 \quad , \quad (\text{V.18})$$

dont on extrait les paramètres $\delta\chi_0$ et α_S par ajustement linéaire des données. La phase $\alpha_S t_0$ correspond au déphasage que nous aurions mesuré si la variation du champ électrique avait uniquement lieu durant le temps t_0 entre les deux impulsions radiofréquences.

Pour finir d'analyser l'évolution de la sensibilité de la phase χ au champ électrique en fonction du temps d'attente t_0 (Figure V.17), il faut noter que l'effet Stark quadratique ne vient pas seulement affecter la trajectoire du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$. Les énergies des niveaux $|50c\rangle = |j, +j\rangle$ et $|51c\rangle = |j', +j'\rangle$ elles mêmes ne sont pas totalement insensibles au champ électrique. Un changement d'une quantité $\delta F_{st} = 561 \mu\text{V/cm}$ provoque une variation de $\delta\omega^{(2)} = -2\pi \times 1,58 \pm 0,10 \text{ kHz}$ de la transition $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$. Cette valeur est mesurée par interférométrie Ramsey micro-onde sur cette transition pour deux impulsions micro-ondes à $t_1 = 7,90 \mu\text{s}$ et $t_2 = 23,90 \mu\text{s}$. Les franges de Ramsey sont présentées pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}$ en Figure V.19. Ce déplacement (négatif) en énergie réduit le déphasage $\delta\chi$ d'environ $\delta\omega^{(2)}(t_2 - t_1) = 0,02528 \text{ rad}$. Le déphasage observé Figure V.17 est donc en réalité la somme de la variation de phase géométrique due à l'incrément de champ électrique δF_{st} , accumulée par le moment cinétique lors de sa trajectoire sur \mathcal{B}_{50} , et de la phase dynamique différentielle de la transition $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$. Néanmoins, le déphasage additionnel (négatif) ne dépend pas de t_0 et est donc inclus dans le déphasage à l'origine $\delta\chi_0$.

Malgré l'effet Stark quadratique qui introduit quelques corrections par rapport au modèle du spin parfait, la rapide variation du déphasage $\delta\chi$ avec la durée d'attente t_0 montre clairement que la méthode peut être utilisée pour mesurer d'infimes variations de la valeur du champ électrique. Nous rapporterons les résultats d'une telle mesure résolue en temps dans la prochaine partie.

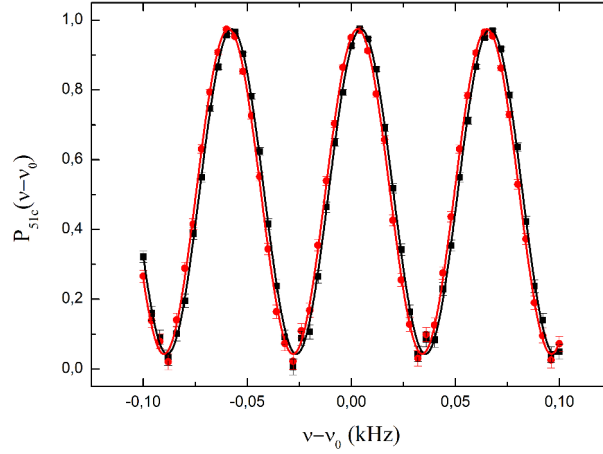


FIGURE V.19 – Franges de Ramsey micro-ondes sur la transition $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$ (aucune impulsion radiofréquence) aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}$. Les deux impulsions micro-ondes ont lieu à $t_1 = 7,90 \mu\text{s}$ et $t_2 = 23,90 \mu\text{s}$. On mesure un décalage des franges de $1,58 \pm 0,10 \text{ kHz}$.

V.3.4 Comparaison avec la SQL et la limite d’Heisenberg

La meilleure stratégie pour mesurer un champ électrique par la méthode de métrologie quantique consiste donc à choisir la phase $\phi_{\text{MW}}^{\text{opt}}$ pour être exactement à mi-frange du signal sinusoïdal d’interférence au champ électrique de référence F_{st} . Comme toujours la phase de la seconde impulsion radiofréquence est choisie de sorte à optimiser le recouvrement de l’état final $|\psi_f\rangle$ avec l’état initial $|j, +j\rangle$ au champ F_{st} . Pour un temps d’attente donné, on mesure la variation du signal $P(\phi_{\text{MW}}^{\text{opt}})$ pour estimer la variation de champ électrique δF_{st} . L’inverse de la sensibilité de la méthode s’exprime ainsi comme :

$$\sigma_F^{-1} = \frac{\partial P}{\partial F_{st}} \cdot \sigma_P^{-1} \quad (\text{V.19})$$

$$= \left. \frac{\partial P}{\partial \chi} \right|_{\phi_{\text{MW}}^{\text{opt}}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial F_{st}} \cdot \sigma_P^{-1} \quad (\text{V.20})$$

Le premier terme de l’expression (V.20) correspond à la pente à mi-frange du signal $P(\phi_{\text{MW}})$, qui oscille en fonction de $\phi_{\text{MW}} - \chi$, et vaut donc $\mathcal{C}/2$ où \mathcal{C} désigne le contraste des franges d’interférence. Par ailleurs, ne nous intéressant qu’à la sensibilité de la méthode pendant le temps d’attente t_0 , nous ne prenons pas en compte la phase différentielle accumulée pendant les impulsions radiofréquences. Le second terme correspond donc exactement aux données présentées Figure V.17. Ainsi, en ne considérant que la phase accumulée pendant la durée d’attente t_0 , on a donc :

$$\frac{\partial \chi}{\partial F_{st}} = \frac{\alpha_S t_0}{\delta F_{st}} \quad (\text{V.21})$$

Finalement, pour une réalisation de la mesure sur un seul atome $\sigma_P = 1/2$ (loi binomiale de probabilité avec un paramètre $\sim 1/2$), de sorte que :

$$\sigma_F = \frac{1}{\mathcal{C}} \frac{\delta F_{st}}{\alpha_S t_0} \quad . \quad (\text{V.22})$$

La Figure V.20 synthétise sur un même graphique les valeurs des sensibilités σ_F mesurées en fonction du temps t_0 pour les trois durées d'impulsion radiofréquence τ_i , $i = 1, 2$ et 3. La ligne en trait plein gris clair correspond à la limite quantique standard (SQL) et la ligne en trait plein gris foncé à la limite de Heisenberg (HL). Le domaine en gris foncé correspond à une sensibilité meilleure que la limite fondamentale de Heisenberg, qui est une limite infranchissable selon les principes de la mécanique quantique. Le domaine en gris clair correspond à un domaine de sensibilité meilleure que la SQL rendu accessible par la métrologie quantique. On rappelle ici deux résultats du chapitre IV définissant la sensibilité de ces deux limites :

$$\sigma_F^{\text{SQL}} = \frac{1}{\sqrt{2j} t_0} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial \omega_{at}} \quad \text{et} \quad \sigma_F^{\text{Heis.}} = \frac{1}{2j t_0} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial \omega_{at}} \quad . \quad (\text{V.23})$$

Les points pleins rouges, noirs et verts représentent la sensibilité σ_F mesurée expérimentalement pour les trois durées d'impulsion radiofréquence τ_i , $i = 1, 2$ et 3. On remarque que les points noirs qui correspondent à une impulsion radiofréquence de durée $\tau_2 = 183,9$ ns sont bien en dessous de la SQL pour des durées d'attente t_0 jusqu'à 200 ns. Nous avons vu que c'est pour cette durée d'injection que la taille de la superposition quantique d'états était la plus grande $\tilde{k} \sim 30$. Cette méthode permet donc d'atteindre une sensibilité de 3,96 mV/cm par atome avec une durée d'attente de seulement $t_0 = 26,1$ ns. Ceci constitue une mesure 2,3 fois plus sensible que la limite quantique standard et à peine trois fois moins sensible que la limite ultime d'Heisenberg. La valeur absolue de cette sensibilité peut être réduite en allongeant le temps d'attente de 100 ns, où notre méthode atteint une sensibilité de 1,26 mV/cm par atome.

Pour des durées d'attente plus longues, le contraste de la figure d'interférence est considérablement réduit par les imperfections expérimentales (inhomogénéité de champ électrique et du champ radiofréquence sur la taille du paquet atomique, bruit de phase lors des impulsions radiofréquences) dont nous discuterons en détail par la suite. Ainsi, afin de juger de la sensibilité intrinsèque de la méthode, on représente sur cette même figure les valeurs de $\sigma_F^{(0)} = \delta F_{st} / (\mathcal{C}^{(0)} \alpha_S t_0)$ pour le contraste $\mathcal{C}^{(0)}$ mesuré expérimentalement à partir du signal quasi-classique, ce qui permet d'intégrer les réductions de contraste dues à l'effet Stark quadratique, mais d'évacuer l'effet des imperfections expérimentales (inhomogénéités de champ électrique et du champ radiofréquence en particulier) qui affecte la

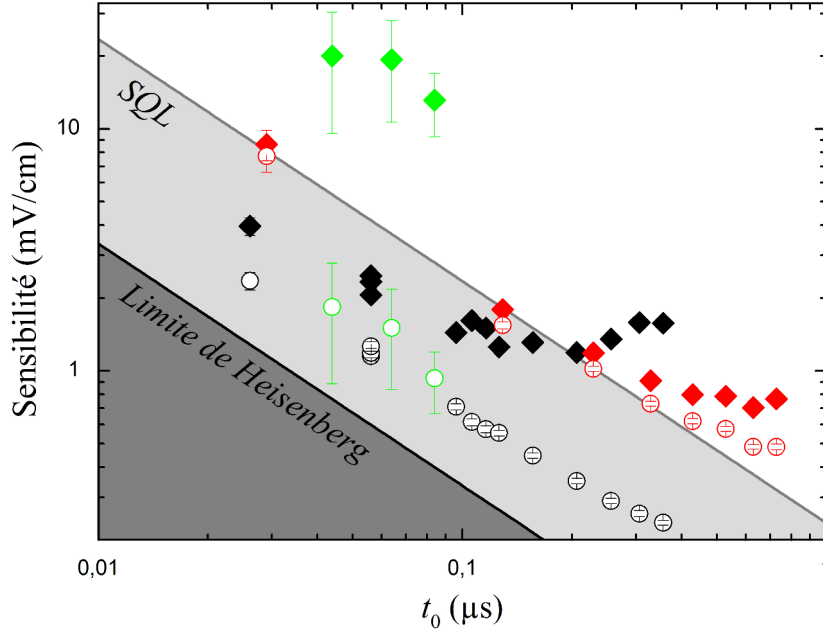


FIGURE V.20 – Métrologie quantique : SQL et HL. Les points pleins rouges, noirs et verts représentent la sensibilité σ_F mesurée expérimentalement pour les trois durées d'impulsion radiofréquence τ_i , $i = 1, 2$ et 3. Une réduction de contraste importante affecte nos franges d'interférence en raison des inhomogénéités de champ électrique de l'environnement et de certaines limitations techniques (homogénéités de la radiofréquence en particulier). Afin de présenter la sensibilité intrinsèque de notre méthode, on ajoute sur cette Figure les points creux qui correspondent aux valeurs de la sensibilité pour un contraste calculé à partir de l'amplitude du signal quasi-classique gaussien. Pour ces points, la réduction de contraste dû à l'effet Stark quadratique est donc bien pris en compte.

cohérence de nos superpositions d'états. Les points creux correspondent donc à l'extrapolation des données mesurées de couleur associée. On constate alors une sensibilité accrue en particulier pour les points verts, correspondant à des impulsions radiofréquences de durée $\tau_3 = 276,1$ ns. Notre méthode approcherait ainsi de très près la limite d'Heisenberg avec une sensibilité seulement 1,8 fois moins bonne.

En prenant en compte le taux de répétition de nos mesures, nous sommes donc conduit, en moyennant aux temps longs la répétition de T mesures, à une sensibilité intégrée $\sigma_F \times \sqrt{T \cdot t_{int.}}$ de $59,4 \mu\text{V}/\text{cm}/\sqrt{\text{Hz}}$ pour une durée d'attente de $t_0 = 26,1$ ns, où $t_{int.} = 225 \mu\text{s}$ correspond au temps de vol des atomes³. Pour une durée d'attente de $t_0 = 106,1$ ns, cette sensibilité intégrée atteint même :

$$\boxed{18,9 \mu\text{V}/\text{cm}/\sqrt{\text{Hz}}} . \quad (\text{V.24})$$

3. Si pour les données que nous avons présentées dans ce manuscrit, 6 séquences ont à chaque fois été jouées pour obtenir une mesure aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, nous pourrions n'en garder qu'une par l'utilisation d'un détecteur qui mesure à la fois la population des niveaux $|50c\rangle$ et $|51c\rangle$ comme nous disposons dans d'autres expériences.

Il serait aisé de réduire le taux de répétition de la mesure, en ne limitant le temps « mort » entre deux mesures, au seul temps nécessaire à la préparation des atomes de Rydberg circulaires qui peut être réduit à $4\text{ }\mu\text{s}$ [103]. La méthode de détection des atomes doit elle aussi être adaptée. Une nouvelle méthode de détection fort simple à mettre en œuvre reposerait encore une fois sur des méthodes de *shelving* au sein des multiplicités adjacentes : dès l'issue des manipulations métrologiques, on tourne adiabatiquement le champ électrique dans le plan horizontal – où les inhomogénéités de champ électrique sont importantes – et on applique alors une impulsion micro-onde π très fine spectralement sur une transition sensible au champ électrique, comme $|50c\rangle \rightarrow |52, k=1\rangle$ par exemple. Seuls les atomes localisés à un endroit bien précis dans la cavité seront donc résonants et « mis sur étagère ». Durant une mesure ces atomes progressent vers le détecteur et l'on ajoute ainsi à chaque répétition de la séquence métrologique des atomes sur cette étagère, formant un train de paquets atomiques qui seront détectés sur des fenêtres de détection courtes. Cette méthode nous permettrait en l'état actuel de l'expérience d'atteindre expérimentalement une sensibilité de :

$$\boxed{2,8\text{ }\mu\text{V}/\text{cm}/\sqrt{\text{Hz}}} . \quad (\text{V.25})$$

La réduction du contraste, qui affecte sévèrement la sensibilité de nos mesures, est en partie une conséquence directe de l'extrême sensibilité de la mesure effectuée dans un environnement électriquement imparfait (inhomogénéités et bruits électriques). En augmentant la durée d'attente t_0 , la mesure gagne en sensibilité, mais elle devient aussi d'autant plus sensible aux inhomogénéités et autres bruits électriques qui viennent brouiller la figure d'interférence. Un gain de sensibilité en phase nous rend plus sensibles aux inhomogénéités, ce qui réduit en retour le contraste des franges d'interférence. Par ailleurs, comme nous le montrerons en fin de chapitre les inhomogénéités du champ radiofréquence ont une influence notable sur la réduction du contraste des franges. Un meilleur contrôle des inhomogénéités du champ électrique et du champ radiofréquence conduirait à un contraste uniquement limité par l'effet Stark quadratique, très proche de la limite d'Heisenberg (points creux Figure V.20).

V.3.5 Décohérence et réduction du contraste

Les résultats présentés jusqu'ici dans ce chapitre sont le fruit de nombreuses optimisations visant à réduire les bruits électroniques et les inhomogénéités de champ électrique. L'ensemble des mesures quelques peu techniques prises afin de limiter la décohérence induite par cet environnement électrique imparfait est décrit en détail à l'annexe J. Par ailleurs, une méthode de traitement des données a été appliquée afin de prendre en compte les dérives à long terme du champ électrique. Cette procédure de « recentrage » des franges

d'interférence sur un signal de contrôle est aussi reportée à l'annexe J. Dans cette section, nous finirons l'analyse du signal métrologique par une discussion des effets limitants résiduels, inhérents à notre méthode de mesure, qui réduisent encore grandement le contraste de nos signaux d'interférence.

Malgré la compensation des gradients de champ électrique, la limitation des bruits d'origine électronique et cette procédure de suivi dynamique de la phase des franges d'interférence par une séquence de contrôle, le contraste des franges métrologiques utilisant deux impulsions radiofréquences demeure largement inférieur à celui des franges d'interférométrie Ramsey micro-onde en l'absence d'impulsions RF, comme l'avait montré la Figure V.16 (a) page 256. Afin de comparer quantitativement ces deux types de signaux métrologiques, on peut représenter sur un même graphique le contraste des signaux d'interférence en fonction du déphasage des franges d'interférence dû à la variation de champ électrique δF_{st} , pour ces deux méthodes ici résumées :

- Interférométrie Ramsey micro-onde sur la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ où le déphasage vaut $2\pi \times \delta\nu t_0$ où $\delta\nu = 54,28 \text{ kHz}$ (voir équation (V.9)) ;
- Séquence de métrologie quantique, où deux impulsions radiofréquences sont intercalées entre les deux impulsions micro-ondes Ramsey, et où le déphasage correspond alors à $\delta\chi$.

Dans les deux cas, la durée d'attente t_0 est variable et pour la méthode de métrologie quantique on peut en plus faire varier la durée des impulsions radiofréquence. Sur la Figure V.21 (a), les points noirs et gris ainsi que rouges et violets correspondent aux contrastes des franges de métrologie en fonction du déphasage $\delta\chi$ mesuré entre les champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ et pour les deux durées d'impulsions radiofréquences τ_1 et τ_2 . Les points dans les deux teintes de vert correspondent eux aux expériences d'interférométrie micro-onde effectuées pour différents temps d'attente entre les impulsions micro-ondes (pas d'impulsions radiofréquences). On visualise ainsi une nette dégradation du contraste lors de l'utilisation des champs radiofréquences.

Le fait que l'ensemble des points issus de la méthode de métrologie quantique avec impulsions radiofréquences soit sur une même courbe semble illustrer le fait que notre méthode est limitée par les imperfections expérimentales. Toute amélioration de la sensibilité à la variation de champ électrique se traduisant par un plus grand déphasage se paye directement par une diminution du contraste. Ce qui nous importe de commenter ici est la nette diminution du contraste pour un même déphasage lors de l'utilisation de notre méthode de métrologie, qui implique deux impulsions radiofréquences et permet une mesure très locale de la variation de champ électrique. Il convient cependant de dissocier deux causes de réduction de contraste bien distinctes : l'effet Stark quadratique

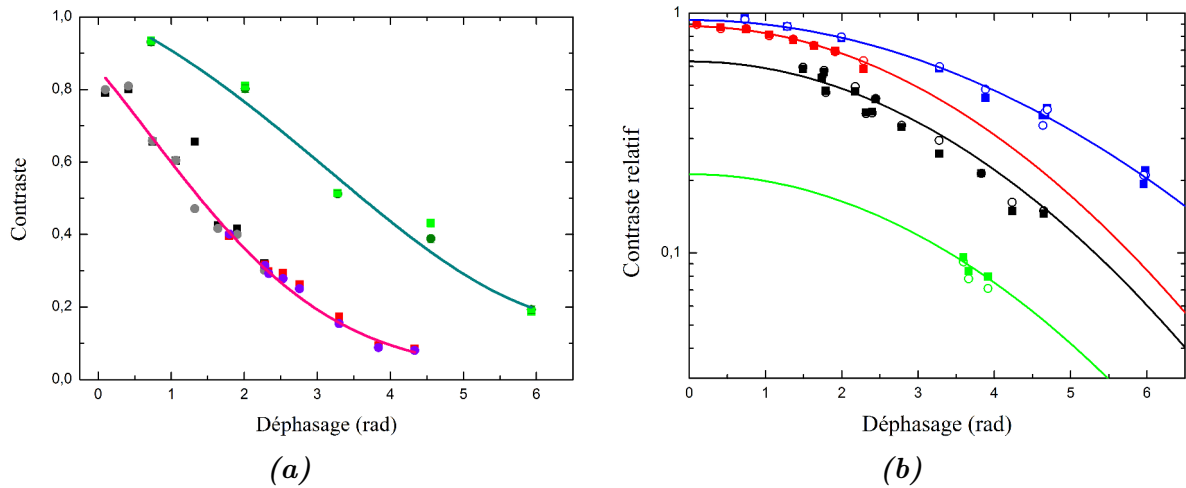


FIGURE V.21 – *Contraste des franges d'interférence en fonction du déphasage dû à la variation de champ électrique δF_{st} . (a) Les points noirs et gris ainsi que rouges et violets correspondent aux contrastes des franges de métrologie en fonction du déphasage $\delta\chi$ mesuré entre les champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ et pour les deux durées d'impulsions radiofréquences τ_1 et τ_2 . Les points dans les deux teintes de vert correspondent aux expériences d'interférométrie micro-onde effectuées pour différents temps d'attente entre les impulsions micro-ondes (pas d'impulsions radiofréquences). Les courbes en traits pleins correspondent aux meilleurs ajustements gaussiens. (b) On exprime cette fois-ci la réduction du contraste des franges d'interférence par rapport au signal quasi-classique, dont l'amplitude est elle-même affectée par l'effet Stark quadratique, en fonction du déphasage. On reporte cette réduction relative du contraste pour les trois durées des impulsions radiofréquences τ_i , $i = 1, 2$ et 3 (points rouges, noirs et vert respectivement) et pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}$ (points carrés et rond respectivement). Les données représentées en bleu correspondent simplement au contraste des franges de Ramsey micro-ondes effectuées sur la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k = 1\rangle$ aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}$.*

et les phénomènes de décohérence. En effet, comme nous l'avons vu sur les signaux de métrologie quasi-classiques, la probabilité de retrouver, à l'issue de la seconde impulsion radiofréquence, le moment cinétique $\hat{J}_1^{(50)}$ dans l'état initial est bien différente de l'unité (voir Figures V.6 page 241). Ceci est, rappelons-le, une conséquence de l'effet Stark quadratique qui distord l'état cohérent de spin et réduit *in fine* le recouvrement avec l'état cohérent de spin initial $|j, +j\rangle$. Le contraste maximum des franges d'interférence est donc d'ores et déjà limité par $\sqrt{P(\phi_{RF}^{(0)})} = |\langle j, +j | \psi_f \rangle|$. Si l'on veut étudier les effets de la décohérence, il faut donc plutôt calculer la réduction de contraste des franges d'interférence par rapport à cette valeur.

C'est ce que représente la Figure V.21 (b) en fonction du déphasage des franges d'interférence, pour les trois durées des impulsions radiofréquences τ_i , $i = 1, 2$ et 3 (points rouges, noirs et vert respectivement) et pour les deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}$ (points carrés et rond respectivement). Les données représentées en bleu correspondent simplement au contraste des franges de Ramsey micro-ondes obtenues sur la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k = 1\rangle$ aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}$. Les courbes en trait pleins correspondent à des ajustements quadratiques (en échelle logarithmique), qui correspondent à un modèle de décohérence induite par les inhomogénéités de champ électriques, soit un amortissement

gaussien du contraste de franges. On voit donc, en lisant le graphique verticalement, que plus la durée de l'impulsion radiofréquence est grande, plus le contraste est réduit. Le champ radiofréquence lui-même semble être à l'origine d'une réduction du contraste. S'ajoute à ce « coût fixe », une réduction de contraste due aux effets de décohérence : plus le déphasage est important, c'est-à-dire plus la mesure est sensible au champ électrique, plus le contraste des franges est réduit. L'ajustement gaussien des trois courbes de métrologie quantique (rouge, noire et verte) avec un taux de décohérence⁴ commun permet d'évaluer les inhomogénéités en termes de dispersion de la fréquence atomique s'élevant à :

$$\boxed{\frac{\Delta\omega_{at}}{2\pi} = 27,7 \text{ kHz}} \quad . \quad (\text{V.26})$$

Cette dispersion de fréquence est à l'origine d'une dispersion de champ électrique correspondant à la moitié de la variation δF_{st} que nous désirons mesurer ! L'environnement de la mesure est très imparfait ce qui affecte la sensibilité apparente de notre mesure métrologique. Un environnement plus « propre » électriquement parlant permettrait d'approcher la sensibilité intrinsèque de notre méthode. C'est cette valeur de l'inhomogénéité de champ électrique qui a été utilisée dans l'ensemble des simulations de l'expérience présentées à ce chapitre.

Un ajustement similaire du contraste des franges d'interférence Ramsey donne une valeur pour la dispersion de fréquence légèrement plus faible : $\Delta\omega_{at}/2\pi = 22,3 \text{ kHz}$. La méthode par interférométrie Ramsey étant beaucoup moins sensible, il est nécessaire que la durée d'attente t_0 entre les deux impulsions Ramsey micro-ondes soit considérablement plus grande que dans notre méthode de métrologie quantique. S'il est possible grâce à la méthode de métrologie quantique de mesurer des déphasages importants pour quelques dizaines de nanosecondes d'attente, il est nécessaire de séparer les impulsions micro-ondes Ramsey de plusieurs micro-secondes pour constater des déphasages du même ordre. Dans ce cas, il est alors possible qu'un bruit rapide se moyenne sur plusieurs périodes lors d'une longue durée d'attente alors que sur une courte durée d'attente les atomes voient aléatoirement une arche montante ou descendante de ce bruit (en exagérant un peu le trait). Ce bruit pourrait être d'origine électronique dû à une source extérieure le plus probablement. Nous avons aussi envisagé la possibilité de légères différences d'horloge entre notre informatique et l'électronique ou encore la persistance d'effets de charge des miroirs comme nous l'avons présenté à l'annexe J.

Si l'on revient à l'analyse de la réduction de contraste initiée plus haut, il est flagrant que le champ radiofréquence lui-même est à l'origine d'une réduction de contraste d'autant plus importante que les impulsions radiofréquences sont longues. Grâce à la méthode de

4. En échelle linéaire, les courbes rouge, noire et verte s'obtiennent l'une de l'autre par translation verticale.

calibration de la puissance du champ radiofréquence présentée au chapitre III dans le cadre des expériences de dynamique Zénon, nous avons pu mesurer l'amplitude du champ radiofréquence le long du jet atomique. La Figure V.22 (a) présente la mesure de la pulsation de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma_+}$ du champ radiofréquence en fonction de l'instant de l'impulsion radiofréquence. On note une augmentation linéaire de l'amplitude avec une pente de 70,3 kHz/ μ s. Le champ radiofréquence n'est donc pas homogène dans l'espace. Ceci est dû à l'utilisation de deux électrodes seulement (plutôt que les quatre) : les simulations montrent en effet que si la polarisation σ_+ demeure de bonne qualité au voisinage du centre de la cavité (voir Figure II.15 page 115), l'amplitude du champ produit par les deux électrodes augmente rapidement dès lors que l'on s'éloigne du centre vers le détecteur. Ceci a une conséquence importante : l'extension du paquet atomique étant d'environ 0,6 mm, la dispersion en fréquence de Rabi du champ radiofréquence est de l'ordre de 0,16 MHz, ce qui, comme nous allons le voir de suite, affecte fortement le contraste des franges d'interférence.

La Figure V.22 (b) représente le signal d'interférence théorique de notre méthode de métrologie correspondant à la mesure du recouvrement $P(\phi_{RF})$ en fonction de la phase de la seconde impulsion radiofréquence ϕ_{RF} pour trois amplitudes différentes du champ radiofréquence : $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 1,56$ MHz (courbe rouge), $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 1,61$ MHz (courbe noire) et $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 1,66$ MHz (courbe verte). La durée de l'impulsion radiofréquence est de $\tau_2 = 183,9$ ns et la phase de la seconde impulsion micro-onde Ramsey est fixée. Ces simulations sont effectuées en présence d'inhomogénéités de champ électrique avec la valeur (V.26). On note que les oscillations sont décalées l'une par rapport à l'autre de presque une période. En moyennant le signal sur la distribution gaussienne du paquet atomique excité par les lasers, dont le centre voit la fréquence $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 1,61$ MHz, on obtient la courbe bleue, dont l'enveloppe est représentée en gris. On remarque que le signal d'interférence moyenné est de contraste réduit. Ainsi, plus la durée de l'impulsion radiofréquence est longue, plus les inhomogénéités du champ radiofréquence vues par les atomes sont importantes et plus la réduction du contraste par cet effet de moyennage sur l'extension du paquet atomique est notable.

Si les inhomogénéités de champ électrique sont principalement dues à des charges parasites à l'intérieure de la structure et qu'il est toujours difficile de contrôler à une échelle inférieure au mV/cm le champ électrique au sein d'une telle structure d'électrodes aux dimensions centimétriques, il est aisé d'améliorer l'homogénéité du champ radiofréquence. Il suffirait d'utiliser les quatre électrodes « radiofréquences » disponibles pour générer le champ radiofréquence. Le champ radiofréquence généré par les quatre électrodes sera alors beaucoup plus homogène au centre de la cavité. Il serait nécessaire pour cela de disposer d'un synthétiseur 8 voies (ou de deux synthétiseur 4 voies avec une horloge commune) afin de disposer de deux champs radiofréquences polarisé σ_+ de phase relative ajustable. Finalement, ce dispositif à quatre électrodes permettrait de gagner en puissance

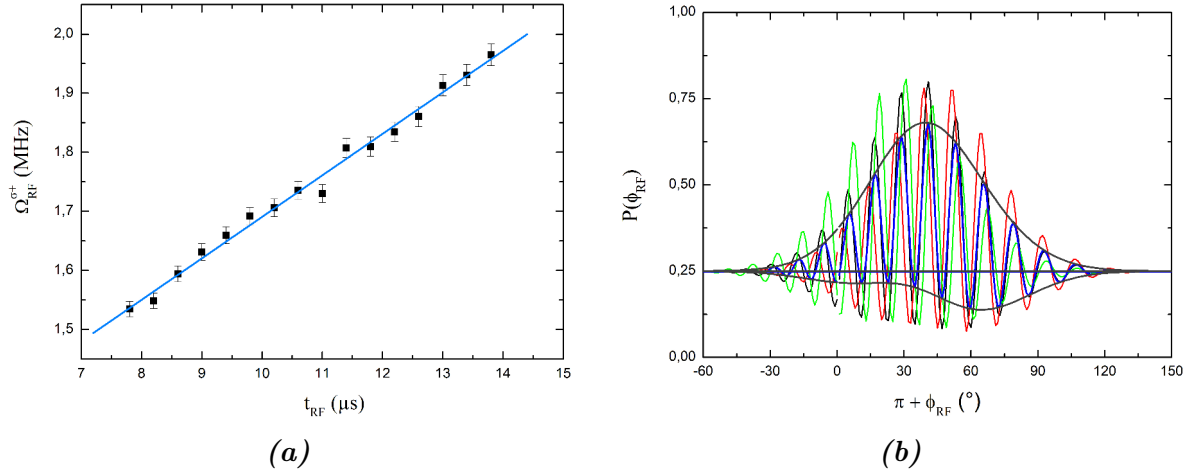


FIGURE V.22 – Inhomogénéité du champ radiofréquence. **(a)** Fréquence de Rabi du champ radiofréquence polarisé σ_+ , généré par deux électrodes (électrodes 3 et 4), en fonction de l'instant de l'impulsion radiofréquence t_{RF} . Les différents atomes du paquet atomique excité par les lasers voient donc différentes amplitudes RF. **(b)** Signal d'interférence théorique correspondant à la mesure du recouvrement $P(\phi_{RF})$ en fonction de la phase de la seconde impulsion radiofréquence ϕ_{RF} pour trois amplitudes différentes du champ radiofréquence : $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 1,56$ MHz (courbe rouge), $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 1,61$ MHz (courbe noire) et $\Omega_{RF}^{\sigma_+}/2\pi = 1,66$ MHz (courbe verte). La durée de l'impulsion radiofréquence est de $\tau_2 = 183,9$ ns et la phase de la seconde impulsion micro-onde Ramsey est choisie nulle. Ces simulations sont effectuées en présence d'inhomogénéités de champ électrique avec la valeur (V.26). La courbe bleue, dont l'enveloppe est représentée en gris, correspond au moyennage des signaux d'interférence sur l'extension du paquet atomique de largeur à $1/e$ de 0,6 mm.

et ainsi de pouvoir générer des rotations du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ identiques, mais avec impulsions plus courtes réduisant de fait les effets de réduction du contraste dus à l'effet Stark quadratique.

Malgré ces réductions de contrastes, notre méthode permet de réaliser des mesures électrométriques de haute précision, qui ont par ailleurs – en raison de la très courte durée des manipulations des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$, une résolution temporelle sub-microseconde. Pour finir de décrire les performances de cette mesure ultra-sensible de champ électrique, nous finirons le chapitre en proposant une preuve de principe d'une telle mesure résolue en temps.

V.4 Mesure résolue en temps

La grande sensibilité de notre méthode de métrologie quantique, en particulier pour de très courtes durées d'attente, permet d'envisager des mesures de champ électrique résolues en temps. Afin de présenter une preuve de principe de ces performances, nous proposons de mesurer une marche de champ électrique de l'amplitude la plus petite que nous permet

de générer notre dispositif expérimental⁵ : $\delta F_{st}/2 \approx 280,5 \mu\text{V}/\text{cm}$. Le temps de montée théorique de la marche de champ, codée sur le générateur de fonctions arbitraires, est de 5 ns.

Pour réaliser cette expérience, au lieu de déplacer les impulsions radiofréquences dans le temps afin de sonder le champ électrique à différents instants de la séquence de champ électrique, nous avons préféré faire défiler la marche de champ électrique en variant l'instant du déclenchement de la séquence expérimentale de champ électrique. La Figure V.23 représente schématiquement la séquence expérimentale dynamique décrite. Les impulsions radiofréquences sont fixes et les manipulations atomiques s'effectuent donc aux mêmes endroits dans la cavité. De la sorte, aucun nouveau réglage n'est à effectuer et surtout, les gradients de champs électriques vus par les atomes sont inchangés. Comme parfois au cinéma, c'est l'arrière-plan qui défile, mais les acteurs restent à la même position. Les impulsions radiofréquences, dont la première débute à l'instant $t_{\text{RF}1} = 9,496 \mu\text{s}$, sont séparées de 240 ns, soit un temps d'attente de $t_0 = 56,1 \text{ ns}$. L'instant de la marche de champ électrique va être balayé de $10,1 \mu\text{s}$ à $9,3 \mu\text{s}$ (l'origine des temps correspond à l'instant de l'impulsion laser). Ainsi, la mesure du champ électrique devrait sonder successivement le champ après la marche F_{st} , le champ durant la marche, et le champ avant la marche $F_{st} - \delta F_{st}$. La variation du champ électrique décrit donc une marche descendante.

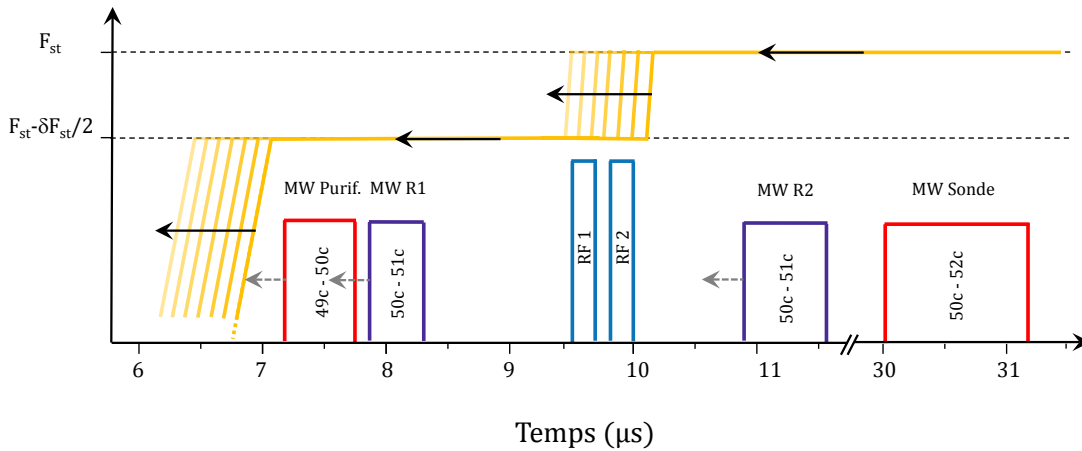


FIGURE V.23 – Mesure résolue en temps d'une marche de champ électrique. Séquence expérimentale de métrologie où la fonction arbitraire déterminant le potentiel sur les électrodes « miroirs » (traits orangés) est balayée dans le temps. De la sorte, l'instant de la marche de champ électrique va être balayé de $10,1 \mu\text{s}$ à $9,3 \mu\text{s}$. Les impulsions micro-ondes (en rouge pour les impulsions π et violet pour les impulsions $\pi/2$) ainsi que les deux impulsions radiofréquences (en bleu) sont fixes.

5. Cette variation de champ électrique est deux fois plus petite que la variation δF_{st} avec laquelle nous avons jusqu'ici travaillé. Pour générer cette variation $\delta F_{st}/2$, au lieu de soumettre comme jusqu'ici les deux électrodes « miroirs » à des potentiels symétriques $\pm V_{st}$, seul le potentiel d'un des deux miroirs est décalé, ce qui crée une variation de champ électrique moitié. Nous avons jusqu'ici préféré écarter cette méthode créant une asymétrie horizontale lors des mesures de la sensibilité de la méthode de métrologie quantique. Nous avons cependant déjà calibré une telle variation de champ lors de la mesure de la linéarité du déphasage $\delta\chi$ avec la variation de champ électrique à la Figure V.11 page 249.

On mesure tout d'abord un signal d'interférence préliminaire sans marche de champ électrique en balayant la phase de la seconde impulsion micro-onde ϕ_{MW} , comme nous l'avons déjà présenté précédemment. La phase de la seconde impulsion radiofréquence a été fixée de sorte à optimiser le recouvrement de l'état final avec l'état initial $|j, +j\rangle$ au champ de référence F_{st} . La Figure V.24 (a) présente ces franges d'interférence préliminaires. La courbe noire correspond à la mesure de $P(\phi_{\text{MW}})$ à un champ de $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et la courbe rouge à un champ de F_{st} . La marche de champ électrique étant d'une hauteur de $\delta F_{st}/2$, cette courbe préliminaire permet d'évaluer l'amplitude du signal $\Delta P(\phi_{\text{MW}}) = P(\phi_{\text{MW}})[F_{st} - \delta F_{st}/2] - P(\phi_{\text{MW}})[F_{st}]$ en fonction de la phase ϕ_{MW} . Afin que le signal $\Delta P(\phi_{\text{MW}})$ en présence de la marche de champ soit linéaire, on choisit la phase de la seconde impulsion micro-onde (trait verticale bleu) tel que l'écart entre les deux signaux soit maximal. Ceci nous assure du fait qu'une éventuelle et légère dérive de la valeur moyenne du champ électrique durant l'expérience, décalant légèrement la paire de franges, n'engendrera pas de variation importante de l'écart $\Delta P(\phi_{\text{MW}})$ des probabilités d'occupation pour les deux champs électriques.

Pour cette phase $\phi_{\text{MW}}^{(0)}$ de la seconde impulsion micro-onde, on mesure alors les probabilités d'occupation $P(\phi_{\text{MW}}^{(0)})$ pour un champ référence constant à $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et pour la séquence présentant la marche de champ électrique, cela en fonction de l'instant t_{marche} où est déclenchée la marche de champ électrique. La Figure V.24 (b) reporte les résultats d'une telle mesure. Les points noirs représentent les valeurs de $P(\phi_{\text{MW}}^{(0)})$ pour le champ référence constant à $F_{st} - \delta F_{st}/2$. Les points rouges présentent eux les valeurs de $P(\phi_{\text{MW}}^{(0)})$ dans le cas d'une séquence avec marche de champ électrique montante depuis $F_{st} - \delta F_{st}/2$ jusqu'à F_{st} . Les points verts et bleus constituent une mesure de contrôle effectuée à l'issue de la prise de données avec marche. Ils représentent les valeurs de la probabilité d'occupation dans le cas de deux séquences où le champ électrique est constant à $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et F_{st} . Cette dernière prise de données permet de vérifier que le champ électrique n'a pas trop dérivé entre la courbe préliminaire et la fin de la mesure de la marche de champ électrique. Le fait que ces deux courbes de contrôle dérivent légèrement à écart constant témoigne du fait que lorsque que l'on parle de champ constant à $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et F_{st} , il existe en fait un régime transitoire de charge des électrodes « miroirs » encore perceptible alors que la valeur est censée être fixe depuis près de 3 μs .

La différence des populations mesurées nous permet d'accéder à la variation de champ électrique ΔF_{st} dans le temps. La Figure V.24 (c) représente cette variation de champ électrique obtenue par différence des signaux avec marche par le signal de référence (points carrés noirs). On effectue cette même différence pour la séquence de contrôle à champs constants (points ronds rouges). Sur cette Figure, nous sommes passés dans le référentiel temporel « mobile » relié à la séquence de champ électrique. L'origine des temps est fixé à l'instant théorique où la marche de champ est déclenchée. On décrit ainsi la marche montante de champ électrique vue par les atomes si la marche était déclenchée à un

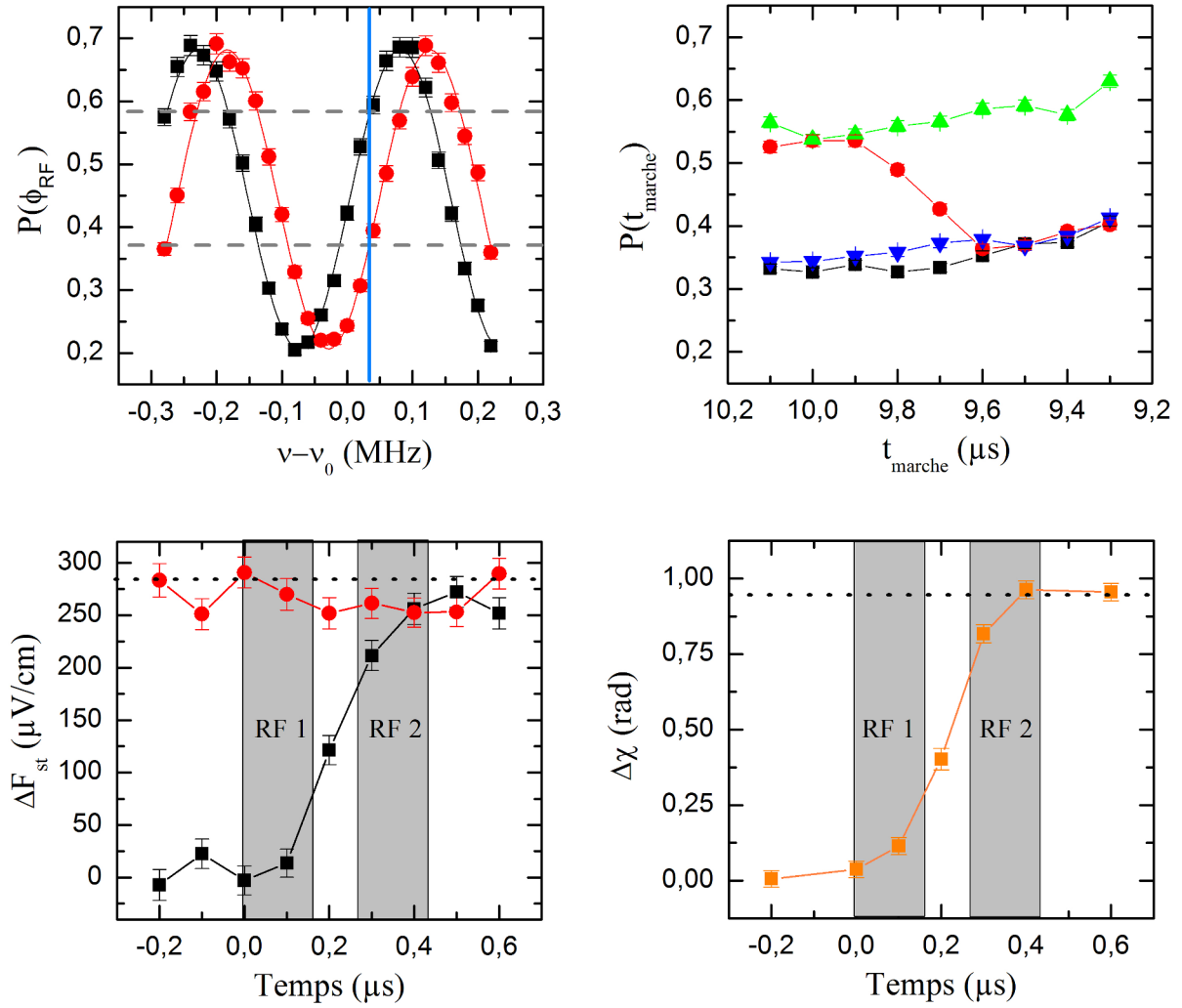


FIGURE V.24 – Mesure résolue en temps d’une marche de champ électrique. **(a)** Mesure du recouvrement $P(\phi_{MW})$ en fonction de la phase de la seconde impulsion micro-onde aux champs électriques $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (points noirs) et F_{st} (points rouges). **(b)** A la phase $\phi_{MW}^{(0)}$ fixée, tel que l’écart entre les deux signaux Figure (a) soit maximal, on mesure $P(\phi_{MW})$ pour le champ référence constant à $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (points noirs) et dans le cas d’une séquence avec marche de champ électrique montante depuis $F_{st} - \delta F_{st}/2$ jusqu’à F_{st} (points rouges). Les points verts et bleus constituent une mesure de contrôle effectuée à l’issue de la prise de données avec marche. Ils représentent les valeurs de la probabilité d’occupation dans le cas de deux séquences où le champ électrique est constant à $F_{st} - \delta F_{st}/2$ et F_{st} . **(c)** Mesure de la variation de champ électrique ΔF_{st} lors de la marche de champ électrique et lors de la session de contrôle sans marche de champ électrique par soustraction des données présentées en (b). **(d)** Méthode alternative consistant pour chaque instant de déclenchement de la marche à mesurer le déphasage entre deux jeux complets de franges d’interférence. Le déphasage $\Delta\chi$ proportionnel à la variation de champ électrique ΔF_{st} nous permet d’évaluer très précisément la phase de montée du champ électrique.

temps fixe. On note que la marche de champ met de l’ordre de 400 ns pour atteindre sa valeur stationnaire, ce qui permet de conclure que notre bande passante est au minimum de 2,5 MHz. Nous avons représenté à l’instant particulier du déclenchement de la marche la position des deux impulsions radiofréquences. Notre bande passante semble donc limitée par la durée des impulsions radiofréquences. Il faut finalement noter que la mesure de cette

marche de champ électrique n'a nécessité qu'une seule prise de données (outre les franges de Ramsey préliminaires et la séquence de contrôle ultérieure). Chacune des six séquences (voir Tableau V.2 page 233) permettant d'obtenir un des neuf points de la courbe noire a été répétée 21 000 fois, ce qui représente au total pour cette courbe près de 68 000 atomes détectés par point. Cette méthode est cependant assez sensible aux dérives et bruits de champ électrique qui sont à l'origine d'une dérive de la paire de franges Ramsey qui vient moduler le contraste du signal final.

Afin d'éviter ces effets de dérive qui, comme on peut le suspecter sur la Figure V.24 (c), peuvent être à l'origine d'artefacts, une méthode alternative consiste à mesurer un jeu complet de franges d'interférence comme présenté Figure V.24 (a) pour différents instants de la marche de champ électrique. Pour chacune de ces franges d'interférence, on extrait du meilleur ajustement sinusoïdal le déphasage $\Delta\chi$ entre les deux figures d'interférence, ce qui nous donne accès à la variation locale de champ électrique qui lui est proportionnelle. La Figure V.24 (d) présente le résultat de cette méthode. Les barres d'erreurs statistiques sont plus petites que pour la méthode précédente et la forme de la marche de champ électrique semble ici plus lisse et atteindre un plateau autour de la valeur théorique attendue (ligne horizontale en pointillé). Chacun des points a nécessité environ dix fois plus d'atomes que pour la méthode précédente, soit 663 000 atomes détectés par point.

Ces résultats constituent une preuve de principe de l'aptitude de notre méthode à mesurer de très faibles variations de champ électrique dans le temps à l'aide d'atomes de Rydberg uniques qui constituent de véritables sondes du champ électrique.

Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous avons mis en œuvre une méthode de métrologie quantique fondée sur la manipulation cohérente d'une superposition de deux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ différents. Utilisant l'évolution différentielle de ces deux moments cinétiques, offerte par l'effet Stark qui diffère d'une multiplicité à l'autre, nous avons opéré une rotation du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$, ensuite soumis à un temps d'attente t_0 variable avant de ramener ce moment cinétique dans son état initial. L'autre composante associée au moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ a constitué une référence de phase permettant de mesurer la phase quantique globale accumulée.

Un premier signal d'interférence a été obtenu en faisant varier la phase de la seconde impulsion radiofréquence, ce qui nous a permis de constater qualitativement la supériorité de cette méthode par rapport à une mesure quasi-classique, qui fut aussi décrite en amont. Nous avons ensuite présenté un deuxième signal d'interférence consistant à varier la phase de la seconde impulsion micro-onde. A partir de ces signaux, nous avons mesuré

expérimentalement la sensibilité de notre méthode et l'avons comparée à la limite quantique standard et à la limite fondamentale d'Heisenberg. Nous avons ainsi montré que la sensibilité en phase de notre méthode évoluait en j , telle la limite de Heisenberg.

Cette comparaison a aussi montré que nous étions pour des mesures de courtes durées d'attente en dessous de la limite quantique standard et environ trois fois moins sensible que la limite d'Heisenberg. Les limitations à la sensibilité de notre méthode sont en réalité expérimentales, le contraste des franges d'interférence mesuré étant directement réduit par les inhomogénéités du champ radiofréquence, qui peuvent être réduites aisément par une amélioration fort simple du montage électronique, et du champ électrique que nous sommes capables de mesurer. L'extrême sensibilité intrinsèque de notre méthode ouvre de nombreuses perspectives en termes de métrologie de haute précision dans des environnements dédiés où les sources techniques de bruits sont contrôlées. Le contraste des franges, uniquement limité par l'effet Stark quadratique, permet d'atteindre des sensibilités très proches de la limite quantique standard et d'atteindre une sensibilité de mesure par atome unique inégalée. En effet, pour un temps d'attente de l'ordre de la micro-seconde, le déphasage occasionné par une variation de champ électrique de $300 \mu\text{V}/\text{cm}$ atteint les π radians, ce qui permet en principe de distinguer deux valeurs de champs électriques séparés par cette infime quantité en une seule détection atomique. Cette mesure non invasive à l'aide d'un unique atome de Rydberg ouvre des perspectives considérables quant aux applications de ces états [218].

Nous avons finalement proposé une preuve de principe d'une mesure résolue en temps. Cette méthode de métrologie quantique constitue en effet une méthode de mesure résolue en temps, avec une résolution inférieure à la micro-seconde, et en espace, puisque les sondes atomiques constituées par ces atomes de Rydberg peuvent être refroidis dans un piège de quelques micromètres [219].

Conclusion et perspectives

Life can only be understood backwards ; but it must be lived forwards.

Søren Kierkegaard, Journalen JJ :167 (1843)

La manipulation de l'état d'un atome de Rydberg par couplage à un champ radiofréquence classique est au cœur de toutes les expériences présentées dans ce manuscrit. En particulier, le couplage à un champ radiofréquence polarisé σ_+ permet de décrire l'état de cet atome par un moment cinétique de grande taille. Dans le cadre des expériences sur la dynamique de Zénon quantique, nous avons observé des dynamiques cohérentes très non classiques de ce moment cinétique permettant *in fine* la génération déterministe d'états quantiques du type *Chat de Schrödinger*. Ces superpositions d'états mésoscopiques correspondent à la superposition de moments cinétiques pointant dans deux directions très différentes ou encore à la superposition de deux orbites elliptiques électroniques d'inclinaisons différentes. Outre le fait que ces états quantiques sont générés par le couplage d'un atome à un champ pourtant classique – ce qui constitue en soi une méthode élégante pour générer de nouvelles dynamiques non classiques en modifiant l'espace de Hilbert par une « mesure » Zénon –, ces états atomiques sont très sensibles au champ électrique et magnétique. Nous avons donc utilisé ces états *Chats de Schrödinger* d'un atome de Rydberg pour la métrologie quantique.

Dans le cadre des expériences de métrologie quantique décrites aux deux derniers chapitres de ce manuscrit, nous avons tout d'abord proposé une méthode alternative à la dynamique Zénon quantique pour générer des superpositions d'états du moment cinétique de grande taille. Nous avons utilisé les ressources offertes par une paire de multiplicités Stark voisines en préparant une superposition d'états dans deux multiplicités distinctes. En exploitant l'effet Stark différentiel, nous avons pu générer par couplage à un champ radiofréquence classique des dynamiques très différentes des deux composantes de la superposition d'état au sein de ces multiplicités. La phase quantique accumulée entre ces deux composantes est extrêmement sensible au champ électrique. Nous avons ainsi réalisé des mesures d'une grande sensibilité de petites variations de champ électrique

statique de l'ordre du mV/cm, par mesure de la variation de cette phase quantique par interférométrie Ramsey micro-onde. Cette méthode a permis d'atteindre une sensibilité de 3,96 mV/cm par atome avec une durée d'interrogation de seulement 26 ns, ce qui constitue une mesure 2,3 fois plus sensible que la limite quantique standard.

Dans l'état actuel de notre expérience, où un jet thermique d'atomes issus d'un four traverse la zone de l'espace à sonder, il nous faut pour réaliser cette mesure attendre que l'atome sonde ait atteint le détecteur. Ce temps de vol est de 225 μ s, ce qui conduit, en moyennant aux temps longs la répétition de T mesures, à une sensibilité de 59,4 μ V/cm/ $\sqrt{\text{Hz}}$ pour un temps d'interrogation de 26 ns. En allongeant de 100 ns ce temps d'interrogation, notre méthode atteint même une sensibilité de 18,9 μ V/cm/ $\sqrt{\text{Hz}}$. Le temps d'intégration pourrait être réduit au seul temps nécessaire pour préparer les atomes, soit 5 μ s, par exemple par l'utilisation d'atomes piégés associée à une nouvelle méthode de détection, ce qui permettrait d'atteindre une sensibilité de 2,8 μ V/cm/ $\sqrt{\text{Hz}}$.

L'augmentation du temps d'interrogation engendre cependant une réduction du contraste de notre signal due à la décohérence induite par les inhomogénéités de champ électrique. Les fluctuations temporelles et spatiales du champ électrique que nous désirons mesurer réduisent donc la sensibilité apparente de notre méthode d'électrométrie. Dans un environnement plus propre électriquement parlant, nous n'aurions pas de réduction du contraste par ces effets, ce qui permettrait d'augmenter considérablement le temps d'interrogation et donc la sensibilité de notre mesure. Par ailleurs, une seconde source de limitation, cette fois technique, est inhérente à notre système de mesure (inhomogénéités du champ radiofréquence notamment) et pourrait être résolue par l'amélioration du montage électronique. Ces améliorations de l'environnement et du système de mesure permettraient de dépasser la limite quantique standard d'un facteur 3,8 et d'approcher de très près la limite ultime de Heisenberg, à moins d'un facteur deux en termes de sensibilité.

Par dessus tout, ceci nous permettrait d'envisager des temps d'interrogation beaucoup plus longs et d'atteindre des sensibilités de quelques centaines de nV/cm/ $\sqrt{\text{Hz}}$, uniquement limitées par la taille du *Chat de Schrödinger* que nous avons généré et l'effet Stark quadratique, qui pourrait être réduit en travaillant à un champ plus faible. Cette méthode ouvre donc de larges perspectives dans le domaine de l'électrométrie de haute précision. Elle constitue une méthode non invasive de mesure de très faibles champs électriques et, qui plus est, résolue en temps et en espace. La perspective d'une mesure non destructive d'un électron dans un nanotube de carbone est ainsi envisageable en pratique. En effet, pour un temps d'interrogation d'une microseconde, le déphasage du signal interférométrique Ramsey atteint la valeur π pour un champ électrique de 0,16 mV/cm, ce qui correspond au champ créé par une charge élémentaire à une distance de 300 μ m. Il serait donc possible en principe de détecter de façon non destructive la présence d'un électron dans un nanotube de carbone avec une résolution temporelle sub-microseconde (Figure V.25).

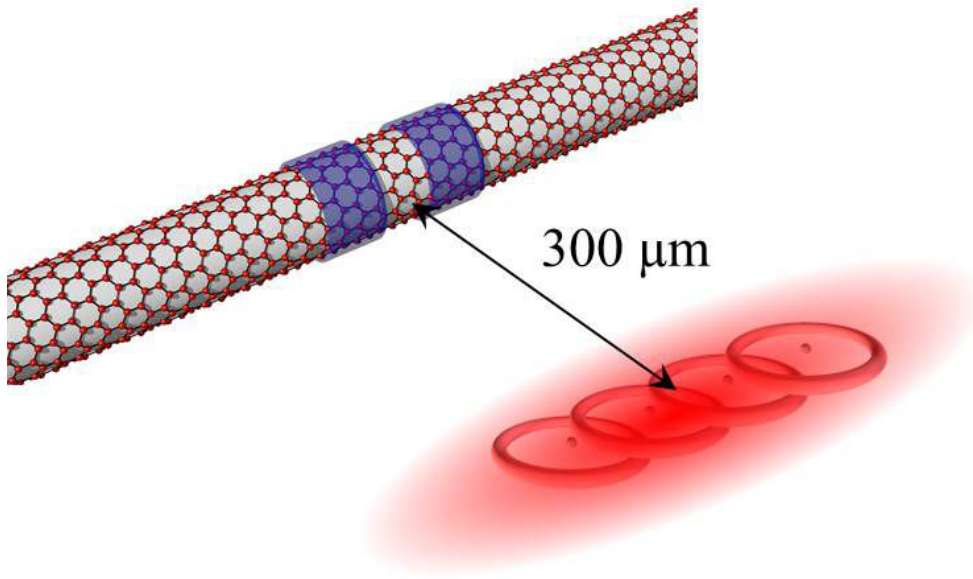


FIGURE V.25 – Perspectives d'électrométrie non invasive : vers la détection non destructive d'un électron dans une boîte quantique en nanotube de carbone avec une résolution sub-microseconde par un petit échantillon d'atomes de Rydberg piégés. Image du nanotube de carbone extraite de [220].

Finalement, les multiplicités Stark d'un atome de Rydberg offrent de multiples possibilités en termes de génération d'états présentant une grande sensibilité métrologique. En effet, l'état du moment cinétique que nous avons généré dans ce manuscrit est à la fois sensible aux champs électriques et magnétiques. Sa sensibilité aux champs magnétiques est d'environ $20 \text{ nT}/\sqrt{\text{Hz}}$, ce qui, même en piégeant un atome de Rydberg dans un volume d'un μm^3 , est un peu moins compétitif que les meilleures mesures magnétométriques actuelles. Cependant, de nouveaux états peuvent être générés telles des superpositions d'états de nombres quantiques magnétiques m ou électriques $n_1 - n_2 = m_1 - m_2$ opposés, permettant d'accroître plus encore la sensibilité métrologique de notre méthode. Ce type de superpositions d'états, représentées à la Figure V.26, peut être généré par des méthodes de contrôle cohérent au sein de la multiplicité Stark, mettant en jeu la manipulation des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1$ et $\hat{\mathbf{J}}_2$ par des techniques très similaires à celles présentées dans ce manuscrit. Le couplage de ces moments cinétiques à des champs radiofréquences de polarisations σ_+ et σ_- associé à des techniques d'adressage d'états Stark individuels comme utilisées dans le cadre des expériences sur la dynamique Zénon quantique permettrait théoriquement la génération de toute une faune d'états aux propriétés intéressantes.

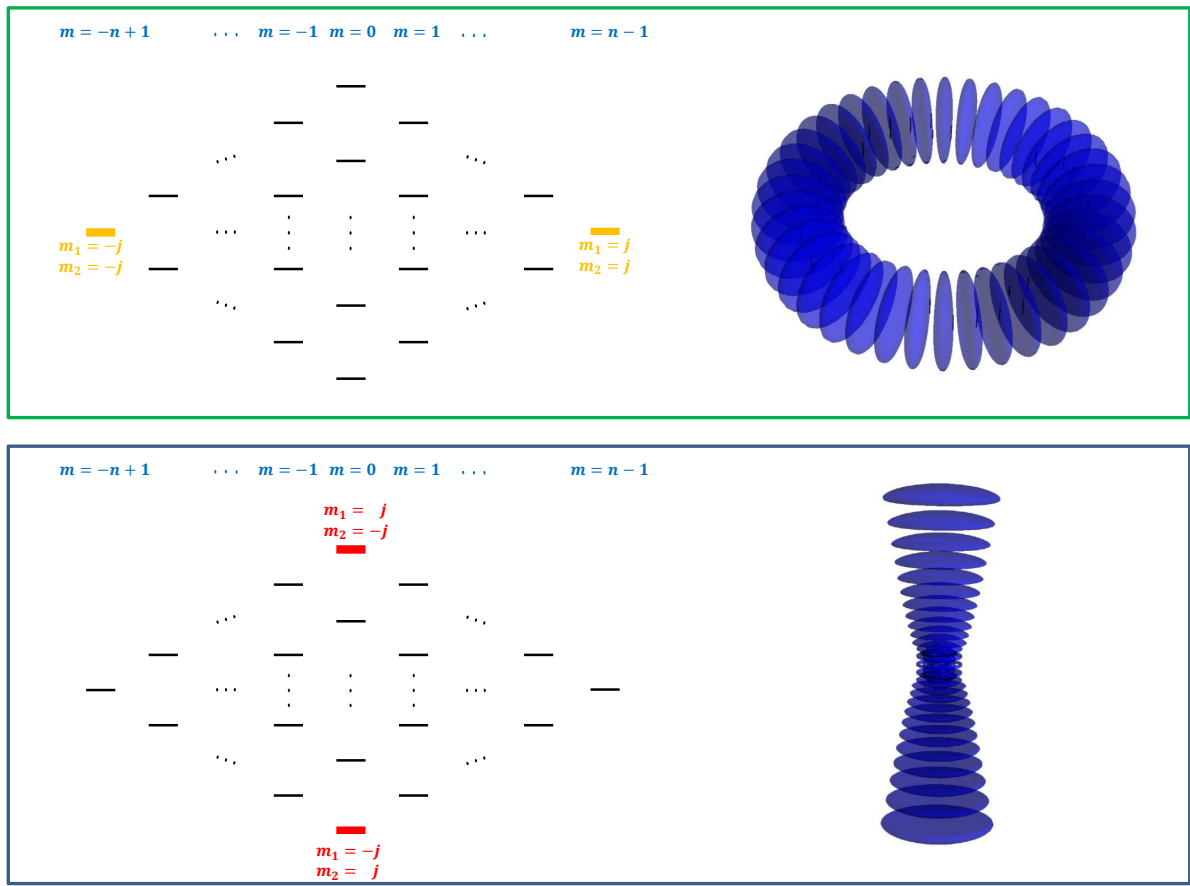


FIGURE V.26 – *Superpositions d'états extrêmes au sein d'une multiplicité Stark d'un atome de Rydberg. Dans le cadre du haut, on représente la fonction d'onde d'une superposition d'états circulaires de nombres quantiques magnétiques m opposés. Les deux états composant cette superposition sont représentés en trait gras orange au sein de la multiplicité Stark. Dans le cadre du bas, on représente la fonction d'onde d'une superposition d'états de nombres quantiques électriques $n_1 - n_2 = m_1 - m_2$ opposés. Les deux états composant cette superposition sont représentés en trait gras rouge au sein de la multiplicité Stark.*

En conclusion, les multiplicités Stark d'un atome de Rydberg offrent un très large espace de Hilbert dans lequel de nombreuses expériences de physique atomique peuvent être réalisées. En augmentant le nombre quantique principal n , ces atomes permettent finalement de produire des états quantiques de plus en plus mésoscopiques et d'explorer un peu plus loin encore la limite entre le monde quantique et le monde classique.

Annexe A

Analogie avec l'oscillateur harmonique

Ce manuscrit s'attache à décrire diverses dynamiques d'un moment cinétique « porté » par un atome de Rydberg en champ électrique statique et couplé à un champ radiofréquence polarisé σ_+ . Au sein d'une multiplicité $n \sim 50$ donnée et à partir de l'état de Rydberg circulaire, qui est à la fois un état de Dicke et un état cohérent de spin, l'atome couplé au champ radiofréquence classique demeurera dans un état cohérent de spin. Ceci explique le rôle central des états cohérents de spin dans ce manuscrit et n'est pas sans nous faire penser à la croissance du nombre de photons dans une cavité couplée à une source classique [190].

Cette analogie n'est pas fortuite et nous allons dans cette annexe commencer par dériver les résultats du chapitre I transposés au cas de l'oscillateur harmonique. Nous commencerons par décrire les états propres de l'oscillateur harmonique avant de définir l'opérateur déplacement dans le plan de phase ainsi que les états cohérents de l'oscillateur alors appelés « champs cohérents ». Nous finirons par présenter les méthodes de représentation des états du champ électromagnétique que constituent les fonctions de Husimi- Q et de Wigner.

Cette annexe reprend un certain nombre de notions et résultats bien connus que le lecteur pourra retrouver dans les ouvrages de référence de mécanique et d'optique quantique tels [119, 125, 134, 221].

A.1 États propres de l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique unidimensionnel est décrit par les opérateurs position et impulsion canoniquement conjugués \hat{q} et \hat{p} , vérifiant la relation de commutation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \mathbf{1}$. On forme à partir de ces deux opérateurs les opérateurs d'annihilation et de création :

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(\omega m q + i p) \\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(\omega m q - i p) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

dont les relations de commutation sont $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbf{1}$.

Ces opérateurs d'échelle permettent de réécrire le hamiltonien du système sous la forme simplifiée :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) , \quad (\text{A.2})$$

où l'opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ appelé opérateur nombre a pour spectre l'ensemble des nombres entiers naturels, ceci expliquant cela. L'état propre de plus basse énergie est appelé *état vide*, noté $|0\rangle$, et a donc une énergie non nulle $E_{|0\rangle} = \hbar\omega/2$. L'état vide, qui est donc l'état fondamental de l'oscillateur harmonique, vérifie la relation $\hat{a}|0\rangle = 0$, ce qui constitue un moyen de définir cet état vide.

Les autres états propres, équidistants en énergie de la quantité élémentaire $\hbar\omega$, s'obtiennent par action répétée de l'opérateur création sur l'état vide :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

Ces états sont appelés états nombres ou états de Fock. Ils sont l'analogue des états de Dicke, états propres de l'opérateur \hat{J}_z , qui s'obtiennent de proche en proche par action successive des opérateurs d'échelle \hat{J}_+ et \hat{J}_- (voir équation (I.90)). La relation de Heisenberg associée aux opérateurs nombre et phase montre que ces états de Fock n'ont pas de phase déterminée. Nous avons aussi constaté l'analogue de ce résultat lors de la représentation des états de Dicke sur la sphère de Bloch généralisée, qui présentaient une invariance par rotation autour de l'axe (Oz) (Figure I.13 **(a)** et Figures I.16 **(a)** et **(b)**).

A.2 Opérateur déplacement et champs cohérents

Au lieu d'appliquer l'opérateur création \hat{a} sur l'état du vide pour générer les états de Fock, intéressons nous à l'action de l'opérateur déplacement ou translation, qui produit un déplacement ξ sur la position et η sur l'impulsion :

$$\hat{T}_\alpha = e^{-\frac{i}{\hbar}(\xi\hat{p}-\eta\hat{q})} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger + \alpha^*\hat{a}} \quad , \quad (\text{A.4})$$

où α est un nombre complexe décrivant l'amplitude complexe du déplacement :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(\omega m\xi + i\eta) \quad . \quad (\text{A.5})$$

L'opérateur \hat{T}_α est un opérateur unitaire qui décrit l'évolution d'un mode du champ (piégé dans une cavité supraconductrice par exemple) couplé à une source classique résonante, dont l'amplitude et la phase définissent l'amplitude complexe α .

L'action de cet opérateur \hat{T}_α sur l'état du vide $|0\rangle$ définit les états cohérent $|\alpha\rangle$ encore appelés états de Glauber :

$$|\alpha\rangle = \hat{T}_\alpha|0\rangle \quad . \quad (\text{A.6})$$

Puisque $\hat{T}_\alpha \hat{a} \hat{T}_\alpha^{-1} = \hat{a} - \alpha \mathbb{1}$, les états cohérents $|\alpha\rangle$ vérifient la propriété suivante :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad , \quad (\text{A.7})$$

c'est-à-dire qu'ils sont états propres de l'opérateur annihilation \hat{a} .

L'utilisation des formules de Baker-Campbell-Hausdorff permet de réécrire l'opérateur translation \hat{T}_α sous une forme découplée suivant l'ordre dit normal et de développer immédiatement l'état cohérent $|\alpha\rangle$ en termes d'états de Fock :

$$|\alpha\rangle = \hat{T}_\alpha|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \quad . \quad (\text{A.8})$$

On obtient alors en développant en série l'exponentielle et utilisant (A.3) :

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{(\alpha^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \quad . \quad (\text{A.9})$$

Grâce à la relation de fermeture des états de Fock $\sum |n\rangle\langle n|$, on obtient ainsi le recouvrement entre deux états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-|\alpha-\beta|^2} . \quad (\text{A.10})$$

On retrouve ici la loi de Poisson qui n'est qu'approchée pour les états cohérents de spin à la limite semi-classique, comme nous le montrons au chapitre I (équation (I.129) page 60).

D'après, l'expression du hamiltonien (A.2), on vérifie que l'évolution libre d'un champ cohérent demeure un champ cohérent. En effet :

$$|\alpha\rangle(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \quad (\text{A.11})$$

$$= e^{-i\omega t/2} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n e^{-i\omega n t} \frac{(\alpha^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{A.12})$$

$$= e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (\text{A.13})$$

Les états cohérent du champ sont, comme les états cohérents de spin, des états *minimaux* vérifiant le cas de l'égalité dans les inégalités d'Heisenberg. Finalement, l'ensemble des états cohérents du champ forme aussi une base continue surcomplète de l'espace des phases vérifiant ma relation de fermeture :

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 , \quad (\text{A.14})$$

analogue de la relation (I.133) page 61.

A.3 Représentation de l'état du champ dans l'espace des phases

Les fonctions caractéristiques constituent des distributions dans l'espace des phases qui permettent de décrire complètement l'état du champ. Les relations de commutation permettent de définir plusieurs fonctions caractéristiques qui diffèrent par l'ordonnancement des différents termes. Les trois fonctions caractéristiques existantes permettent par transformée de Fourier inverse de définir des distributions dans le plan de phase.

Ainsi, la fonction caractéristique dans l'ordre antinormal $C_{an}(\lambda) = \text{Tr}(\rho e^{-\lambda^* \hat{a}} e^{\lambda \hat{a}^\dagger})$ permet de définir la fonction Q , aussi appelée distribution de Husimi- Q , par transformée de Fourier inverse à deux dimensions :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} C_{an}(\lambda) \quad . \quad (\text{A.15})$$

En insérant la relation de fermeture des états cohérents $\frac{1}{\pi} \int d^2\beta |\beta\rangle\langle\beta| = 1$, on obtient une expression simplifiée pour la fonction Q :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \langle 0 | \hat{T}_{-\alpha} \rho \hat{T}_\alpha | 0 \rangle \quad , \quad (\text{A.16})$$

qui s'interprète comme le recouvrement de l'état translaté d'une quantité α avec l'état vide de photon. Nous nous servons à la section I.2.2 de cette « définition » de la fonction Q pour définir par analogie la fonction Q de l'état d'un moment cinétique.

De manière similaire, on définit par transformée de Fourier inverse à deux dimensions de la fonction caractéristique dans l'ordre symétrique $C_s = \text{Tr}(\rho e^{\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}}) = \langle \hat{T}_\lambda \rangle$ la fonction de Wigner, qui peut s'écrire en fonction des éléments de matrice de ρ dans la base des états propres de la position $|x\rangle$ ($\alpha = x + ip$) sous la forme :

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int du e^{-2ipu} \langle x + u/2 | \rho | x - u/2 \rangle \quad , \quad (\text{A.17})$$

ce qui indique que la fonction de Wigner correspond à la transformée de Fourier des éléments non diagonaux de ρ dans la base des vecteurs propres de la position. Pour calculer la fonction de Wigner d'un moment cinétique, nous utilisons cependant au chapitre III une autre propriété de la fonction de Wigner. Il nous faut pour cela introduire l'opérateur parité $\hat{\Pi}$ tel que $\hat{\Pi}|x\rangle = |-x\rangle$ et $\hat{\Pi}|p\rangle = |-p\rangle$, qui correspond donc une symétrie centrale dans l'espace des phases. On peut alors montrer [134, 139] que la fonction de Wigner peut se réécrire sous la forme :

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \text{Tr}(\hat{T}_{-\alpha} \rho \hat{T}_\alpha \hat{\Pi}) \quad , \quad (\text{A.18})$$

qui montre que la fonction de Wigner correspond, à un facteur multiplicatif près, à la valeur moyenne de l'opérateur parité sur l'état translaté. A la section III.4.1, nous utilisons cette propriété afin de parvenir à mesurer expérimentalement la fonction de Wigner d'un moment cinétique.

Pour clore cette partie, nous donnerons sans les justifier les fonctions Q et de Wigner d'un état cohérent :

$$Q^{|\beta\rangle\langle\beta|}(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta-\alpha|^2} , \quad (\text{A.19})$$

$$W^{|\beta\rangle\langle\beta|}(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta-\alpha|^2} . \quad (\text{A.20})$$

Les coupes des fonctions Q et W d'un état cohérent sont donc des gaussiennes de largeur $1/\sqrt{2}$ et $1/2$ respectivement. La fonction de Wigner est donc $\sqrt{2}$ fois moins large que la fonction Q . Nous comparerons ce résultat dans le cas d'un moment cinétique à la Figure I.15 page 68.

Annexe B

Montage laser et asservissement

Cette annexe décrit le montage optique permettant la génération d'atomes de Rydberg par un processus d'excitation optique en trois échelons, qui sont ici rappelés :

$$5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2} \quad : \lambda_{L_1} = 780,24 \text{ nm} \quad ; \quad (\text{B.1})$$

$$5^2P_{3/2} \rightarrow 5^2D_{5/2} \quad : \lambda_{L_2} = 775,97 \text{ nm} \quad ; \quad (\text{B.2})$$

$$5^2D_{5/2} \rightarrow 49f \quad : \lambda_{L_3} = 1259,19 \text{ nm} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Les deux premiers échelons réalisent donc des transitions $\Delta m = +1$ grâce à deux photons σ^+ . Pour ces deux premiers échelons, l'axe de quantification se doit d'être orienté dans la direction de propagation des lasers. Pour le troisième échelon, le photon infrarouge π induit une transition $\Delta m = 0$, qui ne peut être réalisée que par un laser se propageant perpendiculairement à l'axe de quantification, conformément à la configuration des différents lasers Figure II.5 page 97.

Les méthodes d'asservissement des trois lasers L_1 , L_2 et L_3 associés à ces trois échelons seront ici présentées. Cette annexe décrira finalement la mesure du délai d'allumage de l'impulsion laser permettant l'excitation optique des atomes de Rydberg, par une méthode électronique ainsi que sur un signal atomique direct.

B.1 Premier échelon à 780 nm

Le laser L_1 à 780,24 nm réalise le premier échelon de l'excitation optique : $|5^2S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 4, m_{F'} = 4\rangle$. Ce laser est issu d'une diode DL PRO Toptica de 50 mW, qui est en fait la diode MASTER d'un système TA PRO MOPA

(Master Oscillator Power Amplifier). La sortie haute puissance du MOPA est destinée à la source d'atomes froids qui sera placée à terme sous le montage cavité dans le cadre d'une nouvelle expérience dite « Fontaine ». Quant à la sortie non amplifiée, elle est d'une part utilisée pour l'asservissement du laser par absorption saturée et d'autre part envoyée en parallèle au sein du cryostat, afin de réaliser l'excitation des états de Rydberg. Le montage optique concernant ce laser L_1 est dessiné Figure B.1.

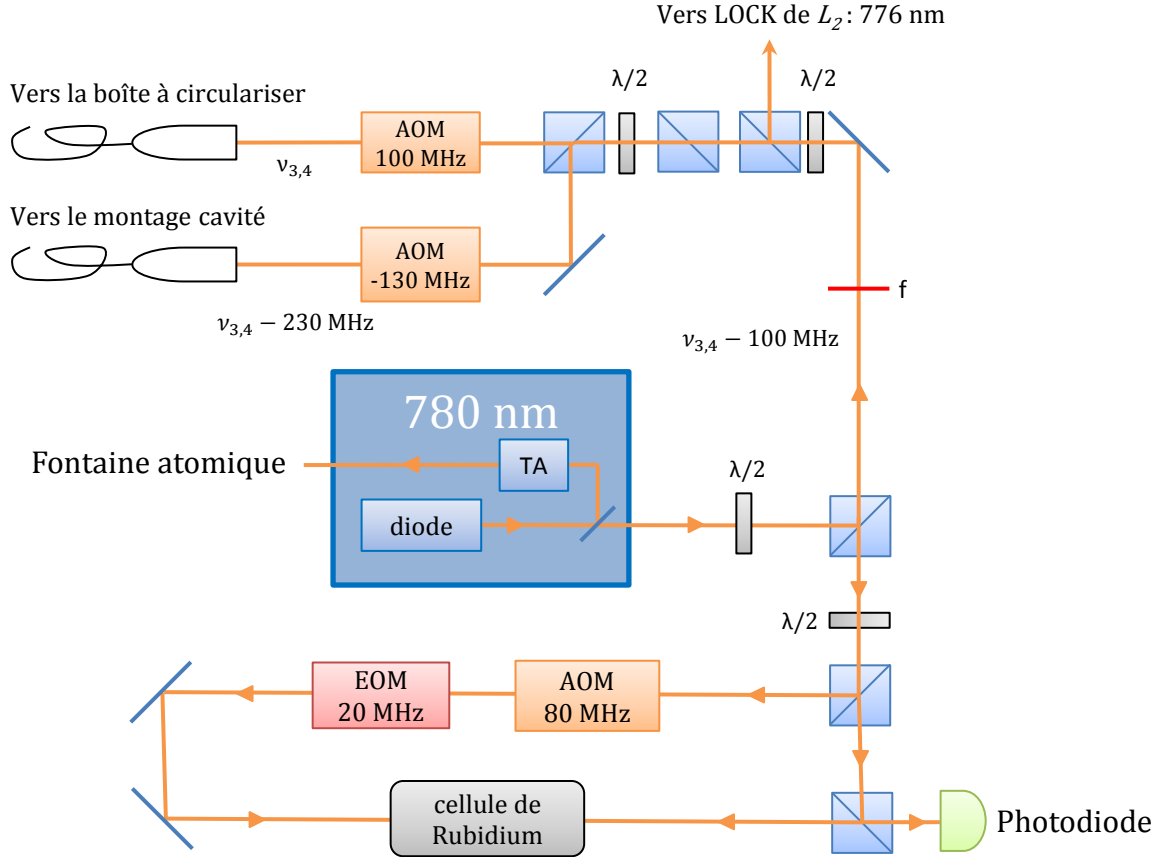


FIGURE B.1 – Montage optique du laser à 780 nm (L_1). La fréquence du laser est indiquée en certains points; $\nu_{3,4}$ désignant la fréquence de la transition de référence $|5^2S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 4, m_{F'} = 4\rangle$, ie la flèche rouge L_1 de la Figure II.12 page 109.

L'absorption simple du faisceau usuellement appelé « sonde » présente un élargissement Doppler, dû à la dispersion des vitesses atomiques dans la cellule, qui vient masquer la structure hyperfine du niveau intermédiaire $5^2P_{3/2}$. En effet, la distribution maxwellienne des vitesses atomiques à l'intérieur de la cellule fait que les atomes vont absorber des photons de fréquences décalées par rapport à la transition atomique. Ainsi, la largeur à mi-hauteur du pic d'absorption mesurée est d'environ 500 MHz, alors que la largeur intrinsèque de la transition $|5^2S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 4, m_{F'} = 4\rangle$ visée

est de 6 MHz [222]. Le signal d'absorption simple présente ainsi quatre pics inversés, qui correspondent aux structures hyperfines des niveaux fondamentaux du rubidium 85 et du rubidium 87, mais la structure hyperfine de l'état excité ne peut être résolue (Figure B.2 (a)).

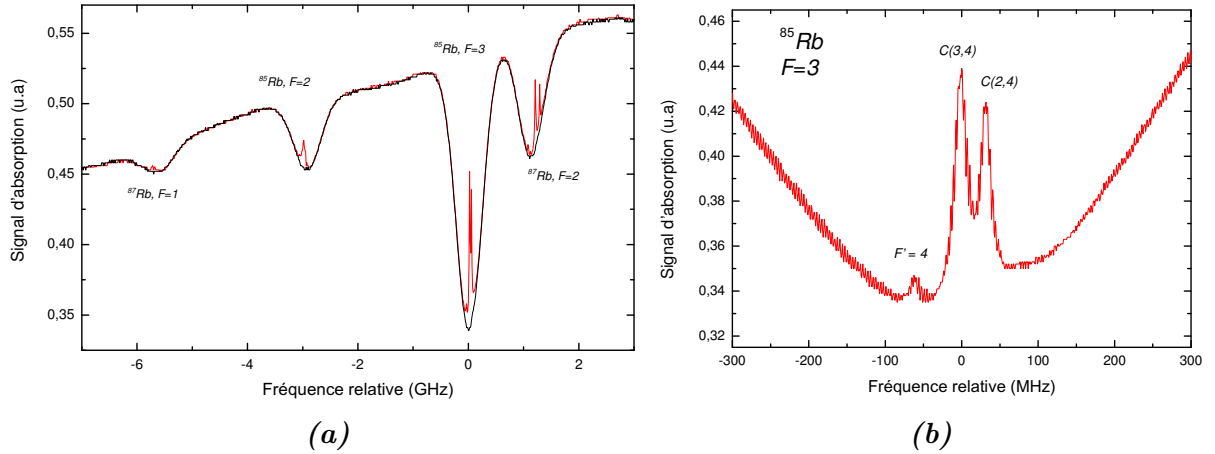


FIGURE B.2 – Signaux d'absorption. (a) Absorption simple et absorption saturée dans une cellule de rubidium composée d'un mélange des isotopes 85 et 87. L'absorption saturée résout la structure hyperfine de l'état $5^2P_{3/2}$. (b) Agrandissement sur les résonances depuis le niveau $5^2S_{1/2}, F = 3$ du rubidium 85. Seuls les cross-over $C(3,4)$ et $C(2,4)$ et la transition vers $F' = 4$ sont visibles sur ce spectre. La référence des fréquences est celle du cross-over $C(3,4)$.

Pour éviter cet élargissement Doppler et accéder à la structure fine dudit niveau excité, on utilise la méthode d'absorption saturée. Le laser est divisé en deux faisceaux, appelés dans la terminologie de l'absorption saturée faisceaux « sonde » et « pompe », qui traversent la cellule de rubidium de manière contrapropageante et interagissent chacun avec une classe de vitesse atomique bien précise. Dans le cas où la fréquence du laser n'est pas résonante avec une transition atomique, les deux faisceaux laser vont être à résonance avec deux classes de vitesse différentes, qui sont à résonance avec les lasers grâce à l'effet Doppler. Si par contre la fréquence du laser est résonante avec une transition atomique hyperfine, les atomes, dont la vitesse \vec{v} est perpendiculaire avec la direction de propagation des deux faisceaux $\pm \vec{k}$, où \vec{k} désigne le vecteur d'onde, sont résonants simultanément avec les faisceaux sonde et pompe. Ainsi, le faisceau pompe sature la transition depuis le niveau fondamental vers le niveau excité $5^2P_{3/2}$ et la sonde est ainsi moins absorbée. De là, l'observation de pics fins à l'intérieur des larges pics d'absorption simples (courbe rouge de la Figure B.2 (a)).

On observe cependant sur la Figure B.2 (b) d'autres pics d'absorption saturée depuis le niveau $|5^2S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle$: des résonances *cross-over*, pour lesquelles des atomes de la même classe de vitesse sont, dû à l'effet Doppler, résonants sur une transition pour

le faisceau pompe et une autre pour le faisceau sonde de telle sorte que pour le *cross-over* 3-4, noté $C(3,4)$:

$$\begin{cases} \hbar\nu_{3,3} = \hbar \left(\nu - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{2\pi} \right) \\ \hbar\nu_{3,4} = \hbar \left(\nu + \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{2\pi} \right) \end{cases} . \quad (\text{B.4})$$

La fréquence du *cross-over* est alors :

$$\nu = \frac{\nu_{3,3} + \nu_{3,4}}{2} . \quad (\text{B.5})$$

Le *cross-over* $C(3,4)$ est ainsi situé 60 MHz en dessous de la fréquence de la transition $|5^2S_{1/2}, F=3, m_F=3\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F'=4, m_{F'}=4\rangle, \nu_{3,4}$. Si l'on place un modulateur acousto-optique (AOM) à $\nu_{+1} = 80$ MHz dans une des branches de l'absorption saturée - dans notre cas, le faisceau sonde est l'ordre +1 -, le système B.4 se réécrit :

$$\begin{cases} \hbar\nu_{3,3} = \hbar \left(\nu + \nu_{+1} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{2\pi} \right) \\ \hbar\nu_{3,4} = \hbar \left(\nu + \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{2\pi} \right) \end{cases} , \quad (\text{B.6})$$

et la fréquence d'asservissement est alors :

$$\nu = \frac{\nu_{3,3} + \nu_{3,4}}{2} + \frac{\nu_{+1}}{2} . \quad (\text{B.7})$$

Le laser est donc asservi à -100 MHz de la fréquence $\nu_{3,4}$ de l'excitation Rydberg. Ce choix est motivé par l'utilisation future de ce faisceau MOPA pour la source d'atomes froids, qui rend un désaccord vers le rouge de 100 MHz par rapport à la transition atomique plus commode. Cet asservissement est réalisé par une méthode de spectroscopie par modulation de fréquence [223, 224]. Un modulateur électro-optique (EOM) est placé dans la boucle d'asservissement et va moduler la phase de faisceau sonde et ainsi créer deux bandes latérales situées à ± 20 MHz de la fréquence centrale du laser. Afin d'obtenir un signal d'erreur sur la fréquence, le signal reçu par la photodiode est homodyné par un module de détection synchrone. Ce signal fournit par l'intermédiaire d'un module Proportionnel-Intégrateur-Dérivateur (PID) un signal de correction envoyé en retour au laser.

Dans le cas d'une excitation Rydberg au sein de la boîte à circulariser, les lasers d'excitation sont orthogonaux à la direction de la propagation des atomes ; l'effet Doppler est donc nul. On place donc un AOM à +100 MHz avant d'injecter ce faisceau dans une fibre. Au sein du montage *cavité*, le laser L_1 et le jet atomique forment un angle de 135° : les atomes de vitesse $v_0 = 250$ m/s voient donc des photons laser décalés par effet Doppler de 230 MHz vers le bleu. Il convient donc de placer un AOM additionnel de -130 MHz. Au sein du montage formé par le jeu d'électrodes, on réalise donc grâce au laser L_1 , le premier échelon de l'excitation dans les niveaux de Rydberg pour des atomes sélectionnés en vitesse par effet Doppler.

Des lentilles sont ajoutées sur le chemin du faisceau afin d’optimiser le couplage dans les fibres qui relient la table d’optique au cryostat. Pour des raisons d’encombrement de la table d’optique, la mise en forme du faisceau n’a pu être réalisée comme habituellement dès la sortie du laser.

B.2 Deuxième échelon à 776 nm

Le laser L_2 à 775,97 nm réalise le deuxième échelon de l'excitation optique : $|5^2P_{3/2}, F' = 4, m_{F'} = 4\rangle \rightarrow |5^2D_{5/2}, F'' = 5, m_{F''} = 5\rangle$. Ce laser est issu d'une diode DL PRO Toptica de 50 mW. Le montage optique concernant ce laser L_2 est représenté à la Figure B.3.

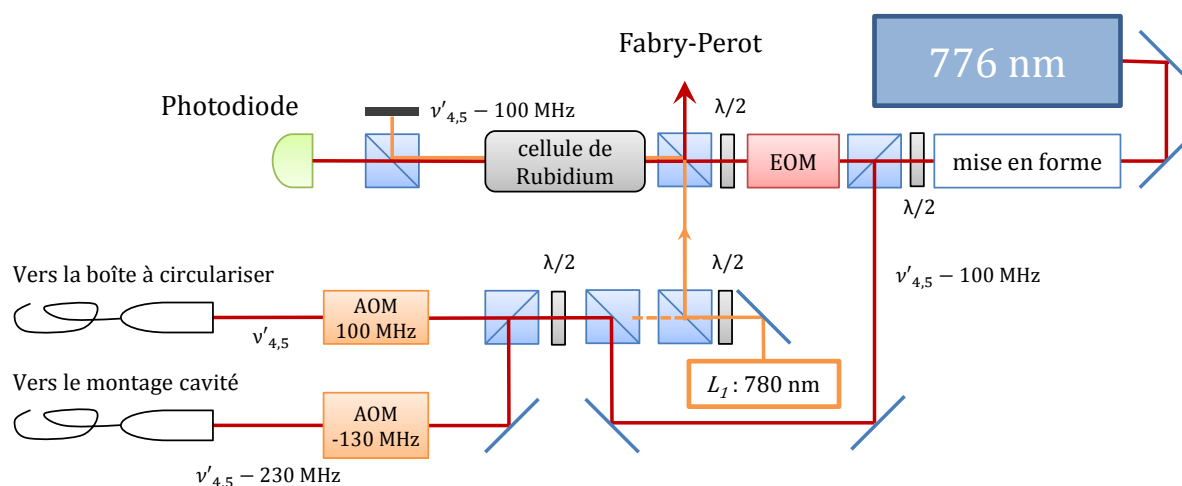


FIGURE B.3 – Montage optique du laser à 776 nm (L_2). La fréquence du laser est indiquée en certains points; $\nu'_{4,5}$ désigne la fréquence de la transition de référence $|5^2P_{3/2}, F' = 4, m_{F'} = 4\rangle \rightarrow |5^2D_{5/2}, F'' = 5, m_{F''} = 5\rangle$, ie la flèche rouge L_2 de la Figure II.12 page 109.

Le faisceau est mis en forme par un jeu de lentilles cylindriques et sphérique afin d'optimiser par un bon choix des focales le couplage dans les fibres qui le guide jusqu'à l'expérience. Une partie du faisceau de sortie est utilisée pour asservir la fréquence du laser. Le laser L_2 doit être asservi sur une transition entre deux niveaux excités. Ainsi, le laser L_1 est envoyé simultanément dans une cellule de rubidium afin de réaliser une première excitation depuis le niveau fondamental. Les deux lasers L_1 et L_2 se recouvrent parfaitement et se propagent dans la même direction dans la cellule.

Le laser L_1 étant asservi 100 MHz en dessous de la fréquence $\nu_{3,4}$, soit 100 MHz en dessous du premier échelon d'excitation, il ne va promouvoir sur le niveau excité $|5^2P_{3/2}, F' = 4, m_{F'} = 4\rangle$ que des atomes d'une classe de vitesse bien déterminée, telle que l'effet Doppler compense ce désaccord de 100 MHz. Les fréquences des lasers L_1 et L_2 étant très voisines (écart relatif de 0,5%), le laser L_2 sera donc absorbé par ces atomes lorsque sa fréquence sera 100 MHz en dessous de la fréquence $\nu'_{4,5}$ de la transition atomique $|5^2P_{3/2}, F' = 4, m_{F'} = 4\rangle \rightarrow |5^2D_{5/2}, F'' = 5, m_{F''} = 5\rangle$. Comme précédemment pour le laser L_1 , l'asservissement est réalisé par modulation de fréquence et détection synchrone, d'où la présence d'un modulateur électro-acoustique dans la branche d'asservissement.

La partie du laser L_2 à 776 nm destinée à l'expérience en elle-même vient se superposer au laser L_1 à 780 nm et traverse donc, avant d'être injectée dans les fibres guidant au cryostat, les mêmes modulateurs acousto-optiques que le laser L_1 . Ainsi, comme noté Figure B.3, la fréquence, décalée de -100 MHz, du faisceau destiné à la boîte à circulariser est ramenée exactement à résonance $\nu'_{4,5}$ avec la transition atomique correspondant au deuxième échelon d'excitation; tandis que le faisceau destiné au *montage cavité* est lui désaccordé de 230 MHz vers le rouge. Comme déjà évoqué, la géométrie des lasers dans la structure des électrodes et la proximité des longueurs d'onde des lasers L_1 et L_2 vont avoir pour conséquence que la fréquence des atomes de la classe de vitesse à $v_0 = 250$ m/s sélectionnée par L_1 sur le premier échelon, sera aussi résonante avec la fréquence du deuxième échelon.

Les faisceaux superposés des lasers L_1 et L_2 sont couplés en polarisation linéaire dans les mêmes fibres optiques monomodes à maintien de polarisation Schäfter-Kirchhoff PMC-780-5.2-NA012-20-APC. La table d'optique fournissant les fréquences lasers nécessaires à plusieurs expériences situées dans deux salles voisines du Collège de France, ces fibres d'une longueur de vingt mètres sont chacune insérées dans des gaines en plastique puis, toutes ensemble, placées à l'intérieur d'un tube PVC armé guidé le long du plafond d'une salle à l'autre. Ces très longues fibres sensibles aux variations de températures, occasionnent des instabilités de polarisation et *in fine* de puissance inévitables mais relativement inoffensives, n'affectant somme toute que le nombre absolu d'atomes de Rydberg créés.

Les efficacités de couplage des deux lasers sont de l'ordre de 50 %. En sortie de fibre, une lame $\lambda/4$ (non représentée sur le schéma du montage) transforme la polarisation linéaire des deux faisceaux superposés en une polarisation circulaire. Les deux faisceaux, qui pénètrent dans le cryostat par un petit hublot, sont focalisés au centre du cryostat par une lentille convergente de focale $f = 30$ cm. On estime ainsi à l'intersection avec le jet atomique un diamètre des faisceaux de $580 \mu\text{m}$. La puissance du laser L_1 est de $19,6 \mu\text{W}$ afin de ne pas saturer la transition et obtenir une bonne sélection en vitesse. Le laser L_2 est lui à une puissance de $310 \mu\text{W}$.

On note finalement Figure B.3 page 289 qu'une partie du faisceau du laser L_2 servant à l'asservissement en fréquence de celui-ci est prélevé pour servir de référence à une cavité Fabry-Perot. Cette cavité Fabry-Perot servira à l'asservissement du troisième et dernier laser L_3 présenté dans la partie suivante.

B.3 Troisième échelon à 1,3 μm

Le laser L_3 à 1,3 μm réalise le troisième et dernier échelon de l'excitation optique depuis le niveau $5^2D_{5/2}$, $F'' = 5$, $m_{F''} = 5$ vers le niveau nf , $m = 2$ avec $49 \leq n \leq 52$ selon les fréquences précises atteignables par le laser. Ce laser est donc de fréquence ajustable afin de viser la multiplicité n désirée. Le laser est produit par une diode DL PRO-100 Toptica. Le montage optique concernant ce laser L_3 est dessiné Figure B.4.

Comme à l'habitude, le laser est dès sa sortie mis en forme afin d'optimiser le couplage dans la fibre qui l'achemine jusqu'au cryostat. Puis une partie de sa puissance est prélevée afin de l'asservir en fréquence sur une cavité Fabry-Perot de longueur $L = 11$ cm et d'intervalle spectral libre $\Delta\nu = c/(2L) = 1,36$ GHz pour une largeur spectrale de 10 MHz. Un modulateur électro-optique module la phase du signal optique pour créer deux bandes latérales à 20 MHz au-delà de la largeur spectrale du Fabry-Pérot. Ces bandes latérales vont donc être réfléchies lorsque le laser est à résonance avec la cavité optique. Le signal de réflexion est alors recueilli sur la Photodiode 1. En comparant, la phase de la porteuse avec celles des bandes latérales réfléchies, on génère un signal d'erreur permettant d'asservir en fréquence le laser [225].

Pour prévenir les fluctuations à long terme, la cavité Fabry-Perot est stabilisée sur le laser verrouillé L_2 qui traverse la cavité en sens inverse. Auparavant, ce faisceau issu du laser L_2 traverse un modulateur électro-acoustique à 20 MHz ainsi qu'un modulateur acousto-optique large bande en double-passage, ce qui permet de verrouiller la cavité sur une fréquence ajustable. A partir du signal reçu sur la Photodiode 3, on asservit ainsi la longueur de la cavité optique en utilisant la même méthode décrite précédemment [225].

B.4 Délai d'allumage

Les lasers L_1 et L_2 sont allumés en continu ; seul le laser L_3 à $1,3\text{ }\mu\text{m}$ est *pulsé* grâce à un modulateur acousto-optique (AOM) sur la table d'optique. Lorsque l'ordinateur de contrôle envoie un signal d'allumage laser, le signal est transmis par un câble BNC de vingt mètres, l'ordre +1 de l'AOM est alors injecté dans une fibre optique de même longueur et arrive enfin au cryostat.

Afin de mesurer le délai d'allumage du laser L_3 déclenchant le troisième échelon de l'excitation Rydberg, on place tout d'abord une photodiode positionnée juste avant l'entrée du cryostat. On mesure alors le retard entre le signal TTL d'allumage et l'impulsion lumineuse reçue par la photodiode. La Figure B.5 (a) présente en rouge, le signal TTL déclenché à $t = 0$ et en noir, le signal reçu par la photodiode converti en tension avec 0 dB de gain. Le signal TTL, qui est normalement une impulsion carrée, est déformé par les rebonds dans les câbles qui permettent sa visualisation sur un oscilloscope. On mesure un allumage à 780 ns et une montée de l'ordre de 100 ns. Si l'on prend en compte le temps de propagation du signal dans le câble reliant la photodiode à l'oscilloscope (15 ns), on conclut donc que l'allumage du laser se fait avec un délai de 765 ns.

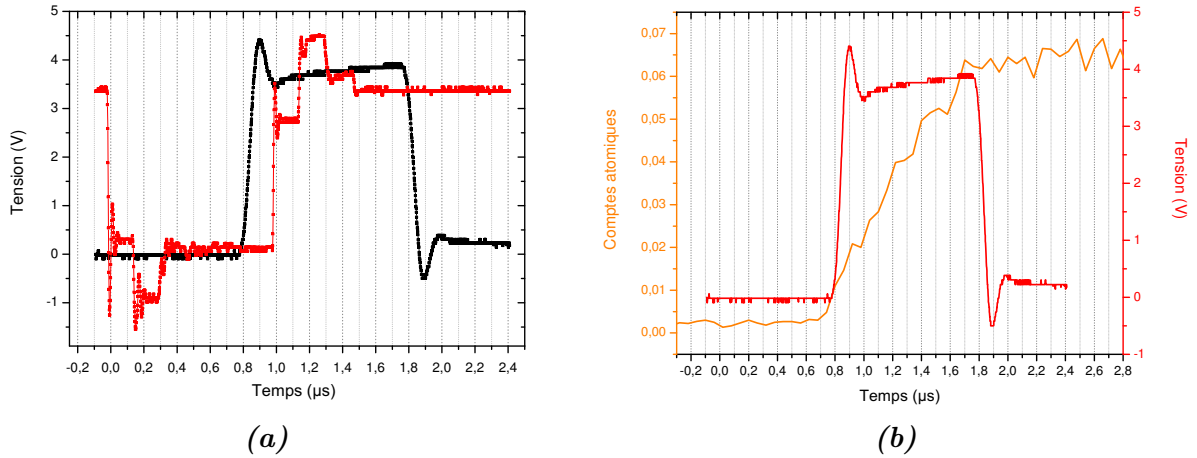


FIGURE B.5 – Délai d'allumage du laser L_3 et fin de l'excitation Rydberg. (a) Le signal TTL d'allumage (courbe rouge) est déclenché à $t = 0$. On mesure le signal reçu par une photodiode (0 dB de gain) positionnée à l'entrée du cryostat (courbe noir). (b) On mesure le nombre d'atomes dans l'état de Rydberg $52f, m = 2$ produit lorsqu'une marche de champ électrique est déclenchée au temps t , désaccordant violemment le laser d'excitation L_3 de la transition atomique associée au troisième échelon de l'excitation (courbe orange). La courbe rouge reproduit le signal mesuré par la photodiode précédemment.

Par ailleurs, afin de synchroniser l'impulsion laser avec les autres signaux électriques appliqués sur les atomes, on veut savoir précisément l'instant où l'impulsion laser d'excitation s'achève. Pour cela, on s'appuie directement sur un signal atomique : on génère une grande marche de champ électrique sur les électrodes désaccordant ainsi l'excitation

Rydberg et l'on balaye sa position dans le temps. Cette impulsion produit en un temps de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes un champ électrique, toujours aligné le long de l'axe de quantification nécessaire à l'excitation, mais 1,87 fois plus grand, de telle sorte que le laser L_3 n'est plus résonant avec le troisième échelon de l'excitation et aucun atome n'est excité dans les niveaux nf .

La Figure B.5 **(b)** présente le nombre d'atomes détectés dans le niveau $52f, m = 2$, lorsque la marche de champ électrique est déclenchée à différents temps t , le TTL d'allumage du laser étant fixé à $t = 0$. Si la marche de champ a lieu à l'instant $t = 0$, l'excitation laser 765 ns plus tard sera désaccordée avec le niveau atomique visé : aucun atome n'est détecté. On voit cependant qu'à $t = 1,76 \mu\text{s}$, le nombre d'atomes créé dans le niveau $52f, m = 2$ a atteint sa valeur stationnaire et indique ainsi la fin effective de l'excitation Rydberg. On peut ainsi dès $t = 1,76 \mu\text{s}$ déclencher le processus dit de *circularisation* consistant, pour cette multiplicité donnée, à amener notre atome dans l'état $52f, m = 2$ jusque l'état de Rydberg circulaire $|52, n_1 = 0, m = 51\rangle \equiv |52c\rangle$. On observe en visualisant simultanément le signal reçu par la photodiode (courbe rouge Figure B.5 **(b)**) que cet instant correspond au moment où ce signal commence à décroître.

Annexe C

Génération de champs micro-ondes

Les états de Rydberg circulaires incarnent véritablement le modèle de l'atome de Bohr. En particulier, l'énergie de ces niveaux est très bien décrite par la loi de de Rydberg-Ritz [113]. Les transitions entre niveaux circulaires de multiplicités adjacentes n et $n + 1$ sont ainsi séparées par une fréquence de :

$$\nu_{n,n+1} = -cR_y \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) , \quad (\text{C.1})$$

qui varie en n^{-3} et dont les valeurs sont reportées ci-dessous pour les n d'intérêt dans ce manuscrit ($n = 49, \dots, 52$).

$$\nu_{49,50} = 54,260 \text{ GHz} , \quad (\text{C.2})$$

$$\nu_{50,51} = 51,099 \text{ GHz} , \quad (\text{C.3})$$

$$\nu_{51,52} = 48,180 \text{ GHz} . \quad (\text{C.4})$$

Dans le domaine micro-onde, ces fréquences sont générées à partir d'un signal à environ 12 GHz, produit par des synthétiseurs Anritsu-MG3692, qui passe ensuite par un élément non linéaire (« un mélangeur ») générant la quatrième harmonique dans la gamme des 50 GHz. Ces synthétiseurs sont précis au Hertz près et constituent un outil d'une précision chirurgicale permettant de naviguer entre les niveaux inter-multiplicités.

C.1 Montage

Un même synthétiseur ne peut cependant pas changer de fréquence à l'échelle de la micro-seconde. Nous utiliserons ainsi pour les expériences de métrologie jusqu'à trois synthétiseurs, dont les signaux passent dans des coupleurs 3 dB montés en série permettant de guider les trois fréquences au sein d'un même câble micro-onde avant d'être quadruplées par un unique mélangeur millitect-AMC-15-RFH00. En effet, au cours d'une séquence expérimentale, nous n'aurons jamais besoin d'injecter simultanément deux champs micro-ondes de différentes fréquences, ce qui permet l'utilisation d'un seul quadrupleur actif. Ce quadrupleur rayonne à l'intérieur d'un guide d'onde WR-15 de taille $3,8 \times 1,9$ mm monomode dans notre gamme de fréquence, qui est ensuite connecté à un câble coaxial en acier inoxydable qui descend le long du cryostat par l'intermédiaire d'un adaptateur Anritsu-35WR15VF. Le champ micro-onde repasse ensuite par un guide d'onde guidant jusqu'au niveau de la plaque supportant le montage cavité, rayonne ensuite dans tout le volume et se couple aux modes stationnaires, en particulier à l'intérieur de la structure des électrodes. Cette dernière adaptation câble coaxial/guide d'onde détermine la polarisation du champ micro-onde qui n'est donc pas modifiable une fois le cryostat fermé.

C.2 Mesure des temps d'allumage et d'extinction

Afin d'avoir accès à l'allumage effectif du champ micro-onde, on prélève une partie du signal envoyé au quadrupleur actif et on le fait battre avec une source continue (un YIG ou un autre Anritsu), dont la fréquence est ajustée afin de pouvoir visualiser le battement sur un oscilloscope à 350 MHz de bande passante.

Ce battement permet de calibrer les durées d'allumage et d'extinction des champs micro-ondes lors d'une consigne en impulsion, ainsi que le délai entre la consigne générée par l'ordinateur de commande et l'allumage effectif. Selon le modèle du synthétiseur, deux moyens seront utilisés afin de mettre en forme une impulsion micro-onde : une consigne TTL sur l'entrée PULSE TRIG IN des synthétiseurs Anritsu les plus récents et l'utilisation d'une PIN diode pour les synthétiseurs Anritsu non munis du mode pulsé. Le battement permet de mesurer un temps d'allumage (flanc montant) et d'extinction (flanc descendant) de 5 ns pour le mode pulsé et de 30 ns avec la PIN diode. Le délai entre le signal TTL et l'allumage effectif du champ micro-onde est de 60 ns pour le mode pulsé et de 110 ns avec la PIN diode. Finalement, une étude sur analyseur de spectre de ces deux modes d'extinction du signal montre une dynamique de -67 dBm pour la PIN diode et mieux que -80 dBm (limite de sensibilité de l'analyseur de spectre) pour le mode pulsé du synthétiseur.

Dans le cadre des expériences de métrologie, ces données sont importantes car elle permettent de rendre la chronologie des séquences la plus compacte possible. Limitant ainsi les « temps morts », les atomes préparés dans des superpositions d'états et traversant le montage explorent d'autant moins l'espace entre les électrodes et « voient » donc moins d'inhomogénéités du champ électrique, sources de décohérence. Le seul synthétiseur ne disposant pas de mode pulsé, qu'on munira donc d'une PIN diode, sera alloué à la réalisation des sondes micro-ondes, dont le timing est bien moins critique. En effet, ces sondes consistent simplement au transfert en fin de séquence des atomes dans une multiplicité adjacente afin que la détection par ionisation, ne distinguant proprement que des états de nombre quantique principal n différents, compte avec un bon signal sur bruit les probabilités d'occupation des divers niveaux Stark.

Annexe D

Montage électronique QZD

Un schéma complet du montage électronique, utilisé dans le cadre des expériences sur la dynamique de Zénon quantique décrites au chapitre III, est présenté Figure D.1. Les champs radiofréquences, permettant la génération d'atomes de Rydberg circulaires et la manipulation du moment cinétique \hat{J}_1 en présence d'une mesure Zénon, sont à une fréquence unique de 230 MHz. La description détaillée de ce montage, moins complexe que celui utilisé pour les expériences de métrologie, est très similaire à celle faite en II.1.6.a.

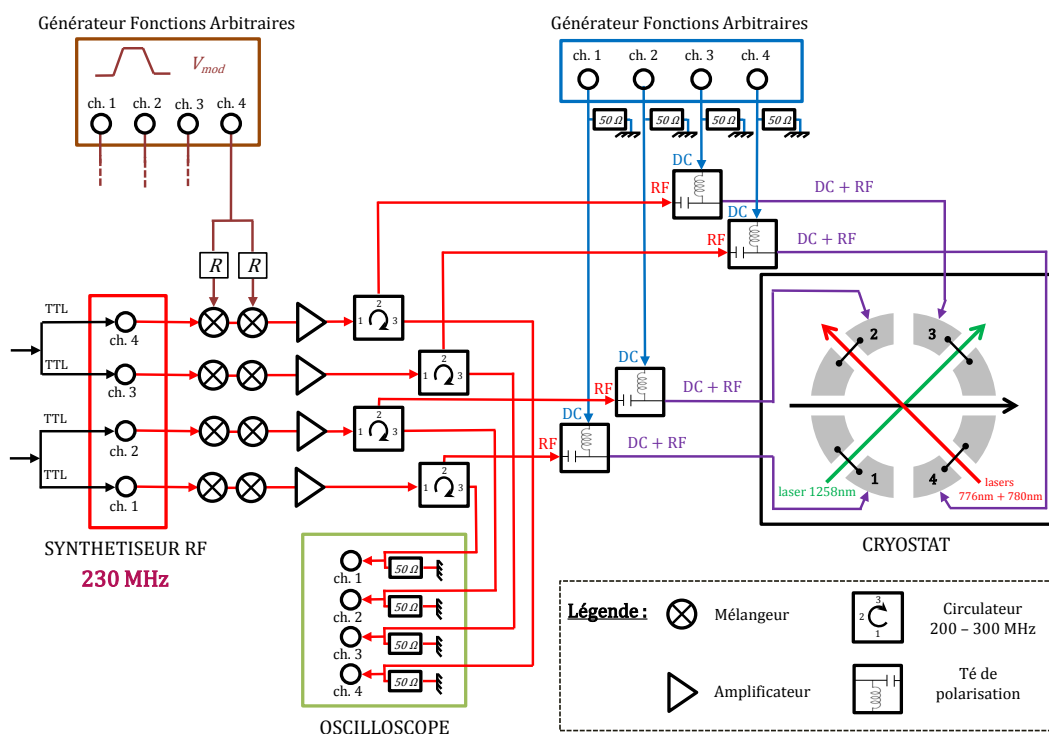


FIGURE D.1 – Schéma du montage électronique radiofréquence QZD.

Annexe E

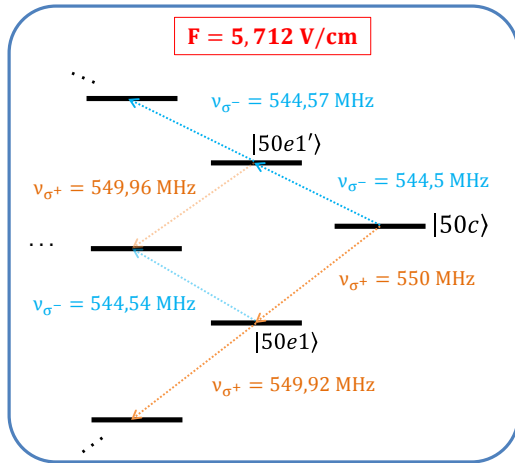
Étude du champ RF généré par une électrode

Rappelons brièvement que nous disposons d'un jeu de quatre électrodes qui entourent les deux miroirs plans horizontaux. Ces quatre électrodes peuvent générer au sein de la structure un champ électrique statique ainsi qu'un champ radiofréquence oscillant permettant de manipuler l'état interne de l'atome. Une première paire d'électrodes, reliée aux deux voies d'une carte PCI RF, produit un champ radiofréquence polarisé σ^+ oscillant à 230 MHz et permet aux atomes de Rydberg de faible moment cinétique orbital d'atteindre par absorption de photons radiofréquences le niveau de Rydberg circulaire d'une multiplicité donnée. La seconde paire d'électrodes, reliée à un synthétiseur, permet de générer un champ radiofréquence de fréquence ajustable. Il convient de régler la polarisation par ajustement des phases du champ appliqué sur chaque électrode. Nous étudierons dans cette partie le comportement de ces deux électrodes une à une.

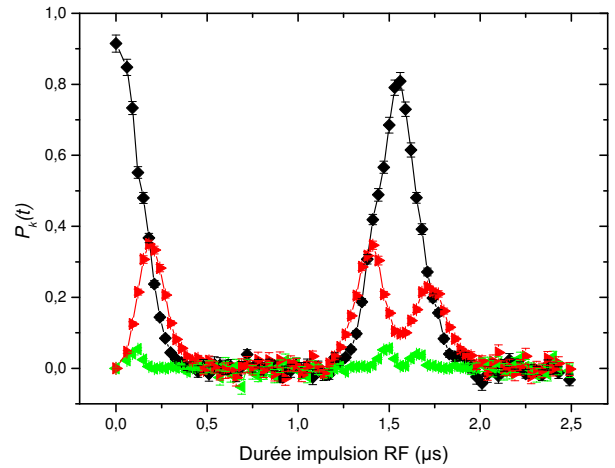
En théorie, une électrode seule, ne distinguant pas sa droite et sa gauche, produit un champ de polarisation linéaire. Cependant, un élément nous incite à tempérer cette affirmation : lorsque l'on parle ici « d'une électrode », on désigne en réalité deux électrodes élémentaires reliées entre elles, comme montré plus avant Figure II.6 **(b)** page 98. Ainsi, en appliquant un potentiel oscillant via un câble radiofréquence - visible sur la photo Figure II.6 **(b)** - en un point d'une électrode, des effets capacitifs ou inductifs peuvent induire un déphasage entre les deux sous-électrodes qui va déséquilibrer la balance σ^+/σ^- du champ radiofréquence.

E.1 Couplage résonant d'une composante du champ radiofréquence

Les considérations sur le temps de cohérence menées dans la partie IV.2 nous incitent à travailler à un champ électrique statique élevé. Pour commencer, nous nous sommes placés à 5,712 V/cm de sorte que la fréquence de la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$, qui est une transition σ^+ , soit de 550 MHz. Dans toute cette annexe, on notera les niveaux $|50, k=1\rangle$ et $|51, k=1\rangle$ par des notations plus compactes, soit respectivement $|50e1\rangle$ et $|51e1\rangle$. Un schéma de la structure des niveaux atomiques est présenté Figure E.1 (a). A ce champ électrique, la première transition σ^- à partir de l'état circulaire $|50c\rangle$, ie la transition $|50c\rangle \rightarrow |50, n_1=1, m=48\rangle$, est à une fréquence de 544,50 MHz au dessus du circulaire. On appellera ce niveau $|50, n_1=1, m=48\rangle \equiv |50e1'\rangle$. On note que les transitions $|50c\rangle \rightarrow |50e1\rangle$ et $|50c\rangle \rightarrow |50e1'\rangle$ ne sont pas du tout de même fréquence. Ceci est dû au fait que les niveaux $|50e1\rangle$ et $|50e1'\rangle$ subissent le même déplacement Stark quadratique négatif, alors que l'état circulaire subit un déplacement négatif moindre, ce qui asymétrise les deux échelles de spin. On note ensuite que l'ensemble des premières transitions σ_+ (flèches orange) sont de fréquences environ égales à 550 MHz alors que l'ensemble des transitions σ_- (flèches bleues) sont plutôt de fréquences environ égales à 544,5 MHz. Ceci s'explique par le fait que l'effet Stark quadratique différentiel ne décale que de ∓ 76 kHz chacune des transitions d'échelle σ_+ et σ_- successives. Deux familles



(a) Structure des niveaux atomiques



(b) Probabilités d'occupation

FIGURE E.1 – Couplage d'un atome au champ radiofréquence créé par une électrode. (a) Le champ électrique de 5,712 V/cm est choisi de sorte que la transition atomique $|50c\rangle \rightarrow |50e1\rangle$ soit résonante avec la radiofréquence à 550 MHz. La transition $|50c\rangle \rightarrow |50e1'\rangle$ est elle à 544,50 MHz. Deux familles de transitions apparaissent associées aux moments cinétiques $\hat{J}_1^{(50)}$ et $\hat{J}_2^{(50)}$ (flèches orange et bleues respectivement). (b) On couple l'atome initialement dans l'état $|50c\rangle$ à un champ radiofréquence généré par une électrode seule à 550 MHz. Les probabilités d'occupation des niveaux $|50c\rangle$, $|50e1\rangle$ et $|50e1'\rangle$ sont représentées respectivement en noir, rouge et vert.

différentes de transitions d'échelle sont ainsi associées aux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ qui se couplent respectivement aux composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence.

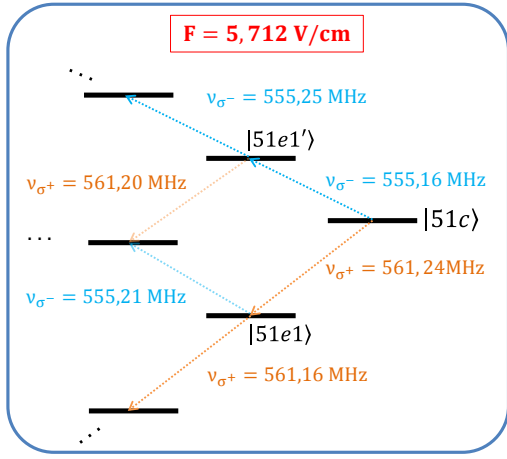
La Figure E.1 (b) présente l'évolution des probabilités d'occupation des niveaux $|50c\rangle$ (courbe noire), $|50e1\rangle$ (courbe rouge) et $|50e1'\rangle$ (courbe verte) pour un atome initialement dans le niveau $|50c\rangle$ et soumis à une impulsion radiofréquence de durée variable t , générée à partir d'une seule électrode. A ce champ électrique, le couplage d'un atome dans l'état $|50c\rangle$ à un champ radiofréquence à 550 MHz polarisé linéairement donne lieu à une dynamique complexe. En effet, lorsque le champ radiofréquence n'est pas polarisé σ_+ , l'atome ne peut plus être décrit par un simple moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$. D'autre part, la décomposition de l'algèbre de Lie \mathfrak{so}_4 en somme directe de deux algèbres \mathfrak{so}_3 permettant concrètement de décrire l'état atomique par deux moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ indépendants, n'est ici pas légitime non plus. En effet, le couplage résonant de la composante σ^+ avec le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ fait que ce moment cinétique va explorer des régions très au sud de la sphère \mathcal{B}_{50} , où l'effet Stark quadratique ne peut être négligé. A cause de cet effet Stark quadratique, qui dégrade l'harmonicité de l'échelle de spin, les moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ ne sont plus indépendants. La fréquence de précession de $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$ dépend de la valeur moyenne $\langle \hat{\mathbf{J}}_1^{(50)} \rangle$ et inversement. L'analyse de la dynamique est donc rendu plus complexe par cet effet Kerr croisé (*cross-Kerr effect*).

Finalement, la radiofréquence étant résonante avec la transition σ^+ , on observe que le niveau circulaire se dépeuple principalement au profit du niveau $|50e1\rangle$, comme on l'observe sur la Figure E.1 (b). Ainsi, la dynamique observée est gouvernée par celle du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et l'information concernant la composante σ^- est en quelque sorte masquée. Même grâce un modèle d'effet Kerr croisé, l'analyse du poids relatif des composantes σ^+ et σ^- du champ radiofréquence est ainsi rendue complexe pour cette valeur du champ électrique, où le couplage à l'une des deux composantes du champ radiofréquence est favorisé. Si l'on augmente la puissance du champ radiofréquence afin d'augmenter la pulsation de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma_-}$ de la composante σ_- par rapport au désaccord et « révéler » la dynamique du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2^{(50)}$, la durée durant laquelle l'atome se trouve dans les niveaux $|50c\rangle$, $|50e1\rangle$ et $|50e1'\rangle$ devient alors très courte et il est alors toujours difficile d'obtenir de l'information sur la polarisation de la radiofréquence durant ces courts instants.

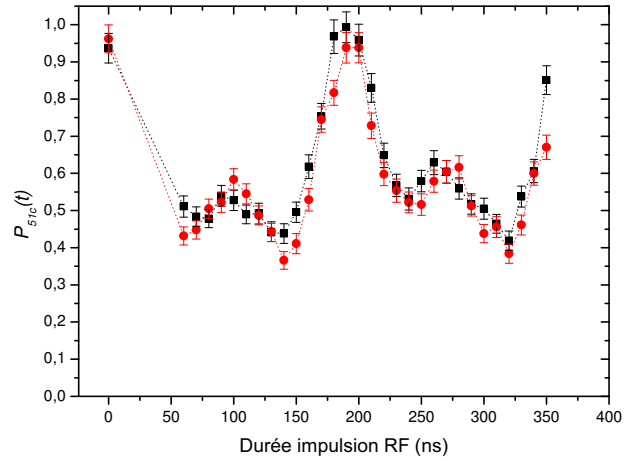
E.2 Couplage non résonant du champ radiofréquence

Afin de ne pas autant dépeupler le niveau circulaire initial à cause de la condition de résonance entre le champ radiofréquence et une des deux transitions atomiques vers les niveaux $|50e1\rangle$ ou $|50e1'\rangle$, on décide de se placer résolument hors résonance. Pour cela, on conserve le même champ électrique que précédemment (5,712 V/cm) mais l'on place

notre atome dans le niveau $|51c\rangle$, *ie* une multiplicité plus haut. L'effet Stark dépendant du nombre quantique principal n , la transition $\sigma^+ : |51c\rangle \rightarrow |51e1\rangle$ a pour fréquence 561,24 MHz alors que la transition $\sigma^- : |51c\rangle \rightarrow |51e1'\rangle$, est elle à 555,165 MHz. Ainsi, le champ radiofréquence demeurant à 550 MHz, il est alors désaccordé de respectivement $\delta_{\sigma^+} = \omega_{at} - \omega_{rf} = 2\pi \times 11,24$ MHz pour la transition σ^+ et de $\delta_{\sigma^-} = 2\pi \times 5,165$ MHz pour la transition σ^- . Un schéma de la structure des niveaux atomiques est présenté Figure E.2 (a). On observe toujours les deux familles de transitions σ_+ et σ_- associées aux transitions d'échelles des moments cinétiques $\hat{J}_1^{(51)}$ et $\hat{J}_2^{(51)}$ couplés respectivement aux composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence. Cependant le couplage de ces deux moments cinétiques avec un champ radiofréquence à 550 MHz sera désormais non résonant avec les deux composantes σ_+ et σ_- associées.



(a) Structure des niveaux atomiques



(b) Probabilités d'occupation

FIGURE E.2 – Couplage d'un atome au champ radiofréquence créé par une électrode. (a) Le champ électrique de 5,712 V/cm est choisi de tel sorte que la transition atomique $|50c\rangle \rightarrow |50e1\rangle$ soit résonante avec la radiofréquence à 550 MHz. L'état initial est ici l'état $|51c\rangle$. Les transitions $|51c\rangle \rightarrow |51e1\rangle$ et $|51c\rangle \rightarrow |51e1'\rangle$ sont désaccordées respectivement de 11,24 MHz et de 5,165 MHz par rapport au champ radiofréquence à 550 MHz. (b) On couple l'atome initialement dans l'état $|51c\rangle$ à un champ radiofréquence généré par une électrode seule à 550 MHz. Pour les électrodes 3 et 4, les probabilités d'occupation du niveau circulaire $|51c\rangle$ sont représentées respectivement en noir et rouge. L'absence de valeurs mesurées pour une durée de l'impulsion entre 0 ns et 60 ns (exclu) est uniquement due à une « limitation » de notre logiciel expérimental qui ne parvient pas à générer des impulsions de moins de 60 ns.

La dynamique observée Figure E.2 (b) est bien différente de celle observée précédemment. Cette fois-ci, le niveau circulaire $|51c\rangle$ est toujours peuplé avec une probabilité d'au moins 50%. Dans le cas d'un état cohérent de spin associé à un seul moment cinétique, si la probabilité d'occupation du niveau circulaire est de $P_{|j'_1, +j'_1\rangle}(t_0) = 0,5$ alors $P_{|j'_1, j'_1-1\rangle}(t_0) \approx \ln(2)/2 \approx 0,35$ et $P_{|j'_1, j'_1-2\rangle}(t_0) \approx \ln^2(2)/4 \approx 0,12$. Seuls ces trois premiers niveaux de l'échelle de spin sont donc notablement peuplés. Notre cas est plus complexe car deux moments cinétiques sont en jeu, mais cela signifie alors que l'atome n'explore

que les tous premiers niveaux de la multiplicité $n = 51$ pour lesquels $n_1, n_2 \leq 2$ (soit neuf niveaux Stark).

On propose ici un modèle simple pour décrire cette dynamique à partir de considérations géométriques simples sur la sphère de Bloch généralisée. A 5,712 V/cm et dans la multiplicité $n = 51$, l'effet Stark quadratique différentiel n'étant que de -82 kHz par transition d'échelle, le peuplement des seuls niveaux $n_1, n_2 \leq 2$ permet donc en très bonne approximation de considérer une structure linéaire des niveaux Stark pour décrire l'état de l'atome que l'on peut alors écrire comme le produit tensoriel de deux moments cinétiques :

$$|\psi(t)\rangle = |J_1^{(51)}(t)\rangle \otimes |J_2^{(51)}(t)\rangle \quad . \quad (\text{E.1})$$

Ainsi, le niveau $|51c\rangle$ étant le niveau de plus haute énergie pour le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$, soit $|j'_1, +j'_1\rangle$ et le niveau de plus basse énergie pour moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}$, soit $|j'_2, +j'_2\rangle$, on peut donc écrire :

$$P_{|51c\rangle}(t) = |\langle 51c|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle j'_1, +j'_1|J_1^{(51)}(t)\rangle|^2 \times |\langle j'_2, +j'_2|J_2^{(51)}(t)\rangle|^2 \quad . \quad (\text{E.2})$$

L'indépendance des deux moments cinétiques permet donc de restreindre notre étude à l'évolution des moments cinétiques considérés séparément. D'après la formule (I.131) exprimant le recouvrement de deux états cohérents de spin, on a :

$$|\langle j'_1, +j'_1|J_1^{(51)}(t)\rangle|^2 = \cos^{4j'_1} \left(\frac{\Xi(t)}{2} \right) \quad , \quad (\text{E.3})$$

où $\Xi(t)$ représente l'angle entre la direction $\mathbf{\Omega}_i = (\Theta = 0, \Phi = 0)$, associée à l'état $|j'_1, +j'_1\rangle$ pointant vers le Nord de la sphère de Bloch, et la direction $\mathbf{\Omega}_f(t) = (\Theta(t), \Phi(t))$, vers laquelle pointe le moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ à l'instant t . On sait par ailleurs que le couplage du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ à un champ radiofréquence de pulsation de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma_+}$ engendre sa précession autour du vecteur rotation $\mathbf{\Omega} = (\Omega_{RF}^{\sigma_+}, 0, \delta_{\sigma_+})$, où δ_{σ_+} représente le désaccord en pulsation. La colatitude de ce vecteur vaut $\theta_0 = \arctan(\Omega_{RF}^{\sigma_+}/\delta_{\sigma_+})$. Si l'on se place alors dans le repère tourné de $-\theta_0$ autour de \mathbf{e}_y , tel que le vecteur rotation soit maintenant l'axe vertical des coordonnées, les coordonnées des vecteurs d'états $|j'_1, +j'_1\rangle$ et $|J_1^{(51)}(t)\rangle$ s'écrivent alors :

$$\mathbf{\Omega}_i \equiv \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \\ 0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Omega}_f(t) \equiv \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \cos \varphi \\ \sin \theta_0 \sin \varphi \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{E.4})$$

où $\varphi(t) = \sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma_+})^2 + \delta_{\sigma_+}^2} \times t$ représente l'angle de précession autour du vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$. Ainsi, l'angle $\Xi(t)$ entre ces deux vecteurs vaut donc

$$\Xi(t) = \arccos \left(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \cos \varphi(t) \right) \quad . \quad (\text{E.5})$$

On obtient donc :

$$|\langle j'_1, +j'_1 | J_1^{(51)}(t) \rangle|^2 = \cos^{4j'_1} \left[\frac{1}{2} \arccos \left[\cos^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma^+}}{\delta_{\sigma^+}} \right) \right) + \sin^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma^+}}{\delta_{\sigma^+}} \right) \right) \cos \left(\sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma^+})^2 + \delta_{\sigma^+}^2} t \right) \right] \right]. \quad (\text{E.6})$$

En notant respectivement $\Omega_{RF}^{\sigma^+}$ et $\Omega_{RF}^{\sigma^-}$ les pulsations de Rabi des composantes σ^+ et σ^- du champ radiofréquence et respectivement δ_{σ^+} et δ_{σ^-} les désaccords entre les transitions $|51c\rangle \rightarrow |51e1\rangle$ et $|51c\rangle \rightarrow |51e1'\rangle$ et le champ radiofréquence, on obtient comme fonction d'ajustement :

$$P_{|51c\rangle}(t) = \cos^{4j'} \left[\frac{1}{2} \arccos \left[\cos^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma^+}}{\delta_{\sigma^+}} \right) \right) + \sin^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma^+}}{\delta_{\sigma^+}} \right) \right) \cos \left(\sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma^+})^2 + \delta_{\sigma^+}^2} (t - t_0) \right) \right] \right] \\ \times \cos^{2(n-1)} \left[\frac{1}{2} \arccos \left[\cos^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma^-}}{\delta_{\sigma^-}} \right) \right) + \sin^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma^-}}{\delta_{\sigma^-}} \right) \right) \cos \left(\sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma^-})^2 + \delta_{\sigma^-}^2} (t - t_0) \right) \right] \right]$$

qui dépend donc de cinq paramètres $\{\Omega_{RF}^{\sigma^+}, \Omega_{RF}^{\sigma^-}, \delta_{\sigma^+}, \delta_{\sigma^-}, t_0\}$. Les deux paramètres de désaccord sont en réalité liés par un unique paramètre physique qui est le champ électrique. Nous avons décidé de ne pas imposer de contraintes sur ces paramètres, de les laisser libres et indépendants pour l'ajustement et de vérifier *a posteriori* leurs compatibilités avec un même champ électrique. Le paramètre d'*offset* temporel t_0 correspond concrètement à un temps de retard à l'allumage du champ radiofréquence. Pour $t = 0$ *ie* en l'absence de radiofréquence, il n'y a cependant pas de « retard » à l'allumage et cela rend donc ce point de mesure – égal à l'unité, l'atome étant initialement dans l'état circulaire – quelque peu marginal et justifie le fait qu'il n'est pas pris en compte dans la procédure d'ajustement des données. En laissant tous les paramètres libres dans cet ajustement, on peut donc à partir de la seule mesure de l'évolution de la probabilité d'occupation du niveau circulaire $|51c\rangle$ avoir accès aux valeurs des pulsations de Rabi des composantes σ^+ et σ^- du champ radiofréquence : $\Omega_{RF}^{\sigma^+}$ et $\Omega_{RF}^{\sigma^-}$.

La Figure E.3 présente les résultats de l'ajustement d'une des deux courbes présentées précédemment en Figure E.2 **(b)** page 304. Tous les paramètres de l'équation d'ajustement ont été laissés libres et l'ajustement ne prend pas en compte le point à $t = 0$. La courbe d'ajustement en bleu reste plate jusqu'à $t_0 = 14,4$ ns, qui correspond donc à ce retard à l'allumage de notre champ radiofréquence. Les pulsations de Rabi ajustées $\Omega_{RF}^{\sigma^+}$ et $\Omega_{RF}^{\sigma^-}$ nous donnent donc l'amplitude des deux composantes σ^+ et σ^- du champ généré par une électrode seule. Les valeurs des désaccords δ_{σ^+} et δ_{σ^-} déduits de l'ajustement sont en bon accord, à 3 % près, avec les désaccords théoriques calculés pour un champ de 5,712 V/cm.

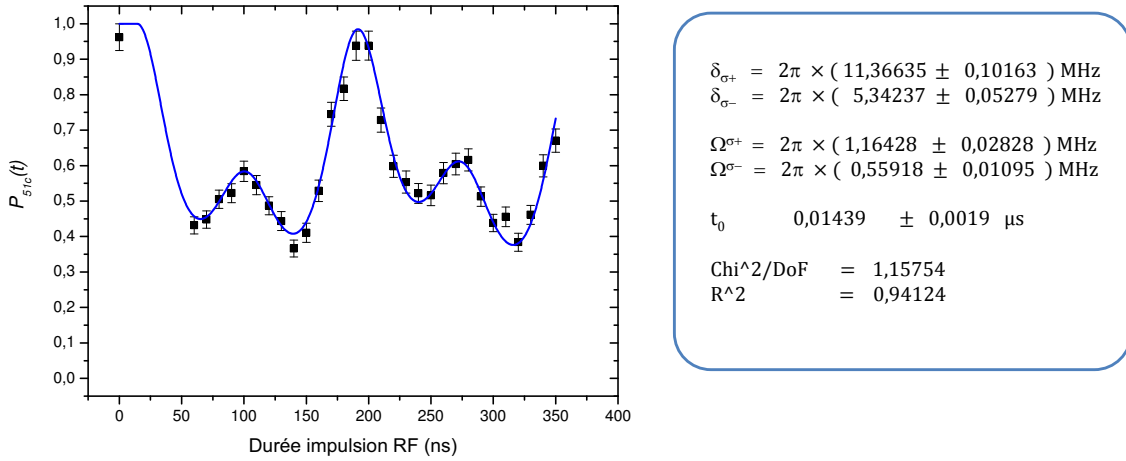


FIGURE E.3 – Couplage non résonant d'un atome initialement dans l'état $|51c\rangle$ au champ radiofréquence produit par une électrode seule à 550 MHz (électrode 4) avec $F_{st} = 5,712$ V/cm. La probabilité d'occupation de l'état $|51c\rangle$ est mesurée en fonction de la durée de l'impulsion radiofréquence (points noirs). La courbe bleue correspond au meilleur ajustement des données expérimentales par l'équation donnée page 306, où tous les paramètres sont laissés libres. L'encadré bleu contient les résultats de l'ajustement. Le point en $t = 0 < t_0$ a été exclu de l'ajustement. Les valeurs des désaccords δ_{σ^+} et δ_{σ^-} déduits de l'ajustement sont en bon accord, à 3% près, avec les désaccords théoriques calculés pour un champ de 5,712 V/cm.

La qualité de l'ajustement valide notre modélisation de l'évolution de l'état atomique à l'aide de deux moments cinétiques évoluant indépendamment. Ce modèle néglige en particulier l'effet Stark quadratique, justifié en théorie par le peuplement d'un petit nombre de niveaux proches de l'état circulaire pour lesquels $n_1, n_2 \leq 2$. Les valeurs ajustées des pulsations de Rabi des composantes σ^+ et σ^- du champ radiofréquence témoignent du fait que la polarisation produite par cette électrode n'est pas du tout linéaire. Cette électrode possède en effet une composante σ^+ deux fois plus importante que sa composante σ^- . Malgré les limites à la linéarité de la polarisation proposées précédemment dues à la géométrie des électrodes, la balance σ^+/σ^- semble tout de même fortement déséquilibré.

Nous avons donc mesuré cette balance des polarisations $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/\Omega_{RF}^{\sigma^-}$ pour une autre fréquence du champ RF. Afin que la dynamique des populations soit comparable, on ajuste le champ électrique statique de sorte que la transition $|50c\rangle \rightarrow |50e1\rangle$ soit, comme auparavant, résonante avec le champ radiofréquence. A 5,867 V/cm, cette transition vaut dorénavant 565 MHz, valeur à laquelle on règle sur le synthétiseur la fréquence du champ radiofréquence¹. On prépare alors l'atome dans le niveau $|51c\rangle$ et on mesure comme précédemment la probabilité d'occupation du niveau $|51c\rangle$ lorsque l'atome est soumis à une impulsion radiofréquence de durée t variable produite par l'une ou l'autre des deux électrodes.

1. Ce choix d'ajuster le champ électrique dans la multiplicité $n_g = 50$ puis d'effectuer le couplage non résonant de l'atome placé dans le niveau $|51c\rangle$ avec le champ radiofréquence permet de se placer exactement dans les conditions des expériences de métrologie proposées au début du chapitre IV.

La Figure E.4 présente ces résultats et témoigne de la qualité de l'ajustement dans des cas de figures radicalement différents, comme en particulier dans le cas de l'électrode 3 (courbe noire) où le couplage avec le champ radiofréquence dépeuple beaucoup plus l'état circulaire initial. De plus, on note que pour l'électrode 4 (courbe rouge), déjà étudiée précédemment, le ratio $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/\Omega_{RF}^{\sigma^-}$ est, à ce champ électrique, significativement différent : à 550 MHz, $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/\Omega_{RF}^{\sigma^-} \approx 2,08$ et à 565 MHz, $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/\Omega_{RF}^{\sigma^-} \approx 9,3$ (voir encadré bleu à la Figure E.4). Nous constatons donc que la polarisation du champ radiofréquence produit par une électrode seule dépend de la fréquence appliquée.

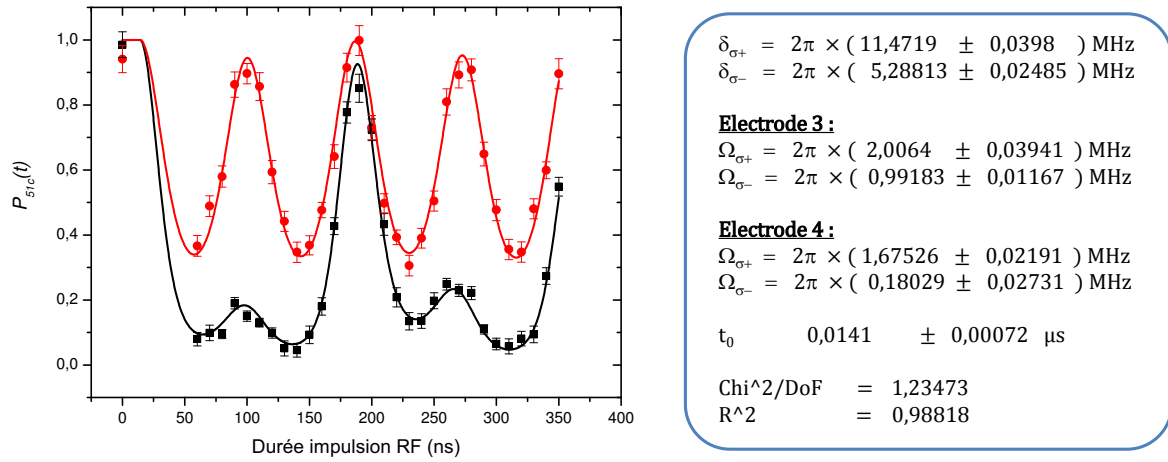


FIGURE E.4 – Couplage non résonant d'un atome initialement dans l'état $|51c\rangle$ au champ radiofréquence produit par une électrode seule à 565 MHz. La probabilité d'occupation de l'état $|51c\rangle$ est mesurée en fonction de la durée de l'impulsion radiofréquence générée par l'électrode 3 (points noirs) ou 4 (points rouges). Les courbes de couleur associées correspondent aux meilleurs ajustements des données expérimentales par l'équation donnée page 306, où tous les paramètres sont laissés libres. L'encadré bleu contient les résultats de l'ajustement. Le point en $t = 0 < t_0$ a été exclu de l'ajustement. Les paramètres δ_{σ^+} , δ_{σ^-} et t_0 sont partagés pour un ajustement multiple des données des électrodes 3 et 4.

E.3 Phénomène de résonance

Afin d'étudier plus en détail ce phénomène, on mesure alors de manière systématique les composantes de la polarisation du champ radiofréquence pour une large gamme de fréquence entre 520 MHz et 590 MHz. Comme précédemment, à chaque changement de fréquence, le champ électrique statique est réajusté afin de mettre à résonance le champ radiofréquence et la transition atomique $|50c\rangle \rightarrow |50e1\rangle$ et donc de garder des désaccords δ_{σ^+} et δ_{σ^-} comparables. Les Figure E.5 (a) et (b) présentent les valeurs mesurées des fréquences de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/2\pi$ et $\Omega_{RF}^{\sigma^-}/2\pi$ pour différentes valeurs de la fréquence du champ pour l'électrode 3 (a) et l'électrode 4 (b). Les deux électrodes semblent avoir des

comportements fort différents. La Figure E.5 (c) reproduit les valeurs du ratio $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/\Omega_{RF}^{\sigma^-}$ pour les électrodes 3 (courbe noire) et 4 (courbe rouge) pour différentes fréquences du champ RF. On observe nettement un phénomène de résonance que ce soit pour l'une ou l'autre des électrodes : le rapport $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/\Omega_{RF}^{\sigma^-}$ augmente violemment pour des fréquences proches de 560 MHz et 565 MHz. On note que la résonance est beaucoup plus intense pour l'électrode 4, où le rapport $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/\Omega_{RF}^{\sigma^-}$ mesuré vaut 9,3 à la résonance à 565 MHz. C'est donc le cas illustré précédemment Figure E.4. Finalement, à résonance, cette électrode seule produit un champ polarisé σ^+ avec une pureté de 90,3%! Dans le cas de l'électrode 3, la résonance est très large, asymétrique mais moins piquée.

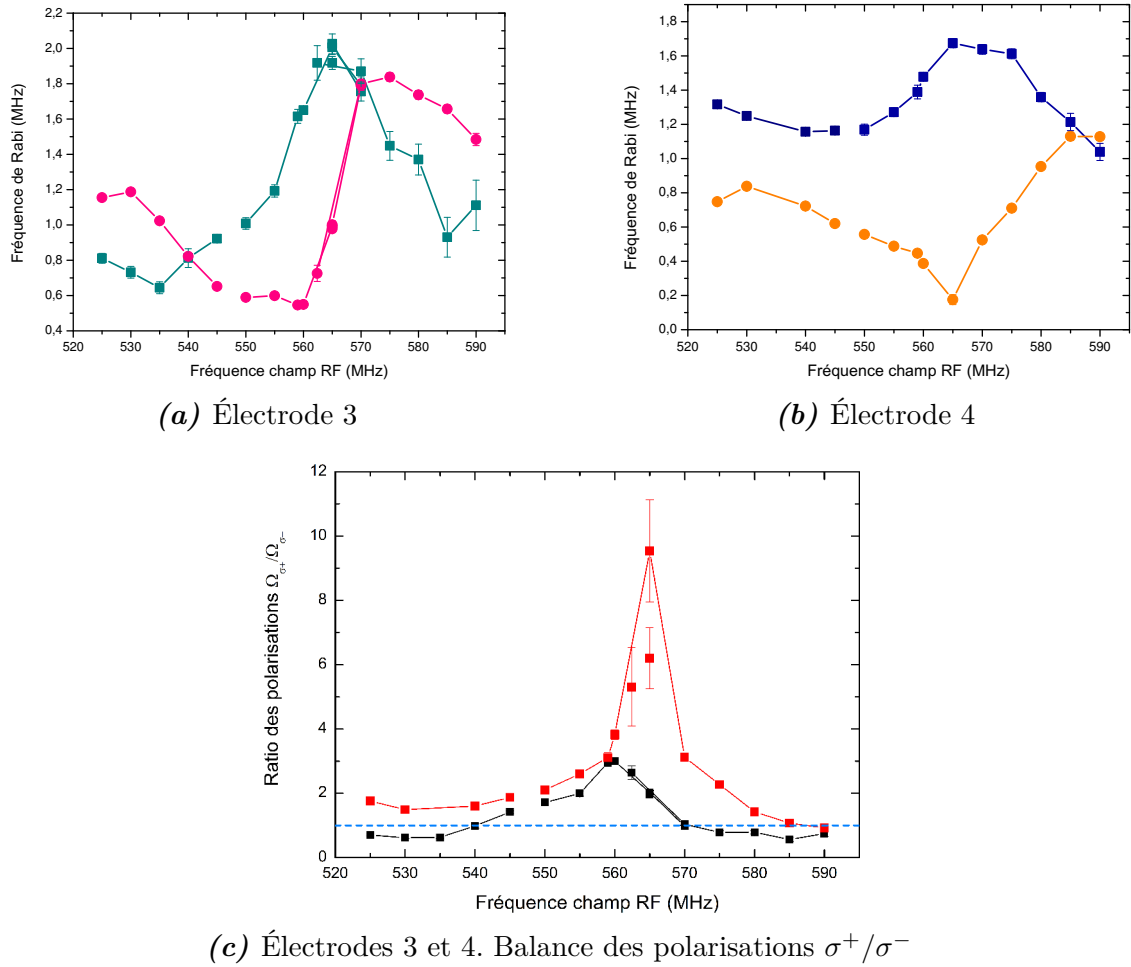


FIGURE E.5 – Composantes de la polarisation du champ radiofréquence produit par une électrode en fonction de la fréquence de ce champ. (a) Électrode 3. Mesure des fréquences de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma^+}/2\pi$ (courbe bleu gris) et $\Omega_{RF}^{\sigma^-}/2\pi$ (courbe rose) en fonction de la fréquence du champ RF. (b) Électrode 4. Idem. (c) Rapport $\Omega_{\sigma^+}/\Omega_{\sigma^-}$ pour différentes valeurs de la fréquence du champ RF pour l'électrode 3 (courbe noire) et l'électrode 4 (courbe rouge). La ligne bleue en pointillé correspond à un ratio de 1 (polarisation linéaire).

Nous supposons que l'origine de ces résonances vient de la formation d'un petit circuit RLC entre les deux électrodes reliées entre elles pour former une paire : leurs deux faces planes en vis-à-vis à 1 mm constituant un condensateur et le petit fil de cuivre connectant les deux électrodes grâce à deux cosses vissées sur l'électrode, l'inductance. Le vissage des cosses et les soudures qui peuvent être sensiblement différentes peuvent modifier les paramètres du circuit et expliquer la différence de largeur et d'amplitude des résonances des deux électrodes. La résonance la plus fine (électrode 4) est de l'ordre de la dizaine de mégahertz. La constante de temps de ce circuit électronique est typiquement du même ordre de grandeur que la durée des impulsions de champ radiofréquence que nous désirons générer. Ainsi, afin d'éviter tout effet transitoire et malgré la polarisation « naturellement » σ^+ du champ à la résonance, nous décidons de nous placer hors résonance pour les deux électrodes, soit $\nu_{RF} \geq 590$ MHz ou $\nu_{RF} \leq 535$ MHz.

A la section IV.2.3, nous développons d'autres arguments nous conduisant finalement à travailler à 530 MHz. A cette fréquence, on remarque Figure E.5 que l'électrode 3 (courbe noire) est naturellement plus polarisée σ^- ($\Omega_{\sigma^+}/\Omega_{\sigma^-} < 1$) alors que l'autre électrode, l'électrode 4 (courbe rouge), est naturellement plus polarisée σ^+ ($\Omega_{\sigma^+}/\Omega_{\sigma^-} > 1$). Par ailleurs, les valeurs des ratios sont inverses l'une de l'autre. Ceci est similaire à ce que nous avons observé en travaillant par le passé à 230 MHz, où nous n'avions pas observé de phénomène de résonance. Ce déséquilibre résiduel pourrait être dû à la géométrie des électrodes. En effet, le champ radiofréquence est appliqué sur l'une des demi-électrodes et se propage jusqu'à l'autre via un fil de cuivre qui les connecte (photographie à droite Figure E.6). Si cette propagation induit un retard, il est possible que le champ créé

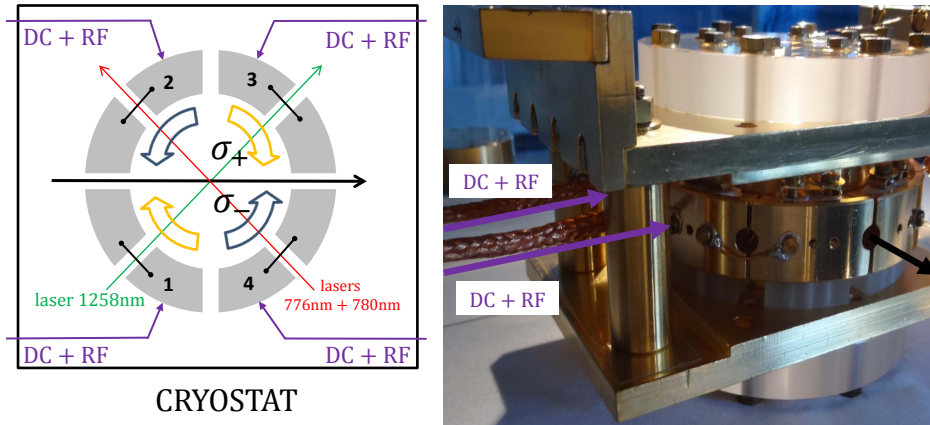


FIGURE E.6 – Injection du champ radiofréquence sur les électrodes connectées deux à deux. Sur (a), on schématise le fait que la propagation du champ dans la structure de paire d'électrodes induit un retard qui favorise une polarisation σ_{\pm} en particulier. Sur (b), on voit que l'injection du champ radiofréquence se fait de manière latérale par rapport à la structure des électrodes et l'axe de propagation des atomes. Les masses des câbles radiofréquences sont soudées aux petits pylônes dorés.

par la paire de demi-électrodes soit légèrement elliptique, favorisant une composante σ_{\pm} au détriment de l'autre. On peut voir Figure E.6 que la structure de l'électrode 3 est

symétrique par rapport à l'axe atomique de la structure de l'électrode 4, ce qui expliquerait que l'une favorise la composante σ_+ (flèche jaune) et l'autre la composante σ_- (flèche bleue). Cet effet est d'ailleurs aussi observé sur les électrodes 1 et 2 en conformité avec la symétrie de montage des demi-électrodes. Les flèches jaunes et bleues reproduisent les polarisations elliptiques des champs produits par les électrodes seules observées en pratique et sont en adéquation avec notre hypothèse.

Annexe F

Réglage de la polarisation du champ RF à 530 MHz

Le couplage d'un atome de Rydberg circulaire à un champ radiofréquence non résonant avec les transitions entre niveaux Stark voisins a été étudié en annexe E dans le cas d'une polarisation arbitraire du champ radiofréquence. Dans les cas où l'effet Stark quadratique peut être négligé, nous avons vérifié la pertinence d'une décomposition de l'état atomique en produit direct de deux moments cinétiques indépendants $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}$ évoluant sur deux échelles de niveaux distinctes associées respectivement aux transitions σ_+ et σ_- . Ces deux moments cinétiques se couplent respectivement aux composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence. Cette modélisation a permis d'obtenir l'équation décrivant l'évolution dans le temps de la probabilité d'occupation du niveau $|51c\rangle$ en fonction des pulsations de Rabi $\Omega_{RF}^{\sigma_+}$ et $\Omega_{RF}^{\sigma_-}$ des composantes σ_+ et σ_- du champ radiofréquence d'une part, et des désaccords δ_{σ_+} et δ_{σ_-} entre le niveau circulaire et les deux niveaux elliptiques $m = 49$ voisins :

$$P_{|51c\rangle}(t) = \cos^{4j'} \left[\frac{1}{2} \arccos \left[\cos^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma_+}}{\delta_{\sigma_+}} \right) \right) + \sin^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma_+}}{\delta_{\sigma_+}} \right) \right) \cos \left(\sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma_+})^2 + \delta_{\sigma_+}^2} (t - t_0) \right) \right] \right] \\ \times \cos^{2(n-1)} \left[\frac{1}{2} \arccos \left[\cos^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma_-}}{\delta_{\sigma_-}} \right) \right) + \sin^2 \left(\arctan \left(\frac{\Omega_{RF}^{\sigma_-}}{\delta_{\sigma_-}} \right) \right) \cos \left(\sqrt{(\Omega_{RF}^{\sigma_-})^2 + \delta_{\sigma_-}^2} (t - t_0) \right) \right] \right].$$

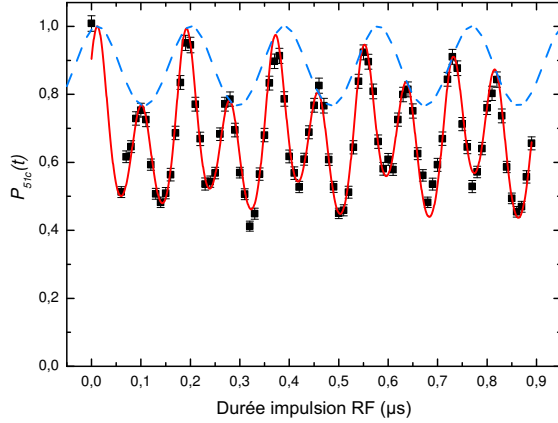
Cette équation s'interprète facilement : la précession du moment cinétique évoluant sur l'échelle la moins désaccordée de la fréquence du champ RF vient moduler les oscillations plus rapides dues à la précession de l'autre moment cinétique. Le niveau circulaire n'est alors peuplé que lorsque les deux moments cinétiques précessant autour de vecteurs rotations différents se retrouvent simultanément au pôle Nord de la sphère de Bloch généralisée.

Cette dynamique de la population du niveau circulaire $|51c\rangle$ par couplage de l'atome à un champ radiofréquence généré par une électrode unique nous a renseigné sur le comportement intrinsèque d'une électrode. Le champ généré par deux électrodes peut de même être étudié de la sorte. La description du montage électronique Figure II.14 page 112 montre que les électrodes 3 et 4 sont connectées via un certain nombre d'éléments électroniques intermédiaires respectivement aux voies 1 et 3 d'une part, et aux voies 2 et 4 d'autre part d'un synthétiseur quatre voies délivrant un signal radiofréquence à 530 MHz¹. Chacune des voies du synthétiseur est réglable en amplitude et en phase de manière indépendante. Ainsi, un réglage fin des amplitudes et phases du potentiel radiofréquence envoyé sur ces deux électrodes doit permettre d'annuler la composante σ_- du champ global et donc de générer un champ radiofréquence polarisé σ_+ . Le réglage consiste donc à régler sur un signal atomique l'amplitude et les phases de voies 1 et 2, puis des voies 3 et 4, permettant ainsi de disposer de deux champs radiofréquences σ_+ de phase relative variable. Le signal généré par deux voies différentes peut aussi être modulé en puissance grâce à des mélangeurs placés en série sur chaque voie. Ceci permet de contrôler l'amplitude du champ généré par deux électrodes.

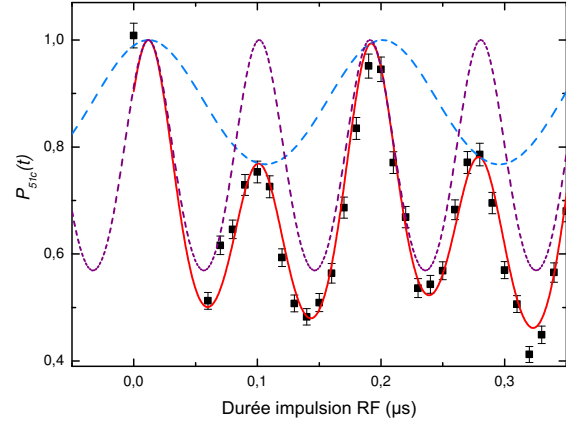
On présente Figure F.1 (a) l'évolution de la probabilité d'occupation du niveau $|51c\rangle$ lorsque les électrodes 3 et 4 génèrent une impulsion radiofréquence de durée variable t , couplée à un atome initialement dans l'état $|51c\rangle$. La valeur exacte du champ électrique n'est pas décisive pour cette méthode d'optimisation de la polarisation des électrodes, ce qui la rend particulièrement facile à mettre en œuvre; comme développé à l'annexe E, il suffit que les deux transitions $|51c\rangle \rightarrow |51e1\rangle$ et $|51c\rangle \rightarrow |51e1'\rangle$ soient désaccordées de quelques MHz par rapport au champ RF. Les voies 1 et 2 du synthétiseur sont de même puissance ($P_1 = P_2 = 5$ dBm) et de phase relative quelconque. Les mélangeurs servant de modulateurs de puissance sont alimentés en continu par 3 V. La dynamique observée est dorénavant sans surprise et l'ajustement par l'équation de la page 313 est encore une fois de bonne tenue. La durée de l'impulsion radiofréquence est balayée pour des temps plus longs que précédemment ce qui permet d'observer une diminution de la valeur des maxima pairs (le point à $t = 0$ étant compté comme le maximum « zéro »), et une augmentation des valeurs des maxima impairs dues à l'inexacte commensurabilité des désaccords $\delta_{\sigma+}$ et $\delta_{\sigma-}$. En supplément, on représente en pointillé bleu la probabilité d'occupation $P_{\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}}(t) = |\langle 51c | \hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}(t) \rangle|^2$ associée à la seule précession du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}$ avec les paramètres $(\Omega_{RF}^{\sigma-}, \delta_{\sigma-})$ issus du meilleur ajustement de $P_{|51c\rangle}(t) = P_{\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}}(t) \times P_{\hat{\mathbf{J}}_2^{(51)}}(t)$.

Sur la Figure F.1 (b) qui est un zoom de la Figure F.1 (a) à laquelle on a ajouté en pointillé violet la probabilité $P_{\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}}(t) = |\langle 51c | \hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}(t) \rangle|^2$, on comprend que la valeur du premier maximum à $t_1 = 85$ ns diffère de l'unité à cause de la composante σ_- du champ radiofréquence, qui occasionne la modulation des oscillations violettes. Ainsi, on

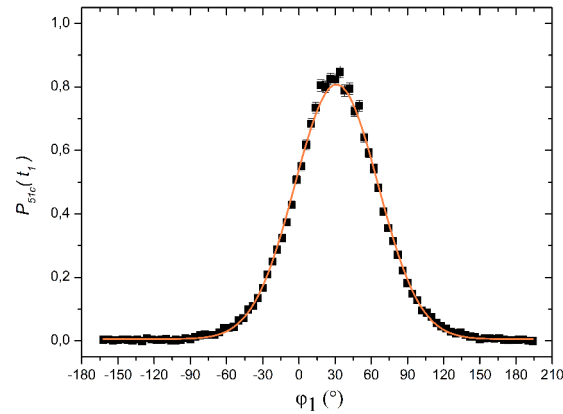
1. Le fait de connecter deux voies du synthétiseur sur une même électrode permet de disposer deux champs radiofréquences de phase relative ajustable.



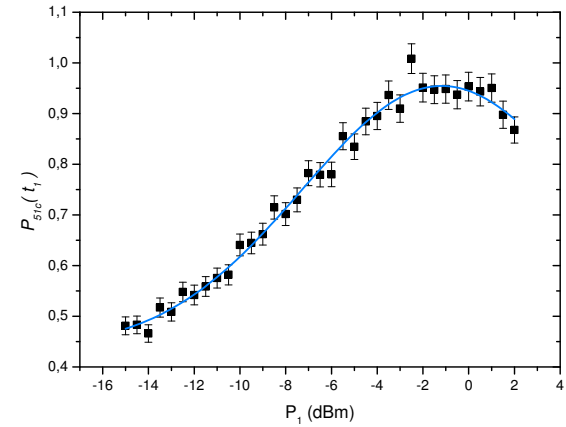
(a) Électrodes 3 + 4 : Réglage non optimisé



(b) Électrodes 3 + 4 : zoom



(c) Électrodes 3 + 4 : Réglage non optimisé



(d) Électrodes 3 + 4 : zoom

FIGURE F.1 – Optimisation de la polarisation de la paire d'électrodes 3-4. **(a)** Atome initialement dans le niveau $|51c\rangle$ couplé à un champ radiofréquence à 530 MHz produit par la paire d'électrodes 3-4 contrôlée par les voies 1 et 2 du synthétiseur réglées à même puissance ($P_1 = P_2 = 5$ dBm) et de phase relative quelconque. Les mélangeurs servant de modulateurs de puissance sont alimentés en continu par 3 V. La courbe rouge correspond au meilleur ajustement des données (points noirs) par l'équation donnée page 313. La courbe bleu en pointillé correspond à la probabilité d'occupation $P_{J_2^{(51)}}(t) = |\langle 51c | J_2^{(51)}(t) \rangle|^2$ associée à la précession du moment cinétique couplé à la composante σ_- du champ radiofréquence. **(b)** Zoom sur les premiers instants de la sous-figure (a) à laquelle on a ajouté en pointillé violet la probabilité $P_{J_1^{(51)}}(t)$. **(c)** Optimisation de la phase relative : on fixe la durée de l'impulsion radiofréquence au niveau du premier maximum et on balaye la phase de la voie 1 connectée à l'électrode 3 avec $\varphi_2 = 0^\circ$ fixé. Ajustement gaussien centré à $31,1^\circ$. **(d)** Optimisation de la puissance relative : on balaye cette fois-ci la puissance P_1 de l'électrode 1 avec $P_2 = 5$ dBm fixé et les autres paramètres actualisés aux valeurs optimales. $P_{|51c\rangle}(t_1)$ est maximale pour $P_1 = -1,18$ dBm.

peut fixer la durée de l'impulsion radiofréquence à $t_1 = 85 \text{ ns}$ et explorer l'espace des paramètres puissance/phase d'une électrode avec comme critère d'augmenter la valeur de ce maximum afin de diminuer la composante σ^- du champ radiofréquence. Les réglages se font avec une précision au dixième de degré pour les phases et au dixième de dBm pour les puissances. On constate que, pour des raisons électroniques (synthétiseur ou amplificateurs), la variation de la phase peut faire varier de manière infime la puissance et vice versa. Ainsi l'optimisation de la polarisation d'une paire d'électrodes se déroule selon un processus itératif convergent consistant à maximiser la hauteur du maximum à $t = t_1$ en balayant la phase et l'amplitude d'une électrode par itérations successives.

La diminution de la composante σ^- s'accompagne d'une augmentation de la composante σ^+ . Cependant, comme $\Omega_{\text{RF}}^{\sigma^+}/2\pi = 1,18 \text{ MHz} \ll \delta_{\sigma^-}/2\pi = 11,09 \text{ MHz}$, l'instant t_1 ne dépend pas au premier ordre de la valeur de $\Omega_{\text{RF}}^{\sigma^+}$ tant que cette pulsation de Rabi reste très petite par rapport au désaccord δ_{σ^-} et l'optimisation peut s'effectuer à $t = t_1$ fixé. Les Figures F.1 (c) et (d) montrent les deux premières itérations de l'optimisation. La phase de l'électrode 3 est tout d'abord balayée via la phase φ_1 de la voie 1 du synthétiseur sur 360° , φ_2 étant fixe à 0° . On constate bien qu'il n'existe qu'un seul réglage de phase maximisant $P_{|51c\rangle}(t_1)$: $\varphi_1^c = 31,1^\circ$. On balaye ensuite la puissance P_1 de l'électrode 1 avec $P_2 = 5 \text{ dBm}$ fixé et les autres paramètres actualisés aux valeurs optimales ($\varphi_1^c = 31,1^\circ$ et $\varphi_2 = 0^\circ$). $P_{|51c\rangle}(t_1)$ est maximale pour $P_1 = -1,18 \text{ dBm}$. On réitère ce processus en constatant à chaque étape que la valeur du maximum augmente et que les phases et puissances optimales convergent.

Cette procédure de réglage est reproduite pour les voies 3 et 4 du synthétiseur afin de disposer de deux champs radiofréquences polarisés σ^+ dont la phase relative est ajustable. La Figure F.2 présente une courbe d'évolution de la probabilité d'occupation du niveau $|51c\rangle$ pour un réglage proche de l'optimum. L'ajustement par l'équation donnée page 313 est périlleux avec tous les paramètres libres, car la composante σ^- est tellement faible qu'il est difficile de discerner sa contribution sur le signal. Cependant, connaissant par des ajustements antérieurs les valeurs des désaccords δ_{σ^+} et δ_{σ^-} pour notre champ de travail, nous n'ajustons que les valeurs des pulsations de Rabi Ω_{σ^+} et Ω_{σ^-} (ainsi qu'un terme correspondant au délai d'allumage du champ radiofréquence). La pureté de la polarisation $\Omega_{\sigma^+}/(\Omega_{\sigma^+} + \Omega_{\sigma^-})$ à cette étape du processus, évaluée grâce au paramètre d'ajustement, est de 88,82 %. Pour continuer à augmenter la pureté du champ radiofréquence, on peut modifier légèrement le champ électrique afin que la transition σ_- soit moins hors-résonance. Cette modification du désaccord δ_{σ^-} permet, au prix d'un réajustement de l'instant $t'_1 = 1/\delta_{\sigma^-}$, d'optimiser finement le réglage de la polarisation du champ RF en gagnant en contraste sur le signal $P_{|51c\rangle}(t_1)$. Au terme de la procédure d'optimisation, la pureté approche les 95%.

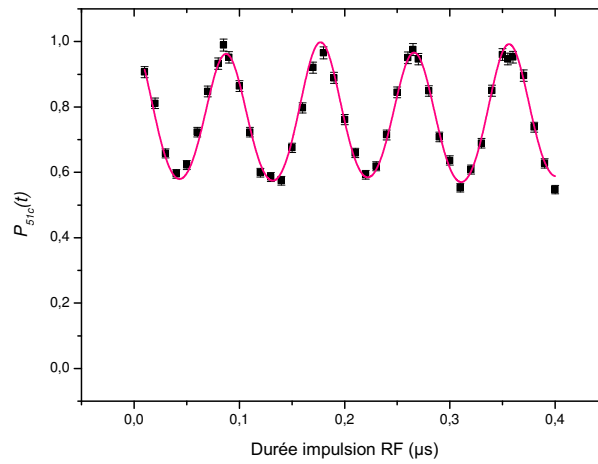


FIGURE F.2 – Réglage en cours de la polarisation des électrodes 3-4. L'atome initialement dans le niveau $|51c\rangle$ est couplé à un champ radiofréquence à 530 MHz produit par la paire d'électrodes 3-4 avec sur le synthétiseur $P_1 = -1,18$ dBm et $\varphi_1 = 26,4^\circ$; $P_2 = 5$ dBm et $\varphi_2 = 0^\circ$ ainsi que $3 V_{DC}$ sur les mélangeurs (réglage non optimal).

Remarque : Nous disposons de deux méthodes afin de balayer la durée de l'impulsion radiofréquence : grâce à l'entrée modulation du synthétiseur (*pulse modulation*) ou grâce aux mélangeurs qui servent alors de *gate*. Dans le premier cas, l'ordinateur de contrôle envoie la forme d'une impulsion de durée variable directement au synthétiseur. Dans ce cas, les mélangeurs reçoivent une tension constante et le balayage de la durée est informatisé, mais, comme déjà précisé, la durée minimale (non nulle) est de 60 ns. Dans l'autre cas, le synthétiseur est toujours allumé mais ce sont les mélangeurs qui vont « découper » la forme de l'impulsion en recevant une tension en créneau entre 0V et la valeur DC évoquée dans la première méthode. Le balayage est alors manuel et la prise de données plus pénible car elle se fait point par point (nous ne disposons pas d'Agilent dont la durée des impulsions est balayable informatiquement.). Cette méthode a l'avantage de pouvoir prendre des valeurs pour de très courtes durées de l'impulsion. Nous avons par ailleurs constaté sur l'oscilloscope que la forme des impulsions est beaucoup plus belle (bords plus francs, plateau plus plat, etc.), lorsqu'elle est « sculptée » par les trois mélangeurs en série (ils ont d'ailleurs été mis en place à ce dessein). Au-delà des considérations esthétiques, la polarisation du champ radiofréquence s'en ressent, car en particulier dans la période transitoire d'allumage, l'amplitude du champ produit n'est pas linéaire avec la tension de modulation de puissance. Ainsi, tous les réglages finaux se font avec des impulsions « découpées » par les trois mélangeurs en série. La courbe F.2 en particulier est réalisée avec cette méthode de génération d'impulsion.

Annexe G

Calibration du générateur de fonctions arbitraires

Pour réaliser une séquence de champ électrique, nous devons coder sur la capacité mémoire (16 bits) du générateur de fonctions arbitraires Agilent les potentiels désirés en fonction du temps. Théoriquement, le plus petit incrément de champ électrique que peut générer notre électronique correspond donc à l'amplitude crête à crête du signal d'entrée $V_{\max} - V_{\min}$ divisé par le plus grand nombre codé par 15 bits, soit 2^{15} (le dernier bit constituant un « bit de signe »). Cet incrément minimal sera noté δV .

Comme expliqué dans la section V.1, les séquences aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ sont toujours jouées par paire, l'une à la suite de l'autre. Ne pouvant pas changer de fonction arbitraire à chaque répétition, il nous faut donc coder sur l'Agilent les séquences associées à ces deux champs bout à bout, comme représenté sur la Figure G.1. Il convient cependant d'attendre que les atomes aient bien été ionisés avant de débiter la seconde séquence. C'est pourquoi les blocs élémentaires séquentiels durent toujours 311 μs . Ainsi, la durée des deux séquences mises bout à bout associées aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ est de 622 μs . Outre les séquences laser, radiofréquence et micro-onde qui ont déjà été présentées dans le corps du manuscrit et qui sont ici reproduites deux fois de suite à l'identique, cette Figure représente la séquence des potentiels codée sur l'Agilent (seconde ligne). Comme expliqué au tableau V.2 page 233, entre $t = 0$ et $t = 311 \mu\text{s}$ est jouée la séquence associée au champ $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (courbe orange) puis entre $t = 311 \mu\text{s}$ et $t = 622 \mu\text{s}$ la séquence associée au champ $F_{st} + \delta F_{st}/2$ (courbe jaune).

Nous avons donc répété la méthode d'interférométrie Ramsey précédemment décrite dans la partie V.1.2.b, avec deux impulsions micro-ondes les plus rapprochées possibles ($t_1 = 8,22 \mu\text{s}$ et $t_2 = 8,98 \mu\text{s}$), pour différents incréments de potentiel $k \times \delta V$, $k = 0, \dots, 14$

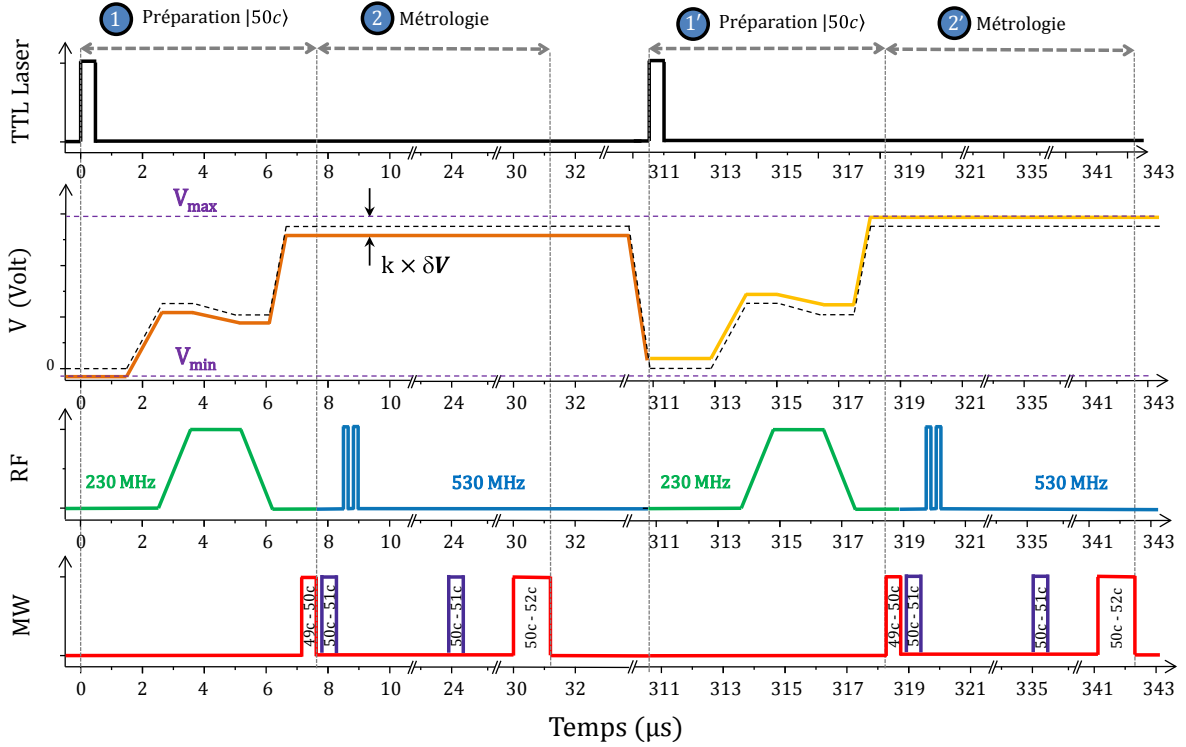


FIGURE G.1 – Séquence Agilent. Sont représentées, de haut en bas, les séquences des lasers, des potentiels sur le générateur de fonction Agilent, des champs radiofréquences et des champs micro-ondes. Une séquence codée sur Agilent durent au total 622 μs . L'Agilent ne pouvant pas alterner rapidement les séquences associées aux champ $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, il est donc nécessaire de les coder dans le générateur de fonctions arbitraires l'une à la suite de l'autre. La courbe orange correspond donc au champ électrique $F_{st} - \delta F_{st}/2$, et la courbe jaune qui suit au champ $F_{st} + \delta F_{st}/2$. La courbe noire en pointillé correspond au champ de référence F_{st} . Les lignes horizontales en pointillé violet permettent de visualiser les valeurs maximale V_{max} et minimale V_{min} de la séquence. Les autres séquences élémentaires (laser, radiofréquence et micro-onde) durant, comme nous l'avons expliqué au tableau V.2, 311 μs , elles sont déclenchées deux fois, lors d'une séquence de champ électrique généré par l'Agilent.

entre les deux séquences codées sur le générateur de fonction arbitraire Agilent. Nous avons donc mesuré le déphasage des franges Ramsey en fonction de l'écart de potentiel $k \times \delta V$ entre les deux séquences comparées.

Pour cela la seconde séquence (courbe jaune) demeurera inchangée et nous allons descendre globalement, pas à pas, la première séquence (courbe orange). Cependant, en faisant cela, l'amplitude totale $V_{max} - V_{min}$ va changer et ainsi donc modifier la valeur de l'incrément δV . C'est pourquoi, afin de ne pas changer cette amplitude totale, la valeur V_{min} (pointillé horizontal violet) qui prévaut à la toute fin d'une séquence (non représentée Figure G.1) et entre $t = 0$ et $t = 1,5 \mu\text{s}$ restera inchangée quelle que soit l'offset $k \times \delta V$ de cette première séquence. Par ailleurs, le reste de la première séquence étant décalée négativement en potentiel, V_{max} est inchangé. Les premiers résultats de mesure sont présentés Figure G.2 (points noirs). Quatre points ont été de nouveau mesurés le jour suivant afin d'illustrer la reproductibilité de la mesure (points bleus).

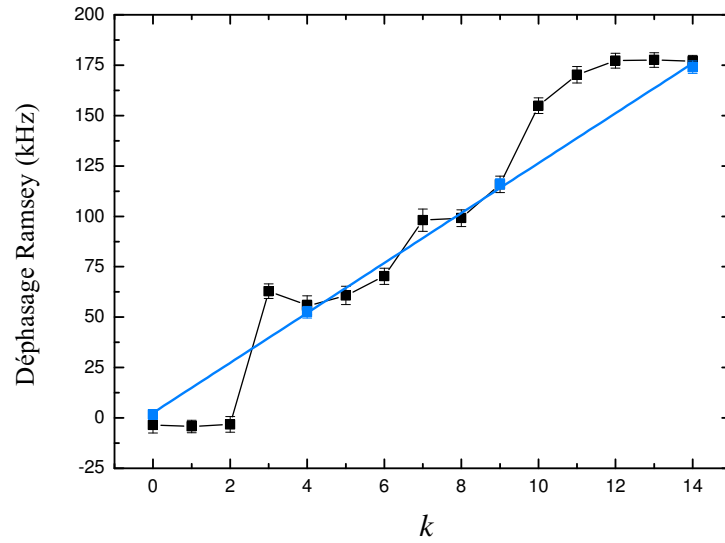


FIGURE G.2 – Calibration du générateur de fonction arbitraire Agilent. Le déphasage des franges Ramsey sur la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$ est mesuré en fonction de l'écart de potentiel $k \times \delta V$ entre les deux séquences comparées. Les points noirs et bleus sont des mesures répétées à une journée d'intervalle. Les lignes noires entre les points de mesures sont là pour guider les yeux. La ligne droite bleue correspond à un ajustement linéaire des quatre points tels que $\Delta \text{ bits} = 0, 4, 9$ et 14 .

On remarque sur les données représentées par des points noirs que le générateur de fonction arbitraire ne fournit pas un signal de sortie linéaire avec l'incrément $k \times \delta V$, $k = 0, \dots, 14$. En effet, pour $k = 0, 1$ ou 2 , aucun déphasage n'est mesuré. Passé ce seuil, la déphasage augmente brutalement à 63 kHz . Le comportement observé pour des écarts de plus en plus grands est difficile à interpréter. Néanmoins, les mesures sont reproductibles aux barres d'erreurs près comme le prouvent les points bleus réalisés le jour suivant. La ligne droite bleue correspond à un ajustement linéaire des quatre points tels que $k = 0, 4, 9$ et 14 . Il est donc possible de générer des séquences écartées en champ électrique¹ de δF_{st} , $2 \times \delta F_{st}$ et $3 \times \delta F_{st}$. L'écart le plus petit que parvient à générer notre générateur de fonction arbitraire est donc en termes de fréquence de $\delta \nu[|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 54, 61 \pm 1, 9 \text{ kHz}$, ce qui est en accord avec la mesure effectuée à la section V.1.2.b où nous avons mesuré $\delta \nu[|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle] = 55, 25 \pm 1, 03 \text{ kHz}$ (pour des impulsions Ramsey légèrement plus écartées mais centrées pareillement, à 140 ns près).

1. En écrivant cela, nous négligeons cependant la variation de l'effet Stark quadratique différentiel entre les niveaux circulaires $|49c\rangle$ et $|50c\rangle$, ce qui se justifie dans une bonne approximation.

Annexe H

Phase relative absolue des impulsions RF

Lors du réglage de la polarisation du champ radiofréquence généré par deux électrodes, les phases absolues des voies du synthétiseur ne sont pas connues. Autrement dit, aucun zéro de phase commun n'a été préréglé entre les quatre voies du synthétiseur. L'optimisation de la polarisation du champ RF se fait en réglant l'amplitude et la phase des différentes voies directement sur un signal atomique. Le réglage consiste simplement à régler la phase (et l'amplitude) relative des voies 1 et 3 d'une part et des voies 2 et 4 d'autre part. De la sorte, nous disposons de deux champs radiofréquences σ_+ de phase relative variable. Cependant, afin de pouvoir comparer les données expérimentales de métrologie avec des simulations, il convient de connaître le zéro de phase, *ie* la phase relative absolue, entre ces deux impulsions radiofréquences engendrant les rotations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 de la séquence de métrologie \mathcal{S} . Ce zéro de phase est stable tant que le synthétiseur reste allumé; c'est pourquoi il est branché sur onduleur afin qu'il ne s'éteigne jamais.

Cette mesure de la phase relative absolue ne peut pas s'effectuer directement sur un oscilloscope en raison des phases supplémentaires inconnues dues à la propagation dans les câbles, ainsi que les capacités de couplage entre les électrodes au cœur du montage. Cette mesure doit donc s'effectuer directement sur un signal atomique. Ainsi, nous fixons la phase de la première impulsion radiofréquence et mesurons la probabilité que l'atome reste dans l'état initial $|50c\rangle$ lorsque les deux impulsions sont appliquées simultanément pendant une même durée en fonction de la phase de la seconde impulsion. La Figure H.1 représente cette probabilité en fonction de la phase $\varphi_{3\&4}$ de la seconde impulsion générée par les voies 3 et 4 pour deux durées $\tau_2 = 184$ ns et $\tau_3 = 276$ ns, les phases des voies 1 et 2 restant fixes. Cette phase $\varphi_{3\&4}$ correspond à la phase générée par le synthétiseur sur la voie 3. Afin que la polarisation du champ radiofréquence demeure σ_+ , la phase relative entre

les voies 3 et 4 doit rester constante. Pour cette courbe, on fait ainsi varier simultanément les phases des voies 3 et 4 du synthétiseur afin de maintenir une phase relative constante. Ceci justifie les indices 3 et 4 dans notre notation.

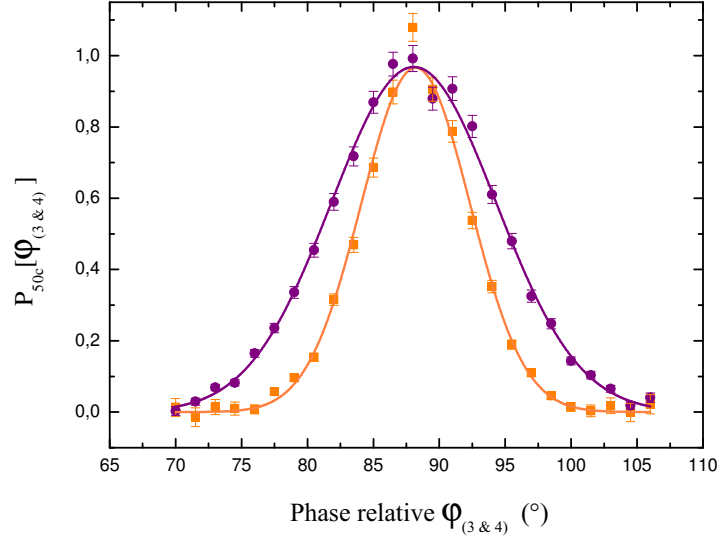


FIGURE H.1 – Calibration de la phase relative entre les deux impulsions radiofréquences. Pour une phase de la première impulsion radiofréquence fixée (voies 1 et 2), nous mesurons la probabilité que l'atome reste dans l'état initial $|50c\rangle$ lorsque les deux impulsions sont appliquées simultanément pendant une même durée $\tau_2 = 184\text{ ns}$ (courbe violette) et $\tau_3 = 276\text{ ns}$ (courbe orange) en fonction de la phase de la seconde impulsion. L'interférence destructive a lieu pour une phase de $\varphi_3 = 88,1 \pm 0,1^\circ$.

Pour les deux durées τ_2 et τ_3 , l'interférence destructive des champs générés par les voies 1 et 2 d'une part et par les voies 3 et 4 d'autre part a lieu pour une phase de $\varphi_3 = 88,1 \pm 0,1^\circ$ (en abscisse Figure H.1). Ceci permet donc de définir la phase relative absolue $\phi_{\text{RF}}^{(0)}$ des deux impulsions radiofréquences des séquences de métrologie. Ainsi, toutes les données du chapitre V impliquant la phase de la seconde impulsion $\pi + \phi_{\text{RF}}$ prendront en compte cette phase relative absolue.

Annexe I

Trajectoires des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$

Lors de l'analyse du signal d'interférence obtenu en mesurant la probabilité $P(\phi_{\text{RF}})$ en fonction de la phase de la seconde impulsion radiofréquence ϕ_{RF} (voir section V.3.2), nous avons vu que la compression dynamique de l'état du moment cinétique durant la phase d'attente conduisait à une variation quadratique de la phase quantique χ avec ϕ_{RF} (Figure V.12 (b) page 251). Nous avons alors proposé une explication consistant à dire que les composantes du moment cinétique ayant exploré les régions les plus au sud de la sphère de Bloch présentaient une sensibilité accrue.

Les simulations que nous présentons dans cette annexe montre qu'en effet ce sont ces composantes « méridionales » qui possèdent un recouvrement non nul avec l'état initial $|j, +j\rangle$ à l'issue de la seconde impulsion radiofréquence pour les petits angles ϕ_{RF} , ceux pour lesquels les franges d'interférence oscillent plus rapidement. La Figure I.1 représente les trajectoires des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ lors de la séquence de métrologie pour une impulsion radiofréquence de durée $\tau_2 = 183,9 \text{ ns}$. Les pointillés vert et rouge représentent les chemin suivis par ces deux moments cinétiques aux champs électriques de $F_{st} \mp \delta F_{st}/2$ respectivement sur les deux sphères de Bloch généralisées \mathcal{B}_{50} et \mathcal{B}_{51} . Outre ces trajectoires, on représente la fonction Q de ces deux moments cinétiques pour le champ électrique $F_{st} - \delta F_{st}/2$ à cinq instants particuliers lors de la seconde impulsion radiofréquence. En (a) et (a'), on représente sous deux angles de vue différents l'état de la superposition de moment cinétique à l'issue de la phase d'attente, juste avant la seconde impulsion radiofréquence. Les sous-figures (b), (c), (d) et (e) représentent successivement l'état des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ pour le quart, la moitié, les trois quarts et la durée entière de l'impulsion radiofréquence de durée τ_2 . Cette durée τ_2 correspondant exactement à la durée de deux précessions entières du moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$, on observe effectivement qu'il repasse au pôle Nord sur les sous-figures (c) et (e). Sur toutes ces Figures, le méridien identifié en bleu turquoise correspond au méridien $\Phi = -90^\circ$.

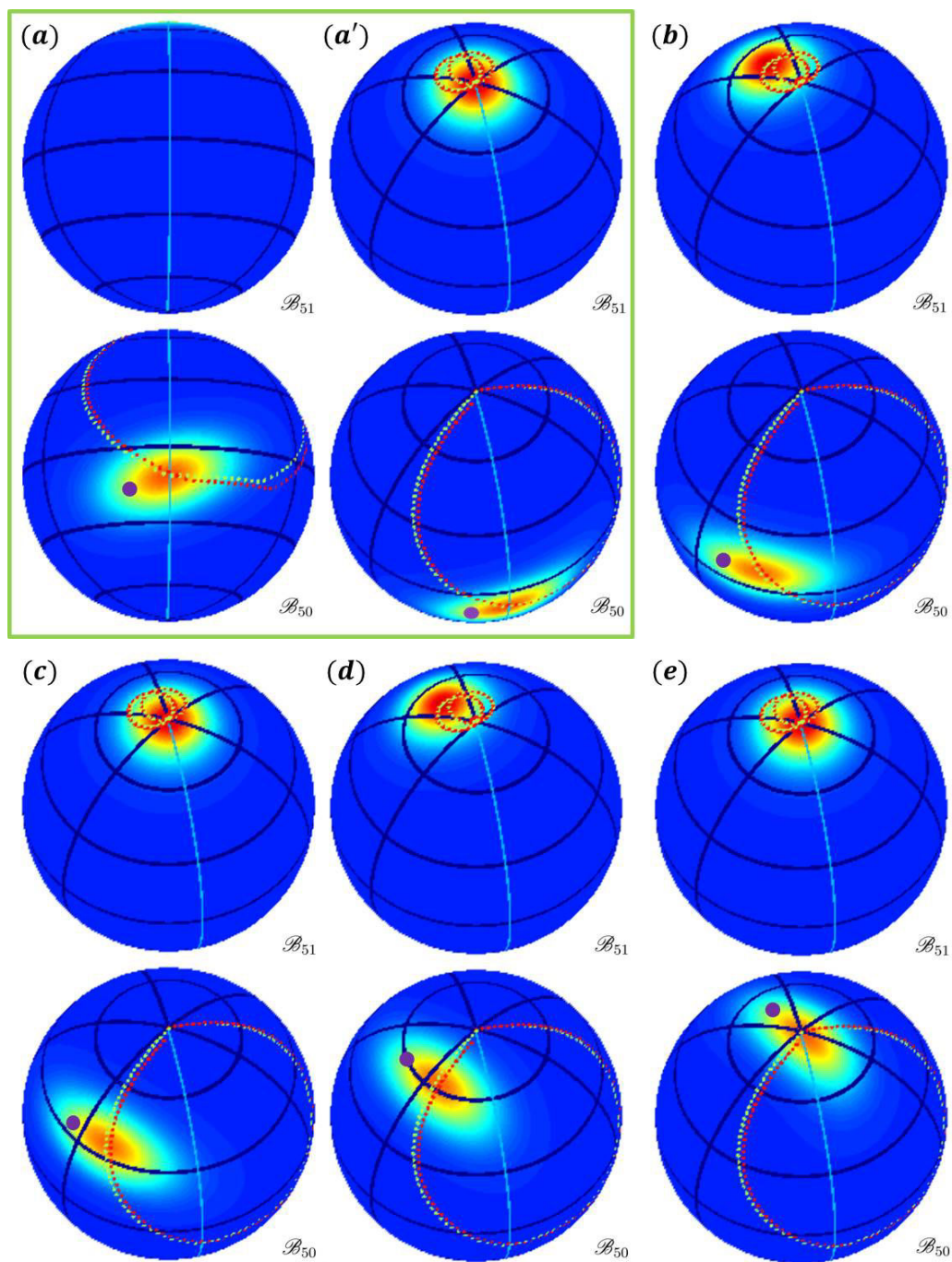


FIGURE I.1 – Trajectoires des moments cinétiques $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ et $\hat{\mathbf{J}}_1^{(51)}$ lors de la seconde impulsion radiofréquence. On représente la fonction Q de ces deux moments cinétiques pour le champ électrique $F_{st} - \delta F_{st}/2$ à cinq instants différents. Les pointillés vert et rouge représentent les chemins suivis par ces deux moments cinétiques aux champs électriques de $F_{st} \mp \delta F_{st}/2$ respectivement sur les deux sphères de Bloch généralisées \mathcal{B}_{50} et \mathcal{B}_{51} . Le point violet est positionné sur la partie de la fonction Q la plus au sud de $\hat{\mathbf{J}}_1^{(50)}$ lors de la phase d'attente, ce qui permet de suivre précisément l'orientation de la fonction Q lors de la remontée du moment cinétique vers le pôle Nord de la sphère de Bloch généralisée.

Annexe J

Inhomogénéités et dérive du champ électrique

Les résultats présentés dans le chapitre V sont le fruit de nombreuses optimisations visant à réduire les bruits électroniques et les inhomogénéités de champ électrique. L'ensemble des mesures prises afin de limiter la décohérence induite par cet environnement électrique imparfait constitue l'objet de cette annexe. Il est important de préciser que c'est justement la sensibilité de notre méthode de métrologie qui nous a permis de déceler et de traiter certaines sources de décohérence. La compensation des inhomogénéités de champ électrique par exemple a été effectuée avec une grande précision directement sur un signal métrologique, et plus précisément sur un signal similaire à ceux présentés à la Figure V.16 page 256. De même, pour le bruit électrique haute fréquence et l'identification d'effets de charge subtils des électrodes « miroirs », qui ont pu être étudiés aisément grâce à l'extrême sensibilité de notre méthode d'électrométrie.

J.1 Compensation des inhomogénéités de champ électrique

Nous avons présenté au chapitre II la possibilité d'annuler les champs électriques parasites au sein de la structure par l'application de potentiels sur les six électrodes du montage. Cette annulation des champs parasites fait que l'axe de quantification est effectivement vertical lorsque des potentiels supplémentaires sont appliqués sur les électrodes « miroirs ». Néanmoins, plus qu'un éventuel *offset* sur le champ électrique statique et une légère inclinaison de l'axe de quantification, ce sont des inhomogénéités de champ élec-

trique que l'on doit redouter lorsqu'il s'agit de réaliser des superpositions d'états ayant un long temps de cohérence. Or nous avons tout à craindre à ce sujet, car quelle que soit l'origine exacte de la dérive constatée en II.1.4.c de la valeur absolue du champ électrique au sein de la structure (dégazage, déplacement de charges électrostatiques, etc.), ces sources parasites n'ont aucune raison de créer un champ homogène dans l'espace. L'hypothèse la plus probable d'un dépôt de particules dégazées par les parties chaudes de l'enceinte interne du cryostat pénétrant la structure par les trous des lasers, aurait effectivement pour conséquence de générer des inhomogénéités de champ électrique au voisinage du centre de la cavité.

Nous pouvons cependant tenter de compenser localement ces gradients de champ électrique afin de diminuer leur effet délétère sur le temps de cohérence d'une superposition atomique. Pour cela, une première compensation a été trouvée *in situ* en tentant d'optimiser le contraste des franges d'interférométrie Ramsey sur une transition sensible à l'effet Stark linéaire, comme la transition micro-onde $|50c\rangle \rightarrow |51, k=1\rangle$, par ajustement des potentiels sur les électrodes dites radiofréquences. Finalement, le réglage fin des compensations de gradients s'effectue directement sur les franges d'interférence métrologiques permettant ainsi de compenser les inhomogénéités de champ à l'endroit même où les atomes sont dans des états du type *Chat de Schrödinger*. Au terme de cette procédure, le temps de cohérence des superpositions d'états préparées a été multiplié par près de 1,6!

Juste avant la prise des données de métrologie quantique présentées au chapitre V, les potentiels appliqués sur les électrodes 1 et 3 se faisant face et alignées avec les lasers L_1 et L_2 étaient respectivement de +1,232 V et +319,7 mV. Les potentiels appliqués dans l'axe du laser L_3 étaient de +100 mV sur l'électrode 2 et -100 mV sur l'électrode 4. Sur les électrodes « miroirs », on applique symétriquement $\pm 7,542$ V pour générer le champ $F_{st} = 5,505\,079$ V/cm. Une simulation sur le logiciel SIMION indique qu'à l'endroit correspondant à la phase d'attente de durée t_0 , ces potentiels sont à l'origine d'un gradient de norme $0,956$ mV/mm². Ces gradients sont loin d'être négligeables et l'on comprend qu'il convient de les annuler afin de limiter leurs effets sur le temps de cohérence des superpositions d'états préparées. En l'absence de compensation, on évalue le temps de cohérence de la superposition d'états préparée par une impulsion radiofréquence de durée $\tau_2 = 183,9$ ns à une quarantaine de nanosecondes seulement! La Figure J.1 représente les courbes isopotentielles lorsque les potentiels de compensation des inhomogénéités sont appliqués sur les électrodes. Cette Figure constitue donc le « négatif » des inhomogénéités de champ électrique existant au sein de la structure. On constate de très forts gradients au voisinage de l'électrode numéro 3, ce qui peut laisser supposer l'existence de charges électrostatiques parasites dans cette zone.

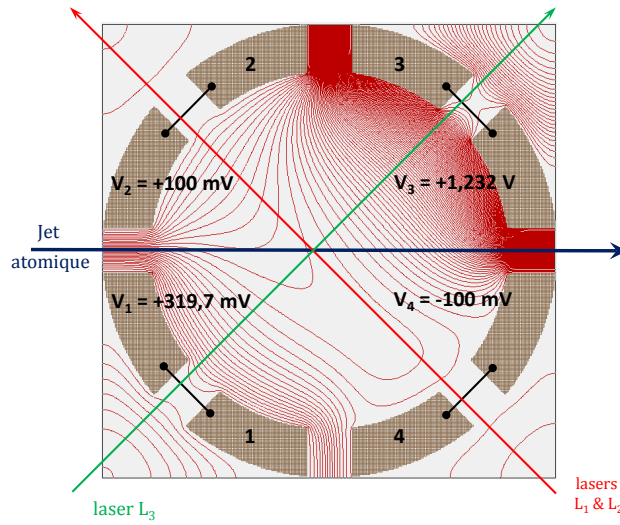


FIGURE J.1 – Compensation des inhomogénéités de champ électrique. On cherche à compenser les effets néfastes des inhomogénéités de champ électrique en les compensant par application de potentiels V_i , $i = 1, \dots, 4$ sur les électrodes radiofréquences. Cette compensation se fait avec comme critère l'optimisation du contraste des franges de la figure d'interférence métrologique finale. Cette compensation locale des gradients conduit à l'application des potentiels indiqués sur les électrodes de 1 à 4. Les courbes rouges correspondent aux courbes isopotentielles dans cette configuration avec $\pm 7,542$ V sur les électrodes « miroirs ».

J.2 Bruit électronique haute fréquence

Afin de réaliser des expériences d'électrométrie, il est aussi nécessaire de traquer toute source de bruit électrique haute fréquence. Comme dans beaucoup d'expériences à basse température au sein d'un cryostat, il est extrêmement coûteux en temps à l'échelle d'une année d'ouvrir un cryostat¹. En sus des phases de remise à chaud et de descente à froid qui constituent toujours un risque d'ouverture de fuites, les changements occasionnés sur tous les constituants à l'intérieur du cryostat par une telle manipulation sont tels que toutes les calibrations depuis les champs électriques jusqu'à l'alignement du four en passant par le réglage des lasers, des champs radiofréquences et micro-ondes sont à refaire. Nous avons donc minimisé les sources de bruit électrique cryostat fermé, en laissant le soin à mes successeurs d'éliminer les sources de bruit au sein du cryostat lors d'une prochaine « remise à l'air ». Je pense ici en particulier à trois modifications majeures :

- i. Si les champs radiofréquences sont acheminés depuis le haut du cryostat, jusqu'à la structure des électrodes par des câbles coaxiaux qui préservent le signal lors de sa propagation, ce n'est pas le cas pour les potentiels imposés sur les électrodes « miroirs » qui descendent par des câbles *Quad-Twist* non blindés.

1. Dans certains groupes, les expériences n'ont pas été « ouvertes » depuis plus d'une dizaine d'années [226].

- ii. Afin de filtrer les champs amenés jusqu'aux électrodes, l'idéal est de placer au plus près des électrodes des filtres bien choisis en fonction des temps caractéristiques des fonctions appliquées. A défaut d'ouvrir le cryostat, nous placerons ces filtres juste avant l'entrée dans ce dernier.
- iii. Même si, strictement parlant, cela ne relève pas de bruit électrique « haute fréquence », il conviendrait, afin d'obtenir des champs plus homogènes et de minimiser les couplages capacitifs entre deux sous-électrodes reliées entre elles, de redessiner un jeu de quatre véritables électrodes « radiofréquences », percées de telle sorte à laisser pénétrer les lasers.

Concernant les actions que nous avons menées afin de lutter contre le bruit électronique à l'extérieur du cryostat et qui se sont avérées fructueuses, constatant la diminution des phénomènes de décohérence affectant nos superpositions d'états atomiques, citons entre autres :

- i. Évacuation de toutes les alimentations à découpages provoquant périodiquement des *burst* de champ électrique de quelques millivolts.
- ii. Les générateurs de fonctions arbitraires générant les potentiels sur les électrodes sont placés au plus près de l'entrée dans le cryostat et sont en sus placés isolément dans des cages de Faraday, recouvertes de plaques en nickel, matériau à forte perméabilité magnétique, absorbant les lignes de champs magnétiques.
- iii. Des filtres passe-bas à 15 MHz juste avant l'entrée du cryostat sur les câbles descendants jusqu'aux électrodes « miroirs ». Des filtres passe-bas à 1,9 MHz avant l'entrée du cryostat sur les câbles descendants jusqu'aux électrodes « radiofréquences ».
- iv. Les connecteurs/soudures à nu sont placés à l'intérieur de boîtes métalliques.
- v. Les câbles *Quad-Twist* non utilisés qui descendent cependant le long du cryostat sont reliés deux à deux au niveau du connecteur 32 pins en haut du cryostat.
- vi. Surblindage des câbles BNC et SMA sensibles par de la tresse de masse.

La traque de toute source de bruit électrique haute fréquence², qui fut une activité chronophage, a cependant *in fine* porté ses fruits puisque le contraste des franges d'interférence s'est vu amélioré.

2. Parfois à l'aide d'une antenne formée par un fil et soudée au bout d'un câble BNC relié à un oscilloscope, nous avons, tel un sourcier, inspecté chaque élément du montage.

J.3 Effet de charge des électrodes « miroirs »

Nous avons remarqué lors des premières mesures de franges métrologiques un effet de charge des miroirs produisant lors des premières minutes d'une prise de données un déplacement global des franges d'interférence témoignant du fait que les miroirs ont besoin d'un certain nombre de répétitions de la séquence élémentaire avant de générer un champ électrique F_{st} stationnaire. La Figure J.2 permet de visualiser cet effet de charge directement sur le signal de métrologie quantique $P(\phi_{MW})$ pour des impulsions radiofréquences de durée $\tau_2 = 183,9$ ns. La figure d'interférence présentée à gauche correspond à la mesure

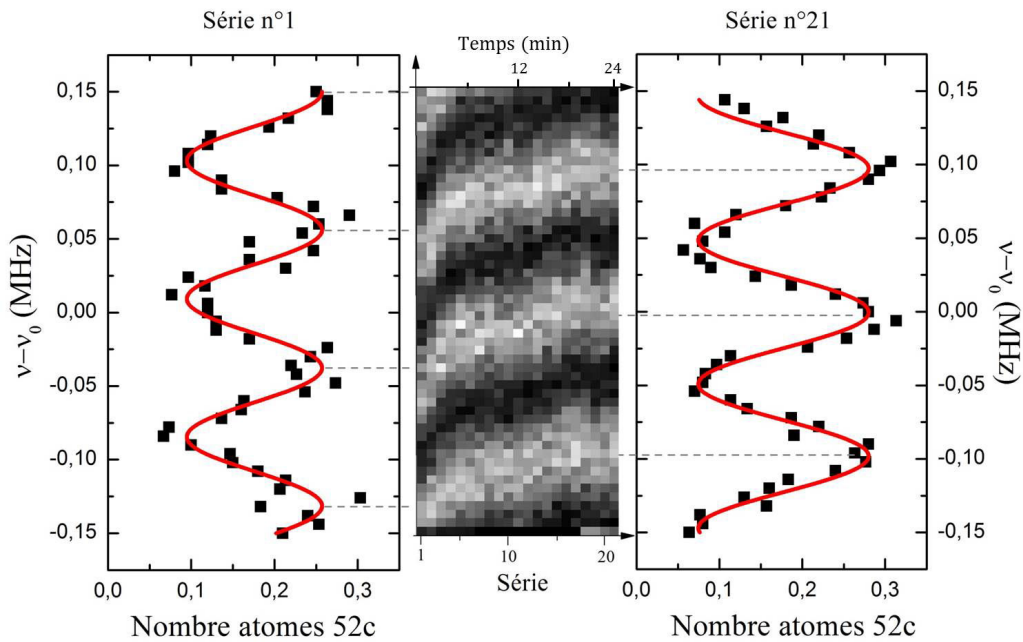


FIGURE J.2 – Effet de charge des électrodes « miroirs ». Suivi de la phase de la figure d'interférence au fur et à mesure des différentes séries se succédant lors d'une prise de données. A gauche et à droite, les franges d'interférence de la première et de la dernière série de données. La valeur de chacun des points est une moyenne sur 300 répétitions de la séquence. A la suite de ces 300 répétitions pour chacun des 51 points de mesure, une nouvelle série recommence. Au centre, une matrice 2D où les valeurs de chaque élément de la matrice correspondent au nombre d'atomes mesurés pour une phase du champ micro-onde donnée (lignes) et pour une série de données particulière (colonnes). Les valeurs sont imagées par teintes de gris, les faibles populations étant représentées par des cases de couleurs sombres (minimum = noir) et les populations importantes par des cases claires (maximum = blanc).

du nombre d'atomes dans le niveau $|52c\rangle$. La valeur de chacun des points est une moyenne sur 300 répétitions de la séquence. Il constitue une première série de données. A la suite de ces 300 répétitions pour chacun des 51 points de mesure, une nouvelle série recommence de suite. On répète cette série vingt-et-une fois de suite et nous représentons ici ces franges dans une matrice 2D où les valeurs de chaque élément de la matrice correspondent au nombre d'atomes mesurés pour une phase du champ micro-onde donnée (lignes) et pour

une série de données particulière (colonnes). Les valeurs sont imagées par teintes de gris, les faibles populations étant représentées par des cases de couleurs sombres (minimum = noir) et les populations importantes par des cases claires (maximum = blanc). La figure d'interférence présentée à droite de la matrice 2D correspond aux mesures de la dernière série de données. Les courbes rouges correspondent aux meilleurs ajustements sinusoïdaux des données expérimentales.

La procédure habituelle est de moyenner ces vingt-et-une séries afin de former le signal final. On voit cependant un déphasage progressif (de près de π radians) des franges d'interférence entre la première et la dernière série de données. Un tel moyennage viendrait donc brouiller les franges et réduire le contraste de la figure d'interférence finale. On note que ce régime transitoire, où les dérives sont dues à l'effet de charge des miroirs, prend fin aux environs de la dixième série de mesure, ce qui correspond tout de même à près de 612 000 répétitions de la fonction arbitraire de potentiel sur les électrodes « miroirs ». Afin de palier à cet effet, nous avons modifié le logiciel de prise de données afin que les séquences soient jouées en continu, même en l'absence de prise de données. Ceci fait disparaître cet effet de charge des miroirs sans doute dû au caractère massif de ces électrodes soumises à des variations de potentiels importants (de 0 V à environ 7,5 V) à l'échelle de la micro-seconde.

Lors de la prise des données présentées Figure V.11 page 249, le suivi série par série de la phase de la figure d'interférence mesurée par la séquence de contrôle est présentée ci-dessous Figure J.3. La présence d'un déphasage des franges de l'ordre de π radians lors des dix premières séries de mesure a disparu. Néanmoins, que ce soit sur le suivi des franges à $F_{st} - \delta F_{st}/2$ (à gauche) ou à $F_{st} + \delta F_{st}/2$ (à droite), on remarque un même motif dans

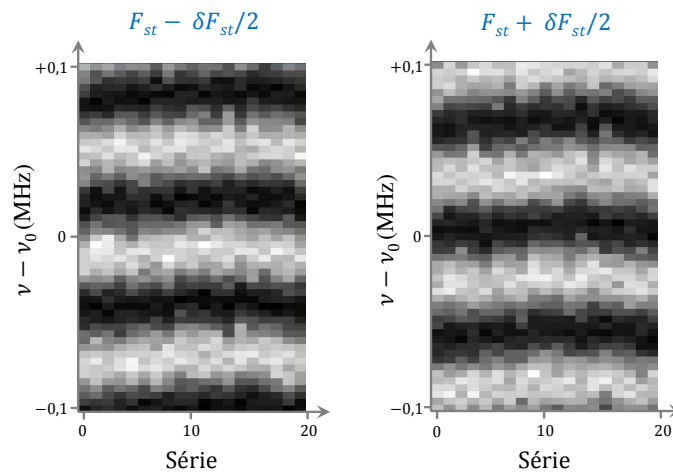


FIGURE J.3 – Suivi de la phase de la figure d'interférence au fur et à mesure des différentes séries se succédant lors d'une prise des données présentées Figure V.11 page 249. On constate la disparition de l'effet charge, par le simple fait de répéter indéfiniment la séquence même en l'absence de prise de données.

l'évolution des figures d'interférence, signe de légères variations persistantes du champ électrique statique. Il convient de souligner que nous parlons ici de très faibles variations du champ électrique ambiant engendrant un déphasage global des franges pouvant atteindre 0,5 radians, ce qui correspond à des fluctuations de la transition atomique d'environ 17 kHz, soit une variation du champ électrique d'environ $175 \mu\text{V}/\text{cm}$. Une série de mesures durant environ 1 min 12 sec, les variations dont nous parlons correspondent donc à des variations à long terme constatées sur une prise de données de près de 25 minutes. Nous proposerons une hypothèse concernant l'origine de ces variations de champ électrique ambiant dans la partie suivante.

Finalement, il est aussi important de préciser que ces variations affectent la valeur absolue du champ électrique F_{st} avec un temps caractéristique de plusieurs minutes et n'affecte donc pas la valeur du déphasage $\delta\chi$ mesuré entre deux séquences aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ espacées de $311 \mu\text{s}$; seul le contraste des franges finales obtenues par moyennage sur l'ensemble des données est affecté.

J.4 Dérive du champ électrique et procédure de recentrage

Afin de tenter d'identifier l'origine de ces très faibles oscillations du champ électrique lors d'une prise de données de longue durée, nous avons décidé de prendre une prise de données de très longue durée, durant toute une nuit, afin de savoir si les variations de champ électrique observées étaient occasionnées par notre activité (passages et portes ouvertes occasionnant des variations de température, etc.). La Figure J.4 présente ce suivi des franges d'interférence métrologique (mesure de $P(\phi_{\text{MW}})$ pour des impulsions radiofréquences de durée τ_2) aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ pendant plus de 7 heures de prise de données d'affilée.

On remarque une dérive persistante des franges durant les deux premières heures de mesure. Malgré une période un peu plus stable entre 2h et 4h30, on note de nouvelles variations vers la cinquième heure, sans raison apparente. Il est donc très difficile d'identifier la source de ces variations et la seule conclusion que nous pouvons tirer de ces données est que ces variations ne sont pas causées par notre propre activité dans le laboratoire.

Nous avons aussi durant cette longue prise de données effectué en parallèle des franges de Ramsey micro-ondes sur la transition $|49c\rangle \rightarrow |50, k=1\rangle$, qui est une transition insensible aux variations de champ magnétique ($\Delta m = 0$). Même si la sensibilité au champ électrique d'une telle mesure est près de 30 fois inférieure à celle de notre méthode de mé-

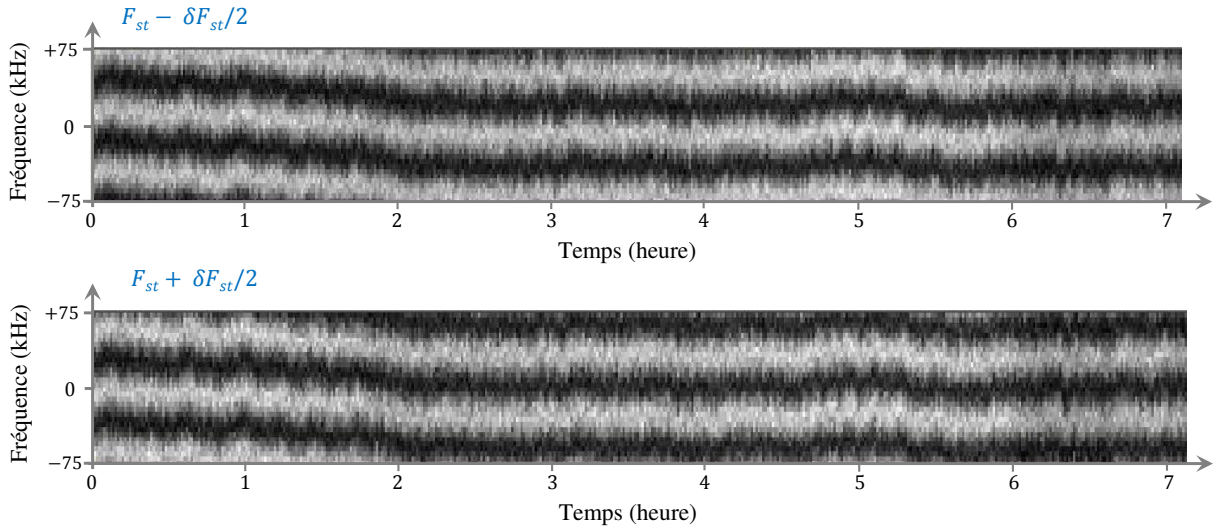


FIGURE J.4 – Dérive du champ électrique à long terme. Suivi des franges d'interférence constituant le signal de métrologie quantique $P(\phi_{MW})$ aux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ pendant plus de 7 heures de prise de données d'affilée, durant toute une nuit.

trologie, nous parvenons en écartant les deux impulsions micro-ondes Ramsey d'une durée 25 fois supérieure à celle des impulsions radiofréquences de métrologie (soit $6 \mu s$), à suivre les mêmes oscillations de champ électrique. La variation de la phase des franges d'interférence n'est donc pas d'origine magnétique. Ce que nous avons confirmé en réalisant aussi en parallèle des franges $|50c\rangle \rightarrow |51c\rangle$ uniquement sensibles au champ magnétique. Nous avons aussi suivi la température de la table d'optique ainsi que fait varier la température de la pièce dans laquelle se trouvait le cryostat sans constater de corrélation entre les effets de déphasage et de variation de température.

Ces légères oscillations globales des figures d'interférence aux deux champs électriques $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ semblant inévitables, nous avons décidé d'une méthode de traitement des données recentrant pour chaque série les franges d'interférence par rapport à une figure de contrôle. Comme précisé dans le Tableau V.2 page 233, afin de mesurer une seule valeur du recouvrement $P_{\phi_{RF}}(\varphi)$ aux deux champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$, nous réalisons en réalité six séquences, dont la dernière est une séquence de contrôle. Cette séquence de contrôle sert à évaluer au fur et à mesure des séries de données le déphasage global dû au glissement de la valeur absolue du champ électrostatique. Ce déphasage mesuré sur la séquence de contrôle est ensuite soustrait aux signaux interférométriques aux deux champs $F_{st} \pm \delta F_{st}/2$ avant moyennage. La Figure J.5 montre l'effet de cette procédure de recentrage sur le contraste des franges d'interférence expérimentale. Nous avons bien sûr vérifié, que cette procédure n'affectait pas la valeur du déphasage $\delta\chi$ mesuré. Sur cette Figure, les losanges creux correspondent à la valeur du contraste des franges d'interférence obtenues par la mesure de la probabilité $P_{\phi_{MW}}$ pour des impulsions radiofréquences de durées τ_i , $i = 1, 2$ et 3 (losanges noirs, rouges/roses et vert respectivement). Les points ronds de couleur associée

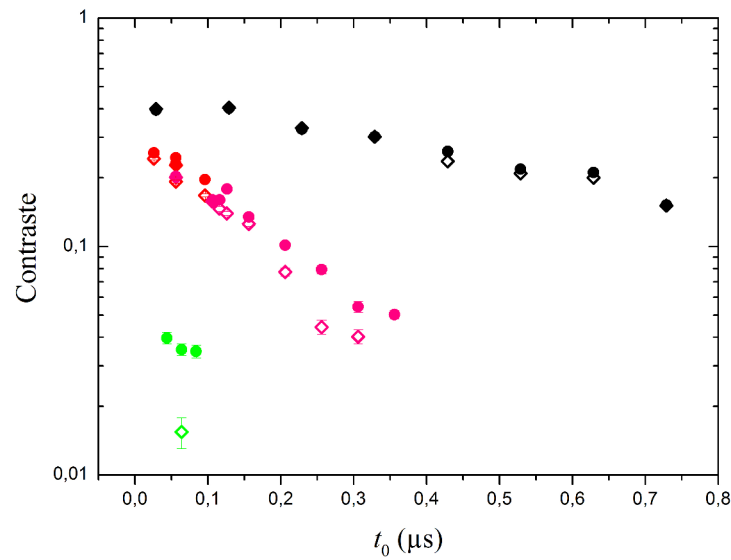


FIGURE J.5 – Traitement des données par la procédure de recentrage.

correspondent à la valeur du contraste des signaux qui ont été recentrés sur la séquence de contrôle. On constate que cette procédure n'a que très peu d'effet pour une courte durée d'injection radiofréquence : les losanges et ronds noirs sont quasiment superposés). De même, pour des impulsions radiofréquences de durée τ_2 , la procédure corrige très légèrement le contraste des franges à la hausse pour des courtes durée d'attente t_0 . Par contre, dès que la durée d'attente s'allonge et que la mesure devient d'une part plus sensible et d'autre part qu'elle sonde des inhomogénéités sur une distance plus grande, alors la procédure est bénéfique et vient aligner les points dont le contraste avait décroché. Finalement, il existe des situations (dernier rond rose ou deux des trois ronds vert) où le contraste étant si faible qu'il est impossible d'ajuster proprement le signal d'interférence par une fonction sinusoïdale sans l'aide de la procédure de recentrage. L'ensemble des résultats présentées Figures V.17 page 257 et V.20 page 262 ont été soumises à ce traitement des données.

Bibliographie

- [1] T. HÄNSCH, I. SHAHIN et A. SCHAWLOW, “Observation of the $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ Clock Transition in $^{27}\text{Al}^+$ ”, *Nature Physical Science* **235** (1972).
- [2] S. A. DIDDAMS, T. UDEM, J. C. BERGQUIST, E. A. CURTIS, R. E. DRULLINGER, L. HOLLBERG, W. M. ITANO, W. D. LEE, C. W. OATES, K. R. VOGEL et D. J. WINELAND, “An Optical Clock Based on a Single Trapped $^{199}\text{Hg}^+$ Ion”, *Science* **293**, n° 5531, 825–828 (2001).
- [3] L.-S. MA, Z. BI, A. BARTELS, L. ROBERTSSON, M. ZUCCO, R. S. WINDELER, G. WILPERS, C. OATES, L. HOLLBERG et S. A. DIDDAMS, “Optical Frequency Synthesis and Comparison with Uncertainty at the 10-19 Level”, *Science* **303**, n° 5665, 1843–1845 (2004).
- [4] T. ROSEN BAND, P. O. SCHMIDT, D. B. HUME, W. M. ITANO, T. M. FORTIER, J. E. STALNAKER, K. KIM, S. A. DIDDAMS, J. C. J. KOELEMELJ, J. C. BERGQUIST et D. J. WINELAND, “Observation of the $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ Clock Transition in $^{27}\text{Al}^+$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 220801 (May 2007).
- [5] H. KATORI, K. HASHIGUCHI, E. Y. IL’INOVA et V. D. OVSIANNIKOV, “Magic Wavelength to Make Optical Lattice Clocks Insensitive to Atomic Motion”, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 153004 (Oct 2009).
- [6] A. DEREVIANKO et H. KATORI, “*Colloquium* : Physics of optical lattice clocks”, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 331–347 (May 2011).
- [7] N. HINKLEY, J. A. SHERMAN, N. B. PHILLIPS, M. SCHIOPPO, N. D. LEMKE, K. BELOY, M. PIZZOCARO, C. W. OATES et A. D. LUDLOW, “An Atomic Clock with 10^{-18} Instability”, *Science* **341**, n° 6151, 1215–1218 (2013).
- [8] M. A. KASEVICH, E. RIIS, S. CHU et R. G. DEVOE, “rf spectroscopy in an atomic fountain”, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 612–615 (Aug 1989).
- [9] K. GIBBLE et S. CHU, “Laser-cooled Cs frequency standard and a measurement of the frequency shift due to ultracold collisions”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1771–1774 (Mar 1993).
- [10] R. WYNANDS et S. WEYERS, “Atomic fountain clocks”, *Metrologia* **42**, n° 3, S64 (2005).
- [11] N. HUNTEMANN, B. LIPPHARDT, C. TAMM, V. GERGINOV, S. WEYERS et E. PEIK, “Improved Limit on a Temporal Variation of m_p/m_e from Comparisons of Yb^+ and Cs Atomic Clocks”, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 210802 (Nov 2014).

- [12] J. K. WEBB, J. A. KING, M. T. MURPHY, V. V. FLAMBAUM, R. F. CARSWELL et M. B. BAINBRIDGE, “Indications of a Spatial Variation of the Fine Structure Constant”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 191101 (Oct 2011).
- [13] A. ANTOGNINI, F. NEZ, K. SCHUHMAN, F. D. AMARO, F. BIRABEN, J. M. R. CARDOSO, D. S. COVITA, A. DAX, S. DHAWAN, M. DIEPOLD, L. M. P. FERNANDES, A. GIESEN, A. L. GOUVEA, T. GRAF, T. W. HÄNSCH, P. INDELICATO, L. JULIEN, C.-Y. KAO, P. KNOWLES, F. KOTTMANN, E.-O. LE BIGOT, Y.-W. LIU, J. A. M. LOPES, L. LUDHOVA, C. M. B. MONTEIRO, F. MULHAUSER, T. NEBEL, P. RABINOWITZ, J. M. F. DOS SANTOS, L. A. SCHALLER, C. SCHWOB, D. TAQQU, J. F. C. A. VELOSO, J. VOGELSANG et R. POHL, “Proton Structure from the Measurement of 2S-2P Transition Frequencies of Muonic Hydrogen”, *Science* **339**, n° 6118, 417–420 (2013).
- [14] J.-P. UZAN, “Varying Constants, Gravitation and Cosmology”, *Living Reviews in Relativity* **14**, n° 2 (2011).
- [15] T. STEINMETZ, T. WILKEN, C. ARAUJO-HAUCK, R. HOLZWARTH, T. W. HÄNSCH, L. PASQUINI, A. MANESCAU, S. D’ODORICO, M. T. MURPHY, T. KENTISCHER, W. SCHMIDT et T. UDEM, “Laser Frequency Combs for Astronomical Observations”, *Science* **321**, n° 5894, 1335–1337 (2008).
- [16] J. L. HALL, “Nobel Lecture : Defining and measuring optical frequencies*”, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1279–1295 (Nov 2006).
- [17] I. K. KOMINI, T. W. KORNACK, J. C. ALLRED et M. V. ROMALIS, “A subfemtotesla multichannel atomic magnetometer”, *Nature* **422**, 596–599 (April 2003).
- [18] I. M. SAVUKOV, S. J. SELTZER, M. V. ROMALIS et K. L. SAUER, “Tunable Atomic Magnetometer for Detection of Radio-Frequency Magnetic Fields”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 063004 (Aug 2005).
- [19] M. V. BALABAS, T. KARAUANOV, M. P. LEDBETTER et D. BUDKER, “Polarized Alkali-Metal Vapor with Minute-Long Transverse Spin-Relaxation Time”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 070801 (Aug 2010).
- [20] W. WASILEWSKI, K. JENSEN, H. KRAUTER, J. J. RENEMA, M. V. BALABAS et E. S. POLZIK, “Quantum Noise Limited and Entanglement-Assisted Magnetometry”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 133601 (Mar 2010).
- [21] M. KOSCHORRECK, M. NAPOLITANO, B. DUBOST et M. W. MITCHELL, “Sub-Projection-Noise Sensitivity in Broadband Atomic Magnetometry”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 093602 (Mar 2010).
- [22] W. MUESSEL, H. STROBEL, D. LINNEMANN, D. B. HUME et M. K. OBERTHALER, “Scalable Spin Squeezing for Quantum-Enhanced Magnetometry with Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 103004 (Sep 2014).
- [23] D. HANNEKE, S. FOGWELL et G. GABRIELSE, “New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (Mar 2008).
- [24] R. J. SEWELL, M. KOSCHORRECK, M. NAPOLITANO, B. DUBOST, N. BEHBOOD et M. W. MITCHELL, “Magnetic Sensitivity Beyond the Projection Noise Limit by Spin Squeezing”, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 253605 (Dec 2012).

- [25] M. K. DOUGHERTY, K. K. KHURANA, F. M. NEUBAUER, C. T. RUSSELL, J. SAUR, J. S. LEISNER et M. E. BURTON, “Identification of a Dynamic Atmosphere at Enceladus with the Cassini Magnetometer”, *Science* **311**, n° 5766, 1406–1409 (2006).
- [26] H. XIA, A. BEN-AMAR BARANGA, D. HOFFMAN et M. V. ROMALIS, “Magnetoencephalography with an atomic magnetometer”, *Applied Physics Letters* **89**, n° 21, – (2006).
- [27] G. BISON, N. CASTAGNA, A. HOFER, P. KNOWLES, J.-L. SCHENKER, M. KASPRZAK, H. SAUDAN et A. WEIS, “A room temperature 19-channel magnetic field mapping device for cardiac signals”, *Applied Physics Letters* **95**, n° 17, – (2009).
- [28] M. KANDA, “Standard probes for electromagnetic field measurements”, *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* **41**, n° 10, 1349–1364 (Oct 1993), ISSN 0018-926X.
- [29] M. KANDA, “Standard antennas for electromagnetic interference measurements and methods to calibrate them”, *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on* **36**, n° 4, 261–273 (Nov 1994), ISSN 0018-9375.
- [30] S. SRIRAM, S. KINGSLEY et J. BOYD, “Electro-optical sensor for detecting electric fields”, (novembre 30 1993), uS Patent 5,267,336.
- [31] T. F. GALLAGHER, *Rydberg Atoms*, Cambridge Monographs on Atomic, Molecular and Chemical Physics, Cambridge University Press (1994).
- [32] P. GOY, L. MOI, M. GROSS, J. M. RAIMOND, C. FABRE et S. HAROCHE, “Rydberg-atom masers. II. Triggering by external radiation and application to millimeter-wave detectors”, *Phys. Rev. A* **27**, 2065–2081 (Apr 1983).
- [33] A. OSTERWALDER et F. MERKT, “Using High Rydberg States as Electric Field Sensors”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1831–1834 (Mar 1999).
- [34] M. G. BASON, M. TANASITTIKOSOL, A. SARGSYAN, A. K. MOHAPATRA, D. SARKISYAN, R. M. POTVLIEGE et C. S. ADAMS, “Enhanced electric field sensitivity of rf-dressed Rydberg dark states”, *New Journal of Physics* **12**, n° 6, 065015 (2010).
- [35] C. H. HERMANN AVIGLIANO, *Towards deterministic preparation of single Rydberg atoms and applications to quantum information processing*, Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (novembre 2014).
- [36] R. P. ABEL, C. CARR, U. KROHN et C. S. ADAMS, “Electrometry near a dielectric surface using Rydberg electromagnetically induced transparency”, *Phys. Rev. A* **84**, 023408 (Aug 2011).
- [37] Y. PU, D. D. NEUFELD et F. B. DUNNING, “Ionization of Rydberg atoms at metallic surfaces : Influence of stray fields”, *Phys. Rev. A* **81**, 042904 (Apr 2010).
- [38] M. T. FREY, X. LING, B. G. LINDSAY, K. A. SMITH et F. B. DUNNING, “Use of the Stark effect to minimize residual electric fields in an experimental volume”, *Review of Scientific Instruments* **64**, 3649–3650 (décembre 1993).
- [39] J. A. SEDLACEK, A. SCHWETTMANN, H. KÜBLER, R. LÖW, T. PFAU et S. J.P., “Microwave electrometry with Rydberg atoms in a vapour cell using bright atomic resonances”, *Nature Physics* **8**, 819–824 (Nov 2012).

- [40] J. A. SEDLACEK, A. SCHWETTMANN, H. KÜBLER et J. P. SHAFFER, “Atom-Based Vector Microwave Electrometry Using Rubidium Rydberg Atoms in a Vapor Cell”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 063001 (Aug 2013).
- [41] M. J. HOLLAND et K. BURNETT, “Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1355–1358 (Aug 1993).
- [42] J. BELTRÁN et A. LUIS, “Breaking the Heisenberg limit with inefficient detectors”, *Phys. Rev. A* **72**, 045801 (Oct 2005).
- [43] S. BOIXO, S. T. FLAMMIA, C. M. CAVES et J. GEREMIA, “Generalized Limits for Single-Parameter Quantum Estimation”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 090401 (Feb 2007).
- [44] S. M. ROY et S. L. BRAUNSTEIN, “Exponentially Enhanced Quantum Metrology”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 220501 (Jun 2008).
- [45] M. ZWIERZ, C. A. PÉREZ-DELGADO et P. KOK, “General Optimality of the Heisenberg Limit for Quantum Metrology”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 180402 (Oct 2010).
- [46] M. ZWIERZ, C. A. PÉREZ-DELGADO et P. KOK, “Ultimate limits to quantum metrology and the meaning of the Heisenberg limit”, *Phys. Rev. A* **85**, 042112 (Apr 2012).
- [47] C. W. HELSTROM, “Quantum detection and estimation theory”, *Journ. Stat. Phys.* **1**, 231–252 (May 1969).
- [48] C. M. CAVES, “Quantum-mechanical noise in an interferometer”, *Phys. Rev. D* **23**, 1693–1708 (Apr 1981).
- [49] W. K. WOOTTERS, “Statistical distance and Hilbert space”, *Phys. Rev. D* **23**, 357–362 (Jan 1981).
- [50] V. GIOVANNETTI, S. LLOYD et L. MACCONE, “Quantum-Enhanced Measurements : Beating the Standard Quantum Limit”, *Science* **306**, n° 5700, 1330–1336 (2004).
- [51] V. GIOVANNETTI, S. LLOYD et L. MACCONE, “Quantum Metrology”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 010401 (Jan 2006).
- [52] J. JACOBSON, G. BJÖRK, I. CHUANG et Y. YAMAMOTO, “Photonic de Broglie Waves”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4835–4838 (Jun 1995).
- [53] V. MEYER, M. A. ROWE, D. KIELPINSKI, C. A. SACKETT, W. M. ITANO, C. MONROE et D. J. WINELAND, “Experimental Demonstration of Entanglement-Enhanced Rotation Angle Estimation Using Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5870–5873 (Jun 2001).
- [54] D. LEIBFRIED, M. D. BARRETT, T. SCHAEZT, J. BRITTON, J. CHIAVERINI, W. M. ITANO, J. D. JOST, C. LANGER et D. J. WINELAND, “Toward Heisenberg-Limited Spectroscopy with Multiparticle Entangled States”, *Science* **304**, n° 5676, 1476–1478 (2004).
- [55] J. A. JONES, S. D. KARLEN, J. FITZSIMONS, A. ARDAVAN, S. C. BENJAMIN, G. A. D. BRIGGS et J. J. L. MORTON, “Magnetic Field Sensing Beyond the Standard Quantum Limit Using 10-Spin NOON States”, *Science* **324**, n° 5931, 1166–1168 (2009).

- [56] M. A. NIELSEN et I. L. CHUANG, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge university press (2010).
- [57] C. ORZEL, A. K. TUCHMAN, M. L. FENSELAU, M. YASUDA et M. A. KASEVICH, “Squeezed States in a Bose-Einstein Condensate”, *Science* **291**, n° 5512, 2386–2389 (2001).
- [58] K. MAUSSANG, *Atomic squeezed states on an atomchip*, Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (septembre 2010).
- [59] G. VASILAKIS, H. SHEN, K. JENSEN, M. BALABAS, S. D., C. B. et P. E.S., “Generation of a squeezed state of an oscillator by stroboscopic back-action-evading measurement”, *Nature Physics* **11**, 389–392 (March 2015).
- [60] F. HAAS, J. VOLZ, R. GEHR, J. REICHEL et J. ESTÈVE, “Entangled States of More Than 40 Atoms in an Optical Fiber Cavity”, *Science* **344**, n° 6180, 180–183 (2014).
- [61] G. BARONTINI, L. HOHMANN, F. HAAS, J. ESTÈVE et J. REICHEL, “Deterministic generation of multiparticle entanglement by quantum Zeno dynamics”, *Science* **349**, n° 6254, 1317–1321 (2015).
- [62] J. G. BOHNET, K. C. COX, M. A. NORCIA, J. M. WEINER, Z. CHEN et J. K. THOMPSON, “Reduced spin measurement back-action for a phase sensitivity ten times beyond the standard quantum limit”, *Nature Photonics* **8**, 731–736 (July 2014).
- [63] D. WALLS, “Squeezed states of light”, *Nature* **306**, 141–146 (Nov 1983).
- [64] Y. YAMAMOTO, S. MACHIDA et W. H. RICHARDSON, “Photon Number Squeezed States in Semiconductor Lasers”, *Science* **255**, n° 5049, 1219–1224 (1992).
- [65] C. H. H. SCHULTE, J. HANSOM, A. E. JONES, C. MATTHIESEN, C. LE GALL et M. ATATÜRE, “Quadrature squeezed photons from a two-level system”, *Nature* **525**, 222–225 (Sep 2015).
- [66] T. EBERLE, S. STEINLECHNER, J. BAUCHROWITZ, V. HÄNDCHEN, H. VAHLBRUCH, M. MEHMET, H. MÜLLER-EBHARDT et R. SCHNABEL, “Quantum Enhancement of the Zero-Area Sagnac Interferometer Topology for Gravitational Wave Detection”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 251102 (Jun 2010).
- [67] T. L. S. COLLABORATION, “A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit”, *Nature Physics* **7**, 962–965 (Sep 2011).
- [68] H. GROTE, K. DANZMANN, K. L. DOOLEY, R. SCHNABEL, J. SLUTSKY et H. VAHLBRUCH, “First Long-Term Application of Squeezed States of Light in a Gravitational-Wave Observatory”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 181101 (May 2013).
- [69] J. JOO, W. J. MUNRO et T. P. SPILLER, “Quantum Metrology with Entangled Coherent States”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 083601 (Aug 2011).
- [70] J. JOO, K. PARK, H. JEONG, W. J. MUNRO, K. NEMOTO et T. P. SPILLER, “Quantum metrology for nonlinear phase shifts with entangled coherent states”, *Phys. Rev. A* **86**, 043828 (Oct 2012).

- [71] S. D. HUVER, C. F. WILDFEUER et J. P. DOWLING, “Entangled Fock states for robust quantum optical metrology, imaging, and sensing”, *Phys. Rev. A* **78**, 063828 (Dec 2008).
- [72] B. LÜCKE, M. SCHERER, J. KRUSE, L. PEZZÉ, F. DEURETZBACHER, P. HYL-LUS, O. TOPIC, J. PEISE, W. ERTMER, J. ARLT, L. SANTOS, A. SMERZI et C. KLEMP, “Twin Matter Waves for Interferometry Beyond the Classical Limit”, *Science* **334**, n° 6057, 773–776 (2011).
- [73] B. C. SANDERS et G. J. MILBURN, “Optimal Quantum Measurements for Phase Estimation”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2944–2947 (Oct 1995).
- [74] H. STROBEL, W. MUESSEL, D. LINNEMANN, T. ZIBOLD, D. B. HUME, L. PEZZÈ, A. SMERZI et M. K. OBERTHALER, “Fisher information and entanglement of non-Gaussian spin states”, *Science* **345**, n° 6195, 424–427 (2014).
- [75] K. BERRADA, S. A. KHALEK et C. H. R. OOI, “Quantum metrology with entangled spin-coherent states of two modes”, *Phys. Rev. A* **86**, 033823 (Sep 2012).
- [76] L. PEZZÉ et A. SMERZI, “Ultrasensitive Two-Mode Interferometry with Single-Mode Number Squeezing”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 163604 (Apr 2013).
- [77] C.-F. LI, X.-Y. XU, J.-S. TANG, J.-S. XU et G.-C. GUO, “Ultrasensitive phase estimation with white light”, *Phys. Rev. A* **83**, 044102 (Apr 2011).
- [78] S. A. HAINE et S. S. SZIGETI, “Quantum metrology with mixed states : When recovering lost information is better than never losing it”, *Phys. Rev. A* **92**, 032317 (Sep 2015).
- [79] K. MODI, H. CABLE, M. WILLIAMSON et V. VEDRAL, “Quantum Correlations in Mixed-State Metrology”, *Phys. Rev. X* **1**, 021022 (Dec 2011).
- [80] M. SAFFMAN, T. G. WALKER et K. MØLMER, “Quantum information with Rydberg atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2313–2363 (Aug 2010).
- [81] D. BARREDO, H. LABUHN, S. RAVETS, T. LAHAYE, A. BROWAEYS et C. S. ADAMS, “Coherent Excitation Transfer in a Spin Chain of Three Rydberg Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 113002 (Mar 2015).
- [82] L. BÉGUIN, A. VERNIER, R. CHICIREANU, T. LAHAYE et A. BROWAEYS, “Direct Measurement of the van der Waals Interaction between Two Rydberg Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 263201 (Jun 2013).
- [83] M. D. LUKIN, M. FLEISCHHAUER, R. COTE, L. M. DUAN, D. JAKSCH, J. I. CIRAC et P. ZOLLER, “Dipole Blockade and Quantum Information Processing in Mesoscopic Atomic Ensembles”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037901 (Jun 2001).
- [84] D. JAKSCH, J. I. CIRAC, P. ZOLLER, S. L. ROLSTON, R. CÔTÉ et M. D. LUKIN, “Fast Quantum Gates for Neutral Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2208–2211 (Sep 2000).
- [85] M. M. MÜLLER, M. MURPHY, S. MONTANGERO, T. CALARCO, P. GRANGIER et A. BROWAEYS, “Implementation of an experimentally feasible controlled-phase gate on two blockaded Rydberg atoms”, *Phys. Rev. A* **89**, 032334 (Mar 2014).

- [86] T. WILK, A. GAËTAN, C. EVELLIN, J. WOLTERS, Y. MIROSHNYCHENKO, P. GRANGIER et A. BROWAEYS, “Entanglement of Two Individual Neutral Atoms Using Rydberg Blockade”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 010502 (Jan 2010).
- [87] M. REETZ-LAMOUR, T. AMTHOR, J. DEIGLMAYR et M. WEIDEMÜLLER, “Rabi Oscillations and Excitation Trapping in the Coherent Excitation of a Mesoscopic Frozen Rydberg Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 253001 (Jun 2008).
- [88] E. URBAN, T. JOHNSON, T. HENAGE, L. ISENHOWER, D. YAVUZ, T. WALKER et M. SAFFMAN, “Observation of Rydberg blockade between two atoms”, *Nature Physics* **5**, n° 2, 110–114 (2009).
- [89] D. MAXWELL, D. J. SZWER, D. PAREDES-BARATO, H. BUSCHE, J. D. PRITCHARD, A. GAUGUET, K. J. WEATHERILL, M. P. A. JONES et C. S. ADAMS, “Storage and Control of Optical Photons Using Rydberg Polaritons”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 103001 (Mar 2013).
- [90] M. BRUNE, E. HAGLEY, J. DREYER, X. MAÎTRE, A. MAALI, C. WUNDERLICH, J. M. RAIMOND et S. HAROCHE, “Observing the Progressive Decoherence of the “Meter” in a Quantum Measurement”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887–4890 (Dec 1996).
- [91] J. M. RAIMOND, M. BRUNE et S. HAROCHE, “Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity”, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565–582 (Aug 2001).
- [92] W. WIECZOREK, R. KRISCHEK, N. KIESEL, P. MICHELBERGER, G. TÓTH et H. WEINFURTER, “Experimental Entanglement of a Six-Photon Symmetric Dicke State”, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 020504 (Jul 2009).
- [93] W.-B. GAO, C.-Y. LU, X.-C. YAO, P. XU, O. GÜHNE, A. GOEBEL, Y.-A. CHEN, C.-Z. PENG, Z.-B. CHEN et J.-W. PAN, “Experimental demonstration of a hyper-entangled ten-qubit Schrödinger cat state”, *Nature Physics* **6**, 331–335 (Mar 2010).
- [94] B. VLASTAKIS, G. KIRCHMAIR, Z. LEGHTAS, S. E. NIGG, L. FRUNZIO, S. M. GIRVIN, M. MIRRAHIMI, M. H. DEVORET et R. J. SCHOELKOPF, “Deterministically Encoding Quantum Information Using 100-Photon Schrödinger Cat States”, *Science* **342**, n° 6158, 607–610 (2013).
- [95] D. LEIBFRIED, E. KNILL, S. SEIDELIN, J. BRITTON, R. B. BLAKESTAD, J. CHIAVERINI, D. B. HUME, W. M. ITANO, J. D. JOST, C. LANGER, R. OZERI, R. R. et D. J. WINELAND, “Creation of a six-atom ‘Schrödinger cat’ state”, *Nature* **438**, 639–642 (Dec 2005).
- [96] A. SIGNOLES, A. FACON, D. GROSSO, I. DOTSENKO, S. HAROCHE, J.-M. RAIMOND, M. BRUNE et S. GLEYZES, “Confined quantum Zeno dynamics of a watched atomic arrow”, *Nature Physics* **10**, 715–719 (2014).
- [97] E. SCHRODINGER, *Naturwissenschaften* **23**, 823 (1935).
- [98] “<http://www.astronomes.com/le-big-bang/chat-schrodinger/>”, .
- [99] J. HUANG, X. QIN, H. ZHONG, Y. KE et C. LEE, “Dissipative Quantum Metrology with Spin Cat States”, *arXiv:1410.6370* (2014).

- [100] S. SIMMONS, J. A. JONES, S. D. KARLEN, A. ARDAVAN et J. J. L. MORTON, “Magnetic field sensors using 13-spin cat states”, *Phys. Rev. A* **82**, 022330 (Aug 2010).
- [101] C. HEMPEL, B. P. LANYON, P. JURCEVIC, R. GERRITSMA, R. BLATT et C. F. ROOS, “Entanglement-enhanced detection of single-photon scattering events”, *Nature Photonics* **7**, 630–633 (July 2013).
- [102] T. C. V. OPATRNÝ et K. MØLMER, “Spin squeezing and Schrödinger-cat-state generation in atomic samples with Rydberg blockade”, *Phys. Rev. A* **86**, 023845 (Aug 2012).
- [103] A. SIGNOLES, *Manipulations cohérentes d'états de Rydberg elliptiques par dynamique Zénon quantique*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2014).
- [104] A. EINSTEIN, “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, *Ann. Phys.* **17**, 132 – 148 (1905).
- [105] M. PLANCK, “On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum”, *Verh. Deutsch. Phys. Ges* **2**, 237 (1900).
- [106] M. PLANCK, “On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum”, *Ann. Phys.* **4**, 553 (1901).
- [107] J. FRAUNHOFER, *Gilbert's Ann. Phys.* **56**, 264 (1817).
- [108] L. FOUCAULT, *Ann. Chim. et Phys.* **68**, 476 (1866).
- [109] H. KIRCHHOFF, *Ann. Chim. et Phys.* **58**, 254 (1860).
- [110] H. KIRCHHOFF, *Ann. Chim. et Phys.* **59**, 124 (1860).
- [111] J. BALMER, “Note on the Spectral Lines of Hydrogen”, *Ann. Phys. und Chem.* **25**, 80 (1885).
- [112] J. RYDBERG, “Note on the Spectral Lines of Hydrogen”, *Phil. Mag.* **29**, 331 (1890).
- [113] J. RYDBERG, “On the Emission Spectra of the Chemical Elements”, *Den Kongliga Svenska Vetenskaps akademiens Handlingar* **23**, 11 (1889).
- [114] N. BOHR, “On the Constitution of Atoms and Molecules”, *Phil. Mag.* **26**, n° 153, 476–502 (July 1913).
- [115] N. W. EVANS, “Superintegrability in classical mechanics”, *Physical Review A* **41**, 5666–5676 (1990).
- [116] W. WILSON, *Phil. Mag.* **29**, 795 (1915).
- [117] A. SOMMERFELD, *Annalen der Physik* **51**, 1 (1916).
- [118] J. HARE, *Étude théorique et expérimentales des Atomes de Rydberg Circulaires : vers une mesure directe de la Constante de Rydberg en unités de fréquence.*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (1991).
- [119] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG, *Photons et atomes - Introduction à l'électrodynamique quantique.*, CNRS Editions (1987).
- [120] D. DELANDE et J. GAY, “A new method for producing circular Rydberg states”, *EPL (Europhysics Letters)* **5**, n° 4, 303 (1988).

- [121] D. BERNARD, Y. LASZLO et D. RENARD, *Eléments de théorie des groupes et symétries quantiques*, Ecole Polytechnique, Paris (2010).
- [122] P. S. EPSTEIN, “Zur Theorie des Starkeffektes”, *Annalen der Physik* **355**, n° 13, 489–520 (1916), ISSN 1521-3889.
- [123] K. SCHWARTZSCHILD, *Berl.Ber.* **518** (1916).
- [124] A. MESSIAH, *Mécanique quantique*, Ed. Dunod, Paris (1964).
- [125] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU et F. LALOË, *Mécanique quantique*, Hermann (1997).
- [126] F. STEBBINGS, R.F. AND DUNNING, *Rydberg States of Atoms and Molecules*, Cambridge University Press (1983).
- [127] “Physique Atomique et Moléculaire près des seuils d’ionisation en champ intense”, *J. Physique* **43** (1982).
- [128] L. LANDAU et E. LIFSHITZ, *Physique Théorique, tome 3 : Mécanique Quantique, 3e éd.*, Mir Moscou (1975).
- [129] W. GORDON, *Ann.d.Phys.* **2**, 1031 (1929).
- [130] H. BETHE et E. SALPETER, *Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Atoms, 1957*, Springer, Berlin (1977).
- [131] M. ENGLEFIELD, *Group theory and the Coulomb Problem*, Wiley-Interscience (Jan 1972).
- [132] F. T. ARECCHI, E. COURTENS, R. GILMORE et H. THOMAS, “Atomic Coherent States in Quantum Optics”, *Phys. Rev. A* **6**, 2211–2237 (Dec 1972).
- [133] E. LIEB, “The Classical Limit of Quantum Spin Systems”, *Commun. Math. Phys.* **31**, 327–340 (1973).
- [134] J. M. RAIMOND et S. HAROCHE, *Exploring the quantum*, Oxford Graduate Texts (2006).
- [135] G. RAMACHANDRAN, A. USHA DEVI, P. DEVI et S. SIRSI, “Quasi-Probability Distributions for Arbitrary Spin- j Particles”, *Found.Phys.* **26**, n° 6 (1996).
- [136] G. S. AGARWAL, “Relation between atomic coherent-state representation, state multipoles, and generalized phase-space distributions”, *Phys. Rev. A* **24**, 2889–2896 (Dec 1981).
- [137] G. AGARWAL, “State reconstruction for a collection of two-level systems”, *Physical Review A* **57**, n° 1, 671 (1998).
- [138] C. CHANDLER, L. COHEN, C. LEE, M. SCULLY et K. WODKIEWICZ, “Quasi-Probability Distribution for Spin-1/2 Particles”, *Found.Phys.* **22** (1992).
- [139] S. DELÉGLISE, *Reconstruction complète d’états non-classiques du champ en électrodynamique quantique en cavité*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2009).
- [140] E. WIGNER, “On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium”, *Phys. Rev.* **40**, 749–759 (Jun 1932).
- [141] M. L. ZIMMERMAN, M. G. LITTMAN, M. M. KASH et D. KLEPPNER, “Stark structure of the Rydberg states of alkali-metal atoms”, *Physical Review A* **20**, n° 6, 2251 (1979).

- [142] P. BELLOMO, D. FARRELLY et T. UZER, “Collisional population of ultra-high, ultra-long-living Rydberg states under zero-electron-kinetic-energy conditions”, *The Journal of chemical physics* **107**, n° 7, 2499–2515 (1997).
- [143] Y. ISHIDA et S. HIYAMA, “The stark effect of balmer series at high field”, *Sci.Pap.Inst.Phys.and Chem. Res.* , n° 152 (1928).
- [144] S. HAROCHE, “Contrôle de particules quantiques isolées (2)”, *Cours du Collège de France* , n° 1 (2013-2014).
- [145] J. HAN, Y. JAMIL, D. V. L. NORUM, P. J. TANNER et T. F. GALLAGHER, “Rb nf quantum defects from millimeter-wave spectroscopy of cold Rb85 Rydberg atoms”, *Phys. Rev. A* **74**, 054502 (Nov 2006).
- [146] W. LI, I. MOURACHKO, M. W. NOEL et T. F. GALLAGHER, “Millimeter-wave spectroscopy of cold Rb Rydberg atoms in a magneto-optical trap : Quantum defects of the ns, np, and nd series”, *Phys. Rev. A* **67**, 052502 (May 2003).
- [147] D. MESCHEDE, “Centimeter-wave spectroscopy of highly excited rubidium atoms”, *JOSA B* **4**, n° 3, 413–419 (1987).
- [148] P. NUSSENZVEIG, *Mesures de champs au niveau du photon par interférométrie atomique*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (1994).
- [149] T. MEUNIER, *Induced quantum Rabi oscillation : a test of mesoscopic quantum coherence*, Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (décembre 2004).
- [150] P. NUSSENZVEIG, *Measurements of fields at the single photon level by atom interferometry*, Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (juillet 1994).
- [151] S. GLEYZES, *Vers la préparation de cohérences quantiques mésoscopiques : réalisation d'un montage à deux cavités supraconductrices*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2006).
- [152] P. NUSSENZVEIG, F. BERNARDOT, M. BRUNE, J. HARE, J. M. RAIMOND, S. HAROCHE et W. GAWLIK, “Preparation of high-principal-quantum-number “circular” states of rubidium”, *Phys. Rev. A* **48**, 3991–3994 (Nov 1993).
- [153] E. ARIMONDO, M. INGUSCIO et P. VIOLINO, “Experimental determinations of the hyperfine structure in the alkali atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 31–75 (Jan 1977).
- [154] X. MAITRE, *Une paire d'atomes intriqués : expériences d'électrodynamique quantique en cavité*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (1998).
- [155] R. G. HULET et D. KLEPPNER, “Rydberg Atoms in "Circular" States”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, n° 16, 1430–1433 (Oct 1983).
- [156] D. A. STECK, “Rubidium 87 D Line Data”, (2001).
- [157] A. AUFFEVEES, *Oscillation de Rabi à la frontière classique-quantique et génération de chats de Schrödinger*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (2004).
- [158] J.-M. RAIMOND, C. SAYRIN, S. GLEYZES, I. DOTSSENKO, M. BRUNE, S. HAROCHE, P. FACCHI et S. PASCAZIO, “Phase space tweezers for tailoring cavity fields by quantum Zeno dynamics”, *Physical review letters* **105**, n° 21, 213601 (2010).

- [159] J.-M. RAIMOND, P. FACCHI, B. PEAUDECERF, S. PASCAZIO, C. SAYRIN, I. DOTSENKO, S. GLEYZES, M. BRUNE et S. HAROCHE, “Quantum Zeno dynamics of a field in a cavity”, *Physical Review A* **86**, n° 3, 032120 (2012).
- [160] P. FACCHI, V. GORINI, G. MARMO, S. PASCAZIO et E. SUDARSHAN, “Quantum Zeno dynamics”, *Physics Letters A* **275**, n° 1, 12–19 (2000).
- [161] Y.-R. ZHANG et H. FAN, “Zeno dynamics in quantum open systems”, *Scientific Reports* **5**, 11509 (June 2015).
- [162] A. H. KIILERICH et K. MØLMER, “Quantum Zeno effect in parameter estimation”, *Phys. Rev. A* **92**, 032124 (Sep 2015).
- [163] A. TAVAKOLI, H. ANWER, A. HAMEEDI et M. BOURENNANE, “Quantum communication complexity using the quantum Zeno effect”, *Phys. Rev. A* **92**, 012303 (Jul 2015).
- [164] F. SCHÄFER, I. HERRERA, S. CHERUKATTIL, C. LOVECCHIO, F. CATALIOTTI, F. CARUSO et A. SMERZI, “Experimental realization of quantum zeno dynamics”, *Nature communications* **5**, 3194 (2014).
- [165] F. HAAS, J. VOLZ, R. GEHR, J. REICHEL et J. ESTÈVE, “Quantum Zeno effect and dynamics”, *Science* **344**, n° 6180, 180–183 (April 2014).
- [166] L. BRETHERAU, P. CAMPAGNE-IBARCQ, E. FLURIN, F. MALLET et B. HUARD, “Quantum dynamics of an electromagnetic mode that cannot contain N photons”, *Science* **348**, n° 6236, 776–779 (May 2015).
- [167] P. FACCHI et M. LIGABÓ, “Quantum Zeno effect and dynamics”, *J. Math. Phys.* **51**, 022106 (2010).
- [168] J. BERNU, S. DELÉGLISE, C. SAYRIN, S. KUHR, I. DOTSENKO, M. BRUNE, J. M. RAIMOND et S. HAROCHE, “Freezing Coherent Field Growth in a Cavity by the Quantum Zeno Effect”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, n° 18, 180402 (Oct 2008).
- [169] J.-L. BASDEVANT et J. DALIBARD, *Mécanique quantique*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Paris (2009).
- [170] P. FACCHI et S. PASCAZIO, “Quantum Zeno dynamics : mathematical and physical aspects”, *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **41**, n° 49, 493001 (2008).
- [171] E. FERMI, “Zur Theorie des Wasserstoffatoms”, *Rev. Mod. Phys* **4**, 87 (1932).
- [172] E. FERMI, *Nuclear Physics*, University of Chicago (1950).
- [173] P. FACCHI et S. PASCAZIO, “Temporal behavior and quantum Zeno time of an excited state of the hydrogen atom”, *Phys. Lett. A* **241**, 139 (1998).
- [174] P. FACCHI et S. PASCAZIO, “Deviations from exponential law and Van Hove’s limit”, *Physica A* **271**, 133 (1999).
- [175] I. ANTONIOU, E. KARPOV, G. PRONKO et E. YAREVSKY, “Quantum Zeno and anti-Zeno effects in the Friedrichs model”, *Phys. Rev. A* **63**, 062110 (May 2001).
- [176] L. KHALFIN, “Phenomenological theory of K0 mesons and the non-exponential character of the decay”, *JETP Lett* **8**, 65–68 (1968).

- [177] L. FONDA, G. GHIRARDI, A. RIMINI et T. WEBER, “On the quantum foundations of the exponential decay law”, *Il Nuovo Cimento A* **15**, n° 4, 689–704 (1973).
- [178] B. MISRA et E. C. G. SUDARSHAN, “The Zeno’s paradox in quantum theory”, *Journal of Mathematical Physics* **18**, n° 4, 756–763 (1977).
- [179] H. NAKAZATO, M. NAMIKI, S. PASCAZIO et H. RAUCH, “Understanding the quantum Zeno effect”, *Physics Letters A* **217**, n° 4, 203–208 (1996).
- [180] K. KOSHINO et A. SHIMIZU, “Quantum Zeno effect by general measurements”, *Physics reports* **412**, n° 4, 191–275 (2005).
- [181] P. FACCHI, D. LIDAR et S. PASCAZIO, “Unification of dynamical decoupling and the quantum Zeno effect”, *Physical Review A* **69**, n° 3, 032314 (2004).
- [182] L. VIOLA, E. KNILL et S. LLOYD, “Dynamical Decoupling of Open Quantum Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2417–2421 (Mar 1999).
- [183] W. M. ITANO, D. J. HEINZEN, J. J. BOLLINGER et D. J. WINELAND, “Quantum Zeno effect”, *Phys. Rev. A* **41**, 2295–2300 (Mar 1990).
- [184] K. MØLHAVE et M. DREWSSEN, “Demonstration of the continuous quantum Zeno effect in optical pumping”, *Physics Letters A* **268**, n° 1, 45–49 (2000).
- [185] C. BALZER, R. HUESMANN, W. NEUHAUSER et P. TOSCHEK, “The quantum Zeno effect—evolution of an atom impeded by measurement”, *Optics communications* **180**, n° 1, 115–120 (2000).
- [186] T. NAKANISHI, K. YAMANE et M. KITANO, “Absorption-free optical control of spin systems : The quantum Zeno effect in optical pumping”, *Physical Review A* **65**, n° 1, 013404 (2001).
- [187] E. W. STREED, J. MUN, M. BOYD, G. K. CAMPBELL, P. MEDLEY, W. KETTERLE et D. E. PRITCHARD, “Continuous and Pulsed Quantum Zeno Effect”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 260402 (Dec 2006).
- [188] N. BAR-GILL, E. E. ROWEN, G. KURIZKI et N. DAVIDSON, “Short-time Enhancement of the Decay of Coherent Excitations in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 110401 (Mar 2009).
- [189] B. NAGELS, L. HERMANS et P. CHAPOVSKY, “Quantum Zeno Effect induced by collisions”, *Physical review letters* **79**, n° 17, 3097 (1997).
- [190] J. BERNU, *Mesures QND en Electrodynamique Quantique en Cavité : Production et Décohérence d’Etats de Fock - Effet Zénon*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (Septembre 2008).
- [191] J. SCHWINGER, *The Algebra of Microscopic Measurement* **45**, 1152 (Aug. 1959).
- [192] J. SCHWINGER, *Quantum Kinematics and Dynamics*, Perseus, New York (1991).
- [193] A. PERES, *Quantum Theory : Concepts and Methods*, Kluwer Academic, New York (2002).
- [194] P. FACCHI et S. PASCAZIO, “Quantum Zeno Subspaces”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, n° 8, 080401 (Aug 2002).
- [195] J. NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Verlag von Julius Springer Berlin (1932).

- [196] L. VIOLA et S. LLOYD, “Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems”, *Physical Review A* **58**, n° 4, 2733 (1998).
- [197] L.-M. DUAN et G.-C. GUO, “Suppressing environmental noise in quantum computation through pulse control”, *Physics Letters A* **261**, n° 3, 139 – 144 (1999), ISSN 0375-9601.
- [198] W. ANDERSON et F. NELSON, “Removal of residual splitting in nuclear magnetic double resonance”, *The Journal of Chemical Physics* **39**, n° 1, 183–189 (1963).
- [199] R. ERNST, “Nuclear Magnetic Double Resonance with an Incoherent Radio-Frequency Field”, *The Journal of Chemical Physics* **45**, n° 10, 3845–3861 (1966).
- [200] R. FREEMAN, S. P. KEMPESELL et M. H. LEVITT, “Broadband decoupling and scaling of heteronuclear spin-spin interactions in high-resolution NMR”, *Journal of Magnetic Resonance (1969)* **35**, n° 3, 447–450 (1979).
- [201] J. E. AVRON et A. ELGART, “Adiabatic theorem without a gap condition : Two-level system coupled to quantized radiation field”, *Phys. Rev. A* **58**, 4300–4306 (Dec 1998).
- [202] A. LVOVSKY, “Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography”, *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics* **6**, n° 6, S556 (2004).
- [203] S. DELÉGLISE, I. DOTSENKO, C. SAYRIN, J. BERNU, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND et S. HAROCHE, “Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence”, *Nature* **455**, n° 7212, 510–514 (septembre 2008), ISSN 0028-0836.
- [204] S. HAROCHE, “Synthèse et reconstruction d’états quantiques”, *Cours du Collège de France*, n° 2 (2009-2010).
- [205] R. JOZSA, “Fidelity for mixed quantum states”, *J.Mod.Opt.* **41**, 2315–2323 (1994).
- [206] C. A. FUCHS et C. M. CAVES, “Ensemble-Dependent Bounds for Accessible Information in Quantum Mechanics”, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3047–3050 (Dec 1994).
- [207] K. BANASZEK et K. WÓDKIEWICZ, “Direct Probing of Quantum Phase Space by Photon Counting”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4344–4347 (Jun 1996).
- [208] S. WALLENTOWITZ et W. VOGEL, “Unbalanced homodyning for quantum state measurements”, *Phys. Rev. A* **53**, 4528–4533 (Jun 1996).
- [209] K. BANASZEK, C. RADZEWICZ, K. WÓDKIEWICZ et J. S. KRASIŃSKI, “Direct measurement of the Wigner function by photon counting”, *Phys. Rev. A* **60**, 674–677 (Jul 1999).
- [210] Y. SHALIBO, R. RESH, O. FOGEL, D. SHWA, R. BIALCZAK, J. M. MARTINIS et N. KATZ, “Direct Wigner Tomography of a Superconducting Anharmonic Oscillator”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 100404 (Mar 2013).
- [211] A. AUERBACH, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, Springer, 1994 (1998).
- [212] J. R. KLAUDER, “Path integrals and stationary-phase approximations”, *Phys. Rev. D* **19**, 2349–2356 (Apr 1979).

- [213] A. GARG, “Topologically Quenched Tunnel Splitting in Spin Systems without Kramers’ Degeneracy”, *Europhys. Lett.* **22**, n° 3, 205–210 (1993).
- [214] J. ZINN-JUSTIN, *Intégrale de chemin en mécanique quantique : Introduction*, EDP Sciences, CNRS Editions (2003).
- [215] M. V. BERRY, “Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes”, *Royal Society of London Proceedings Series A* **392**, 45–57 (mars 1984).
- [216] S. PANCHARATNAM, “Generalized Theory of Interference, and Its Applications. Part I. Coherent Pencils”, *Proc. Indian Acad. Sci. A* **44**, 247–262 (1959).
- [217] J. P. DOWLING, G. S. AGARWAL et W. P. SCHLEICH, “Wigner distribution of a general angular-momentum state : Applications to a collection of two-level atoms”, *Phys. Rev. A* **49**, 4101–4109 (May 1994).
- [218] J. A. SEDLACEK, A. SCHWETTMANN, H. KÜBLER, R. LÖW, T. PFAU et J. SCHAFFER, “Microwave electrometry with Rydberg atoms in a vapour cell using bright atomic resonances”, *Nature Physics* **8**, 819–824 (Aug 2012).
- [219] R. C. TEIXEIRA, *Effets mécaniques de l’interaction dipolaire des atomes de Rydberg sondés par spectroscopie micro-onde*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2014).
- [220] “Site Internet du Dr. Andrew Mitchell (Institut for Theoretical Physics, Utrecht University) : <http://www.staff.science.uu.nl/mitch003/research.html>”, .
- [221] G. GRYNBERG, A. ASPECT et C. FABRE, *Introduction to Quantum Optics*, Cambridge University Press (2010).
- [222] D. W. PRESTON, “Doppler-free saturated absorption : Laser spectroscopy”, *Am. J. Phys.* **64**, n° 11 (1996).
- [223] G. C. BJORKLUND, “Frequency-modulation spectroscopy : a new method for measuring weak absorptions and dispersions”, *Optics Letters* **5**, n° 1, 15–17 (1980).
- [224] J. L. HALL, L. HOLLBERG, T. BAER et H. G. ROBINSON, “Optical heterodyne saturation spectroscopy”, *Applied Physics Letters* **39**, n° 9, 680–682 (1981).
- [225] R. DREVER, J. HALL, F. KOWALSKI, J. HOUGH, G. FORD, A. MUNLEY et H. WARD, “Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator”, *Applied Physics B* **31**, n° 2, 97–105 (1983), ISSN 0946-2171.
- [226] R. BLATT, *Private Communication* .

Chats de Schrödinger d'un atome de Rydberg pour la métrologie quantique

Résumé Il n'y a pas de limite fondamentale à une mesure classique : la position d'une aiguille sur un cadran peut être déterminée avec une incertitude arbitrairement faible. Au contraire, dans le monde quantique, la précision de toute mesure est limitée par le bruit quantique. Lorsque l'aiguille de mesure devient un système mésoscopique, tel un moment cinétique J qui évoluerait sur le cadran sphérique d'une sphère de Bloch, les fluctuations quantiques affectant les états cohérents conduisent alors à une incertitude de mesure en $1/\sqrt{J}$ appelée limite quantique standard. La métrologie quantique consiste à préparer l'aiguille dans un état quantique qui permet de dépasser cette limite et d'atteindre la précision ultime fondamentale, dite limite de Heisenberg, qui évolue en $1/J$. Dans ce manuscrit, nous présentons une approche innovante fondée sur la mesure de la phase relative d'une superposition d'états mésoscopiques du type *Chat de Schrödinger*. Cette méthode a permis la réalisation d'un électromètre à un seul atome mesurant de faibles champs de l'ordre du mV/cm en quelques dizaines de nanosecondes avec une sensibilité proche de la limite d'Heisenberg. La grande sensibilité de ces méthodes de mesure de champ résolue en temps et en espace ouvre la voie à de nombreuses applications.

Mots-clés Atomes de Rydberg, métrologie quantique, *Chat de Schrödinger*, limite de Heisenberg, dynamique de Zénon quantique.

Schrödinger Cat States of a Rydberg Atom for Quantum Metrology

Abstract There is no fundamental limit to the precision of a classical measurement. The position of a meter's needle can be determined with an arbitrarily small uncertainty. In the quantum realm, fundamental fluctuations due to the Heisenberg principle limit the precision of any measurement. When the needle is replaced by a mesoscopic system, for instance a spin J evolving on a spherical dial, the Bloch sphere, the semi-classical spin coherent state quantum fluctuations lead to a measurement uncertainty scaling as $1/\sqrt{J}$, the standard quantum limit (SQL). This is far from the ultimate Heisenberg limit (HL), which scales as $1/J$. We present here an innovative approach, using interferometric measurements on mesoscopic Schrödinger-cat-like superpositions of Rydberg states to realize a single-atom electrometer measuring weak fields of the order of 1 mV/cm in a few tens of nanoseconds. The sensitivity of this method is beyond the SQL and we check that its uncertainty scales as the HL. The extreme sensitivity of this non-invasive space- and time-resolved field measurement could have many practical applications.

Keywords Rydberg atoms, quantum metrology, spin Cat states, Heisenberg limit, quantum Zeno dynamics.

